

Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям

Василь Попович¹, Оксана Вовк²

¹ д. т. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., м. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

На прикладі статичної задачі термопружності для термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям апробовано два варіанти методу послідовних наближень і досліджено ефективність їх застосування для розв'язування нелінійних задач термопружності. Визначено розбіжність між розподілами напружень у шарі із залежними від температури та сталими (середньоінтегральними й опорними) характеристиками матеріалу.

Ключові слова: задача термопружності, термочутливі тіла, конвективно-променевий теплообмін, метод послідовних наближень, нескінченний шар.

Вступ. На сьогоднішній день залишаються актуальними дослідження температурних полів і викликаних ними напружено-деформованих станів елементів конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, на основі моделей, що враховують термочутливість матеріалу за конвективно-променевого теплообміну, що засвідчують публікації в сучасній науковій літературі, зокрема [1-3]. Такі математичні моделі для визначення розподілів температури є нелінійними крайовими задачами теплопровідності, для розв'язування яких використовують, переважно, числові методи. Зацікавлення науковців викликають аналітико-числові підходи до розв'язування такого класу задач. Один із таких підходів, що базується на використанні варіанту методу послідовних наближень, було запропоновано у роботі [4]. У праці [5] розв'язано статичну задачу термопружності для термочутливого порожнистого циліндра з використанням, окрім згаданого, ще одного варіанту методу послідовних наближень і порівняно одержані результати з точним розв'язком. Для того, щоб отримати повну картину щодо ефективності використання запропонованих варіантів методу послідовних наближень, виникла необхідність їх апробації для тіл іншої геометричної форми. У цій роботі здійснено апробації варіантів методу послідовних наближень стосовно розв'язування задачі теплопровідності для нескінченного термочутливого шару, що обмінюється теплом шляхом конвективно-променевого теплообміну з середовищами різних сталих температур, і визначено та досліджено його термопружний стан.

1. Формулювання задачі теплопровідності

Розглянемо задачу про визначення стаціонарного температурного поля t безмежного шару завтовшки l , термомеханічні характеристики матеріалу якого є функціями температури. Через поверхні $z = 0$ і $z = l$ шар обмінюється теплом із зовнішніми середовищами сталих температур t_{c1} і t_{c2} шляхом конвективно-променевого теплообміну.

Зумовлене такими діями стаціонарне температурне поле шару визначаємо з рівняння теплопровідності [6]

$$\frac{d(\lambda_t(t) dt/dz)}{dz} = 0 \quad (1)$$

за крайових умов

$$\left\{ \lambda_t(t) dt/dz + (-1)^j \left[\alpha_j(t)(t - t_{cj}) + \sigma \varepsilon_j(t)(t^4 - t_{cj}^4) \right] \right\}_{z=z_j} = 0, \quad j=1,2, \quad (2)$$

де $z_1 = 0$, $z_2 = l$; $\lambda_t(t)$ — залежний від температури коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару; $\alpha_j(t)$, $\varepsilon_j(t)$ — відповідно залежні від температури коефіцієнти теплообміну через поверхні $z = z_j$ ($j=1,2$) та ступені чорноти цих поверхонь; σ — постійна Стефана-Больцмана.

2. Побудова наближених розв'язків задачі теплопровідності

Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір — товщину шару l ; введемо безрозмірні температуру $T = t/t_0$, координату $\rho = z/l$ і подамо характеристики матеріалу шару, коефіцієнти теплообміну та ступені чорноти поверхонь у вигляді функцій $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з нуликом мають відповідні розмірності, а функції з зірочкою описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури. Тоді задача (1), (2) набуде вигляду

$$\frac{d(\lambda_t^*(T) dT/d\rho)}{d\rho} = 0; \quad (3)$$

$$\left\{ \lambda_t^*(T) dT/d\rho + (-1)^j \left[Bi_j \alpha_j^*(T)(T - T_{cj}) + Sk_j \varepsilon_j^*(T)(T^4 - T_{cj}^4) \right] \right\}_{\rho=\rho_j} = 0. \quad (4)$$

Тут $T_{cj} = t_{cj}/t_0$, $Bi_j = \alpha_{0j}l/\lambda_{t0}$, $Sk_j = \sigma \varepsilon_{0j}t_0^3/\lambda_{t0}$, $j=1,2$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$.

До нелінійної задачі (3), (4) застосуємо перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT, \quad (5)$$

де $T_p = t_p/t_0$, t_p — нижнє значення діапазону температур, в якому задаються залежності теплових і механічних характеристик матеріалу шару.

У результаті отримаємо таку крайову задачу на змінну θ :

$$d^2\theta/d\rho^2 = 0; \quad (6)$$

$$\left\{ d\theta/d\rho + (-1)^j \left[Bi_j \alpha_j^*(T(\theta))(T(\theta) - T_{cj}) + Sk_j \varepsilon_j^*(T(\theta))(T^4(\theta) - T_{cj}^4) \right] \right\}_{\rho=\rho_j} = 0, \quad j=1,2. \quad (7)$$

Тут $T(\theta)$ — вираз безрозмірної температури через змінну Кірхгофа θ , який для конкретної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури знаходимо з рівняння (5).

Для знаходження розв'язку крайової задачі щодо змінної θ (6), (7) застосуємо метод послідовних наближень. За m -те ($m = 1, 2, \dots$) наближення розв'язку задачі беремо аналітичний розв'язок такої лінійної задачі:

$$d^2\theta_m/d\rho^2 = 0; \quad (8)$$

$$\left[d\theta_m/d\rho + (-1)^j Bi_{jm-1}(\theta_m - \theta_{cj}) \right]_{\rho=\rho_j} = 0, \quad (9)$$

де

$$\theta_{cj} = \int_{T_p}^{T_{cj}} \lambda_t^*(T) dT, \quad Bi_{j0} = Bi_j, \\ Bi_{jm-1} = \left[\theta_{m-1}(\rho_j) - \theta_{cj} \right]^{-1} \left\{ Bi_j \alpha_j^*(T(\theta_{m-1})) \left[T(\theta_{m-1}(\rho_j)) - T_{cj} \right] + Sk_j \varepsilon_j^*(T(\theta_{m-1})) \left[T^4(\theta_{m-1}(\rho_j)) - T_{cj}^4 \right] \right\}, \quad j=1,2 \quad (m \geq 2). \quad (10)$$

Поряд із цим розглянемо дещо інший варіант методу послідовних наближень, який передбачає розв'язання рівняння (8) із певними крайовими умовами. Для їх формулювання запишемо крайові умови (7) так:

$$\left[d\theta/d\rho + (-1)^j Bi_j^*(T(\theta) - T_{cj}) \right]_{\rho=\rho_j} = 0. \quad (11)$$

Тут

$$Bi_j^* = Bi_j \alpha_j^*(T(\theta)) + Sk_j \varepsilon_j^*(T(\theta)) (T^2(\theta) + T_{cj}^2) (T(\theta) + T_{cj}). \quad (12)$$

Для конкретизації подальших викладок розглянемо, як приклад, найбільш поширену лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, а саме: $\lambda_t^*(T) = 1 + \lambda_1(T - T_p)$, де λ_1 — задана стала. На основі співвідношення (5) запишемо формулу для температури через змінну Кірхгофа

$$T(\theta) = \lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1\theta} - 1 \right) + T_p, \quad (13)$$

яка після розвинення квадратного кореня в ряд набуває вигляду

$$T(\theta) = \theta \left(1 - 0,5\lambda_1\theta + 0,5\lambda_1^2\theta^2 - 0,625\lambda_1^3\theta^3 + \dots \right) + T_p. \quad (14)$$

З огляду на вирази (12), (14), у другому варіанті методу послідовних наближень пропонується скористатися крайовими умовами (9), у яких

$$Bi_{jm-1} = \kappa_{m-1} Bi_{jm-1}^*, \quad \theta_{cj} = (T_{cj} - T_p) / \kappa_{m-1}, \quad (15)$$

де $\kappa_{m-1} = 1 - 0,5(\lambda_1\theta_{m-1} - \lambda_1^2\theta_{m-1}^2 + 0,625\lambda_1^3\theta_{m-1}^3 + \dots)$, $Bi_{jm-1}^* = Bi_j^*|_{\theta=\theta_{m-1}}$, $Bi_{j0}^* = Bi_j^*$, $j = 1, 2$ ($m \geq 2$).

Зазначимо, що обчислення κ_{m-1} можна здійснювати з довільною точністю, використовуючи для цього відповідну кількість членів розвинення.

Розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\theta_m = C_1\rho + C_2. \quad (16)$$

Тут C_1, C_2 — сталі, які знаходимо з умов (9). У результаті отримаємо, що

$$C_1 = \left[Bi_{1m-1}Bi_{2m-1}\theta_{c2} + Bi_{1m-1}^2\theta_{c1}(1 + Bi_{2m-1}) \right] / \Delta - Bi_{1m-1}\theta_{c1},$$

$$C_2 = \left[Bi_{2m-1}\theta_{c2} + (1 + Bi_{2m-1})Bi_{1m-1}\theta_{c1} \right] / \Delta, \quad \Delta = Bi_{1m-1} + Bi_{1m-1}Bi_{2m-1} + Bi_{2m-1},$$

Bi_{jm-1} і θ_{cj} визначаються формулами (10) або (15) відповідно.

Розв'яжемо також задачу (6), (7) методом, запропонованим у роботі [7], який полягає у розв'язуванні рівняння (6) за умов

$$d\theta/d\rho|_{\rho=0} = Q, \quad \theta|_{\rho=1} = \tilde{T}_{c2}. \quad (17)$$

Розв'язок такої задачі має вигляд

$$\theta = Q(\rho - 1) + \tilde{T}_{c2}. \quad (18)$$

Значення потоку Q і температури \tilde{T}_{c2} вважаються невідомими та знаходяться з нелінійної системи рівнянь, отриманої після підстановки $T(\theta)$ (знайденого зі співвідношення (5)) у крайові умови (4). У випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності ця система матиме вигляд:

$$\begin{cases} Q - Bi_1 \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1(\tilde{T}_{c2} - Q)} - 1 \right] + T_p - T_{c1} \right\} - \\ - Sk_1 \left\{ \left[\lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1(\tilde{T}_{c2} - Q)} - 1 \right) + T_p \right]^4 - T_{c1}^4 \right\} = 0, \\ Q + Bi_2 \left[\lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1\tilde{T}_{c2}} - 1 \right) + T_p - T_{c2} \right] + \\ + Sk_2 \left\{ \left[\lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1\tilde{T}_{c2}} - 1 \right) + T_p \right]^4 - T_{c2}^4 \right\} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Зазначимо, що питання вибору початкового наближення для системи рівнянь (19) у праці [7] не досліджене. Тут систему (19) зведено до розв'язання одного нелінійного рівняння з невідомою температурою \tilde{T}_{c2} . За початкове наближення для \tilde{T}_{c2} вибрано розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для нетермочутливого шару за конвективного теплообміну з довкіллям, коли $\rho = 1$.

3. Побудова точного розв'язку задачі теплопровідності

Для з'ясування того, який із розглянутих вище наближених методів ефективніший, знайдемо точний розв'язок задачі (6), (7) і порівняємо його зі згаданими. Підставимо розв'язок (16) рівняння (6) і вираз температури (13) у крайові умови (7). У результаті в загальному випадку отримаємо систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих сталих інтегрування C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 - Bi_1 \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (C_1 \rho_1 + C_2)} - 1 \right] + T_p - T_{c1} \right\} - \\ - Sk_1 \left\langle \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (C_1 \rho_1 + C_2)} - 1 \right] + T_p \right\}^4 - T_{c1}^4 \right\rangle = 0, \\ C_1 + Bi_2 \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (C_1 \rho_2 + C_2)} - 1 \right] + T_p - T_{c2} \right\} + \\ + Sk_2 \left\langle \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (C_1 \rho_2 + C_2)} - 1 \right] + T_p \right\}^4 - T_{c2}^4 \right\rangle = 0. \end{cases}$$

У цьому випадку система зводиться до розв'язування одного нелінійного рівняння з невідомою C_2 , а саме:

$$F_1(C_2) + F_2(C_2) = 0,$$

де

$$\begin{aligned} F_1(C_2) &= Bi_1 \left[\lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1 C_2} - 1 \right) + T_p - T_{c1} \right] - \\ &- Sk_1 \left\langle \left[\lambda_1^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\lambda_1 C_2} - 1 \right) + T_p \right]^4 - T_{c1}^4 \right\rangle, \\ F_2(C_2) &= Bi_2 \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (F_1(C_2) + C_2)} - 1 \right] + T_p - T_{c2} \right\} + \\ &+ Sk_2 \left\langle \left\{ \lambda_1^{-1} \left[\sqrt{1 + 2\lambda_1 (F_1(C_2) + C_2)} - 1 \right] + T_p \right\}^4 - T_{c2}^4 \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Для його розв'язання використаємо метод Ньютона. За початкове наближення для сталої C_2 виберемо значення, отримане за розв'язування стаціонарної задачі теплопровідності для нетермочутливого шару за конвективного теплообміну з довкіллям.

4. Визначення термопружного стану

Термопружний стан шару завтовшки l ($0 \leq z \leq l$), температура якого змінюється лише уздовж товщини, визначається двома ненульовими компонентами тензора напружень $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(z)$, які обчислюються за формулою [4]:

$$\sigma(z) = \frac{E(t)}{1-\nu(t)} \left[\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(t) \right], \quad (20)$$

де $A = \int_0^l \frac{zE(t)}{1-\nu(t)} dz$, $B = \int_0^l \frac{E(t)}{1-\nu(t)} dz$, $C = \int_0^l \frac{z^2 E(t)}{1-\nu(t)} dz$, $N_t = \int_0^l \frac{E(t)\Phi(t)}{1-\nu(t)} dz$, $M_t = \int_0^l \frac{E(t)\Phi(t)}{1-\nu(t)} z dz$,

$\Phi(t) = \int_{t_p}^t \alpha_t(t) dt$; $E(t), \nu(t), \alpha_t(t)$ — залежні від температури модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт лінійного розширення (ТКЛР) відповідно. При цьому напруження задовольняють умови

$$\int_0^l \sigma(z) dz = 0, \quad \int_0^l z\sigma(z) dz = 0. \quad (21)$$

Якщо термомеханічні характеристики шару, аналогічно до попереднього, подати у вигляді залежностей $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де χ_0 — розмірна величина, що дорівнює значенню відповідної характеристики за температури t_p ($T = T_p$) (опорне значення характеристики), а величини з зірочкою — безрозмірні, причому $\chi^*(T_p) = 1$, то після введення безрозмірних напружень $\sigma_0 = \sigma / (E_0 \alpha_{t_0} t_0)$ формула (20) набуде вигляду

$$\sigma_0 = \frac{E^*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} \left[\frac{(A_* N_t^* - B_* M_t^*) \rho + A_* M_t^* - C_* N_t^*}{A_*^2 - B_* C_*} - \Phi_*(T) \right]. \quad (22)$$

Тут $A_* = \int_0^1 \frac{\rho E^*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} d\rho$, $B_* = \int_0^1 \frac{E^*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} d\rho$, $C_* = \int_0^1 \frac{\rho^2 E^*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} d\rho$,

$$N_t^* = \int_0^1 \frac{E^*(T)\Phi_*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} d\rho, \quad M_t^* = \int_0^1 \frac{E^*(T)\Phi_*(T)}{1-\nu_0 \nu^*(T)} \rho d\rho, \quad \Phi_*(T) = \int_{T_p}^T \alpha^*(T) dT.$$

Отже, температурні напруження в шарі завтовшки l ($0 \leq z \leq l$), температура якого змінюється лише вздовж товщини, обчислюються за формулою (20), де інтегрування по змінній z , під час визначення A, B, C, N_t, M_t здійснюється у межах від 0 до l . Відповідні безрозмірні напруження обчислюються за формулою (22), у якій інтегрування по змінній ρ здійснюється у межах від 0 до 1.

5. Числовий аналіз

Для перевірки достовірності отриманих результатів порівняно значення температури за товщиною термочутливого шару, обчислених на основі знайдених трьох аналітико-числових розв'язків, зі значеннями температури, знайденими на основі точного розв'язку. При цьому вважали, що через поверхню $\rho = 0$ відбувається конвективний теплообмін із середовищем, температура якого 373 К, а через поверхню $\rho = 1$ — складний теплообмін із середовищем сталої температури, рівної 873 К, за різних комбінацій значень критеріїв Біо та Старка. Для числових досліджень вибрано характеристики сталі У12 у діапазоні температур 373-873 К [5]:

$$\lambda_t(t) = 45,04 \left[1 - 0,51(T - T_p) \right] [\text{Вт}/(\text{м К})],$$

$$a(t) = 11,42 \cdot 10^{-6} \left[1 - 0,86(T - T_p) \right] [\text{м}^2/(\text{с})],$$

$$\alpha_t(t) = 11,68 \cdot 10^{-6} \left[1 + 1,33(T - T_p) - 0,65(T - T_p)^2 \right] [1/\text{К}],$$

$$G(t) = 0,794 \cdot 10^{11} \left[1 - 0,27(T - T_p) + 0,21(T - T_p)^2 - 0,59(T - T_p)^3 \right] [\text{Па}],$$

$$v(t) = 0,282 \left[1 + 0,199(T - T_p) - 1,291(T - T_p)^2 + 2,36(T - T_p)^3 \right].$$

Результати обчислень у безрозмірних величинах подані в табл. 1-3. У табл. 1-3 $T_{\text{точ}}$ — значення температури, знайдені на основі точного розв'язку, а T_{m10} , T_{m15} — значення температури, знайдені з використанням m -ого наближення, у якому Bi_{jm-1} визначаються виразами (10) або (15) відповідно, а T_{mPr} отримані за допомогою розв'язування системи (19). Зазначимо, що під час числового розв'язування системи рівнянь (19) постає проблема вибору нульового наближення її розв'язку.

Таблиця 1

$$Bi_1 = 0,1; \quad Sk_1 = 0; \quad Bi_2 = 0,1; \quad Sk_2 = 0$$

| ρ | $T_{\text{точ}}$ | T_{m10} | T_{m15} | T_{mPr} |
|--------|------------------|-----------|-----------|-----------|
| 0,0 | 0,69780 | 0,69765 | 0,6966 | 0,69800 |
| 0,1 | 0,70097 | 0,70079 | 0,6995 | 0,70160 |
| 0,2 | 0,70410 | 0,70390 | 0,7025 | 0,70500 |
| 0,3 | 0,70730 | 0,70710 | 0,7054 | 0,70790 |
| 0,4 | 0,71040 | 0,71025 | 0,7080 | 0,71100 |
| 0,5 | 0,71360 | 0,71340 | 0,7112 | 0,71400 |
| 0,6 | 0,71680 | 0,71660 | 0,7142 | 0,71700 |
| 0,7 | 0,71995 | 0,71980 | 0,7170 | 0,72050 |
| 0,8 | 0,72300 | 0,72300 | 0,7210 | 0,72375 |
| 0,9 | 0,72630 | 0,72615 | 0,7230 | 0,72690 |
| 1,0 | 0,72950 | 0,72930 | 0,7260 | 0,73010 |

Таблиця 2

$$Bi_1 = 10; \quad Sk_1 = 0; \quad Bi_2 = 0,2; \quad Sk_2 = 0,1$$

| ρ | $T_{\text{точ}}$ | T_{m10} | T_{m15} | T_{mPr} |
|--------|------------------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0,44320 | 0,44330 | 0,4430 | 0,4430 |
| 0,1 | 0,45970 | 0,45970 | 0,4585 | 0,4597 |
| 0,2 | 0,47640 | 0,47640 | 0,4745 | 0,4764 |
| 0,3 | 0,49310 | 0,49310 | 0,4906 | 0,4931 |
| 0,4 | 0,51005 | 0,51004 | 0,5068 | 0,5100 |
| 0,5 | 0,52710 | 0,52710 | 0,5232 | 0,5271 |
| 0,6 | 0,54430 | 0,54430 | 0,53970 | 0,5443 |
| 0,7 | 0,56170 | 0,56170 | 0,55640 | 0,5617 |
| 0,8 | 0,57930 | 0,57930 | 0,57320 | 0,5793 |
| 0,9 | 0,59700 | 0,59700 | 0,59020 | 0,5970 |
| 1,0 | 0,61490 | 0,61490 | 0,60740 | 0,6150 |

Таблиця 3

$$Bi_1 = 100; Sk_1 = 0; Bi_2 = 0,5; Sk_2 = 0,2$$

| ρ | $T_{точ}$ | T_{m10} | T_{m15} | T_{mPr} | | ρ | $T_{точ}$ | T_{m10} | T_{m15} | T_{mPr} |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0,42980 | 0,4298 | 0,4297 | 0,4298 | | 0,5 | 0,57410 | 0,5740 | 0,5670 | 0,5740 |
| 0,1 | 0,45780 | 0,4578 | 0,4564 | 0,4578 | | 0,6 | 0,60430 | 0,6043 | 0,5963 | 0,6043 |
| 0,2 | 0,48620 | 0,4862 | 0,4836 | 0,4862 | | 0,7 | 0,63520 | 0,6351 | 0,6256 | 0,6351 |
| 0,3 | 0,51510 | 0,5150 | 0,5111 | 0,5150 | | 0,8 | 0,66650 | 0,6664 | 0,6554 | 0,6664 |
| 0,4 | 0,54440 | 0,5443 | 0,5391 | 0,5443 | | 0,9 | 0,69840 | 0,6983 | 0,6857 | 0,6983 |

Максимальна відносна похибка у першому варіанті методу послідовних наближень і підході, що запропонований у роботі [7], не перевищувала 0,02 %, а у другому варіанті — 2 %, причому вона досягається на поверхні з найвищою температурою. Кількість ітерацій для кожного із запропонованих варіантів методу послідовних наближень не перевищувала 6 ітерацій. Зазначимо, що обчислення здійснювалися за заданої точності $\varepsilon = 0,0001$. У другому варіанті методу послідовних наближень бралось чотири члени розвинення в ряд квадратного кореня, а збільшення їх кількості призводило до збільшення кількості ітерацій, але не покращувало точності розрахунків. Окрім того, у цьому варіанті на відміну від першого накладається обмеження на залежність коефіцієнта теплопровідності матеріалу від температури, яка повинна бути лінійною.

Для отриманих на основі точного розв'язку та другого варіанту методу послідовних наближень розподілів температурного поля порівняно значення, спричинених ними напружень у термочутливому шарі. Також було порівняно розподіли напружень у випадках, залежних від температури та сталих значень термомеханічних характеристик матеріалу шару.

Результати досліджень напруженого стану відображені на рис. 1, 2. На рис. 1 суцільними лініями зображені розподіли напружень, отримані на основі точного розв'язку для температурного поля, штриховими — розподіли напружень, отримані з використанням другого варіанту методу послідовних наближень. На рис. 2 суцільні лінії відповідають розподілам напружень за врахування залежності від температури всіх термомеханічних характеристик, штрихові — розподілам, які обчислені за середньоінтегральних значень відповідних термомеханічних характеристик, а пунктирні — за їх опорних значень. Зазначимо, що розподіл напружень за постійних характеристик, одержаних за максимальної температури, практично збігся з розподілом за середньоінтегральних характеристик, тому його графік на рисунку не помітний.

Із графіків рис. 1 випливає, що розподіл напружень, спричинених температурним полем, обчисленим із використанням другого варіанту методу послідовних

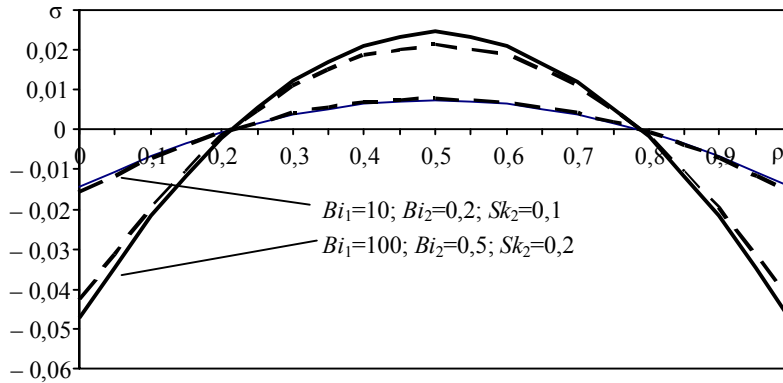


Рис. 1

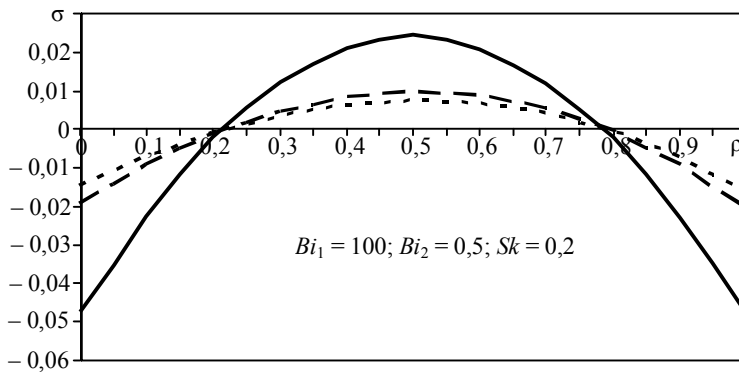


Рис. 2

наближень, має занижені значення всередині шару та завищені на краях порівняно з розподілом, отриманим із використанням точного розв'язку для визначення температурного поля. Причому незначна розбіжність між значеннями температурного поля у 2 % спричиняє розбіжність між значеннями напружень вже у 9 %. Графіки на рис. 2 ілюструють розбіжності, які отримано за неврахування температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалу тіла. Максимальна розбіжність між розподілами напружень, обчислених із використанням моделі термочутливого тіла та за сталих характеристик, які дорівнюють середньоінтегральним значенням, — 59 %, а за характеристик окреслених їх опорними значеннями — 69 %.

Висновки. Аналіз відображених у табл. 1-3 отриманих числових результатів показав кращу точність першого варіанту методу послідовних наближень порівняно з двома іншими підходами по всій товщині шару та для всіх досліджених комбінацій критеріїв Біо і Старка. Тому можемо зробити висновок, щодо надання переваги цьому варіанту методу послідовних наближень для розв'язування нелінійних задач теплопровідності для тіл із плоскопаралельними границями.

Визначення термопружного стану шару з використанням середньоінтегральних значень для термомеханічних характеристик матеріалу дещо покращує точність

розрахунків порівняно з використанням їх значень за початкової температури, але залишається не достатньо точним порівняно з розподілом напружень, отриманим за врахування температурної залежності всіх характеристик матеріалу.

Література

- [1] Giessler C., Lange U., Thess A. Nonlinear laminar pipe flow of fluids with strongly temperature-dependent material properties // Phys. Fluids. — 2007. — Vol. 19, Issue 4. — P. 043601-043612.
- [2] Coupled thermomechanics of single-wall carbon nanotubes / F. Scarpa, L. Boldrin, X.-H. Peng et al // Appl. Phys. Lett. — 2010. — Vol. 97, Issue 15. — P. 151903-151905.
- [3] Srinivas S., Muthuraj R. Effects of thermal radiation and space porosity on MHD mixed convection flow in a vertical channel using homotopy analysis method // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulat. — 2010. — Vol. 15, Issue 8. — P. 2098-2108.
- [4] Попович В. С. Побудова розв'язків задач термопружності термочутливих тіл при конвективно-променевому теплообміні // Доп. НАН України. — 1997. — № 11. — С. 69-73.
- [5] Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 4. — С. 151-158.
- [6] Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. — Т. 3: Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. — Львів: Сполом, 2009. — 410 с.
- [7] Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 151-161.

Investigation of the static thermoelastic state of thermosensitive infinite layer under convective-radial heat exchange with the environment

Vasyl Popovych, Oksana Vovk

As an example the stationary heat conduction problem for thermosensitive infinite layer under convective radial heat exchange with the environment was considered. Two versions of the method of successive approximations concerning the solution of nonlinear thermoelasticity problems were tested. The differences between distributions of stresses in the layer with temperature-dependent and constant (average integral and bearing) material characteristics are determined.

Исследование статического термоупругого состояния термочувствительного бесконечного слоя при конвективно-лучевом теплообмене с окружающей средой

Василий Попович, Оксана Вовк

На примере статической задачи термоупругости для термочувствительного бесконечного слоя при конвективно-лучевом теплообмене с окружающей средой апробированы два варианта метода последовательных приближений и исследована эффективность их применения для решения нелинейных задач термоупругости. Определены различия между распределениями напряжений в слое с зависимыми от температуры и постоянными (среднеинтегральными и опорными) характеристиками материала.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 20.12.12