УДК 539.3

Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом

Ярослав П'янило[1], Марія Васюник[2], Іван Васюник[3]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv
[2] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: m.vasiunyk@gmail.com.ua
[3] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 50

Запропоновано метод розв'язування диференціальних рівнянь у дробових похідних за часом із використанням многочленів Лагерра. Розв'язок визначено з трикутної системи диференціальних рівнянь у звичайних або частинних похідних за координатами. Отримані результати апробовано на модельній задачі.

Ключові слова: диференціальні рівняння, дробові похідні, многочлени Лаггера.

Вступ. Останнім часом для моделювання фізичних процесів все частіше використовується дробове (диференціальне й інтегральне) числення [1, 2]. Широкого вжитку воно набуло під час моделювання систем із пам'яттю, у теорії фракталів, фізиці (механіці) суцільних середовищ [3-5] тощо. При цьому аналітичні методи розв'язування задач, які виникають, зазвичай, будуються на базі операційного числення. Однак тоді виникає потреба у розв'язуванні не менш «легкої» задачі відновлення оригіналу. Іншим шляхом розв'язування задач є використання числових або наближених методів. Перевагою останніх є те, що наближені методи виключають процедуру дискретизації, відтак є менш чутливі до похибки вхідної інформації. Одним із таких наближених методів є спектральний у деякому базисі. Оскільки дробові похідні задаються інтегралами типу згортки, то за базис, зазвичай, беруть многочлени Лагерра.

Пропоноване дослідження має за мету розроблення способу розв'язування диференціальних рівнянь у дробових похідних із використанням спектрального методу в базисі многочленів Лагерра.

1. Формулювання задачі

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0 \tag{1}$$

за нульової початкової умови та $f(0,t) = \sqrt{\pi} / a\sqrt{t}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,t) = 0$.

Тут

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

— дробова похідна Рімана-Ліувіля [1, 2];

$$k(t) = t^{-\alpha} . \tag{2}$$

У разі $\alpha = 1$ дробова похідна Рімана-Ліувіля переходить у звичайну похідну за часом, а рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

За вказаних крайових умов розв'язком цього рівняння є функція

$$f(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right).$$

2. Аналітичний розв'язок

Якщо $F(s)$ — перетворення Лапласа-Карсона функції $f(t)$: $\Im\left(f\right) = F(s)$ [6, 7], то перетворення дробової похідної за часом від функції $f(t)$ є: $\Im\left(D_0^{\alpha} f(t)\right) =$ $= s^{\alpha} F(s)$. Тому в просторі Лапласа-Карсона рівняння (1) запишемо так

$$F''(x,s) - \frac{1}{a^2} s^{\alpha} F(s) = 0 .$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє записаним вище крайовим умовам, має вигляд

$$F(x,s) = \frac{\pi}{a} \sqrt{s} e^{\frac{-xs^{\alpha/2}}{a}} . \tag{3}$$

Переходячи у формулі (3) до оригіналу, отримуємо точний аналітичний розв'язок сформульованої задачі.

Знаходження оригіналу зображення $F(s) = s^{\beta} \exp\left(\gamma s^{\alpha}\right)$ зводиться до обчислення інтеграла Бромвіча

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st} ds .$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2013, вип. 17, 163-167

Особливою точкою зображення є точка галуження $s = 0$. Побудуємо контур, утворений відрізком, який з'єднує точки $\sigma - ia$ та $\sigma + ia$ двома дугами кіл $|s| = R$, що йдуть із кінців вказаного відрізка до точок берегів деякого розрізу, які, своєю чергою, з'єднують дугу кола $|s| = r$. При цьому $-\pi < \arg s < \pi$. Бачимо, що на дугах кола підінтегральна функція прямує до нуля, якщо $R \to \infty$. Тому інтеграл Бромвіча по цих дугах дорівнює нулеві. Таким чином потрібно обчислити інтеграли вздовж берегів лінії розрізу та вздовж дуги малого кола радіуса $|s| = r$.

Врахувавши, що на берегах розрізу $s = \rho e^{-\pi i}$ та $s = \rho e^{\pi i}$, для інтеграла J запишемо

$$J = \int_R^r F\left(\rho e^{\pi i}\right) e^{\pi i} e^{t\rho e^{\pi i}} d\rho + \int_r^R F\left(\rho e^{-\pi i}\right) e^{-\pi i} e^{t\rho e^{-\pi i}} d\rho .$$

Звідси для $F(s) = s^{\beta} e^{\gamma s^{\alpha}}$ отримаємо

$$J = 2i \int_0^{\infty} \rho^{\beta} e^{-t\rho} e^{\gamma\rho^{\alpha}\cos\alpha\pi} \sin\left(\beta\pi + \gamma\rho^{\alpha}\sin\alpha\pi\right) d\rho ,$$

де β — стала.

Для інтеграла по внутрішньому колу радіуса $r = \varepsilon$ маємо

$$J_{\varepsilon} = \int_{DE} s^{\beta} e^{\gamma s^{\alpha}} e^{ts} ds = \begin{cases} 2\pi i, & \beta = -1, \\ 0, & \beta > -1. \end{cases}$$

Відтак, для функції $f(t)$ одержимо формулу

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho^{\beta} e^{-t\rho} e^{\gamma\rho^{\alpha}\cos\alpha\pi} \sin\left(\beta\pi + \gamma\rho^{\alpha}\sin\alpha\pi\right) d\rho + \begin{cases} 1, & \beta = -1, \\ 0, & \beta > -1. \end{cases}$$

Якщо $\beta = 0,5$, то для $f(t)$ отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \sqrt{\rho} e^{-t\rho} e^{-\frac{x}{a}\rho^{\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{a}\rho^{\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\alpha\pi}{2}\right) d\rho .$$

3. Спектральний метод розв'язування

Приймемо, що функції, які входять у розв'язок задачі, можна подати у вигляді ряду Фур'є-Лагерра. Функцію $f(t),\ t \in [0, \infty)$ розвинемо у ряд за многочленами Лагерра $L_m(t)$

$$f(t)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)L_m(t),$$

де коефіцієнти визначаємо інтегральними співвідношеннями

$$f_m=\int_0^{\infty} e^{-t}L_m(t)f(t)dt\ .$$

Функцію $k(t)$ (2) також розвинемо у ряд Фур'є за многочленами $L_m(t)$. З огляду на те, що

$$\int_0^t L_n(t-\tau)L_m(\tau)\,d\tau=\int_0^t L_{n+m}(\tau)\,d\tau\ ,$$

матимемо

$$\frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}k_n\,L_n(t-\tau)\sum_{m=0}^{\infty}f_m\,L_m(\tau)\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}k_n\sum_{m=0}^{\infty}f_m\,L_{n+m}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,L_n(t)\,,$$

де k_n та f_m — коефіцієнти Фур'є-Лагерра функцій $k(t)$ й $f(t)$,

$$c_n=\sum_{m=0}^{n}k_m\,f_{n-m}=\sum_{m=0}^{n}k_{n-m}\,f_m\ ,$$

Підставивши у вихідне рівняння подання функцій рядами за многочленами Лагерра, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m''(x)L_m(t)=\frac{1}{a^2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x)\,L_n(t)\,.$$

Звідси одержимо таке рекурентне співвідношення для визначення коефіцієнтів Фур'є-Лагерра

$$f_m''(x)=\frac{1}{a^2\Gamma(1-\alpha)}c_m(x)\,.$$

Для $m=0$ маємо $c_0=k_0\,f_0$ і для визначення коефіцієнта $f_0(x)$ отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$f_0''(x)=\frac{1}{a^2\Gamma(1-\alpha)}c_0(x)=\frac{1}{a^2\Gamma(1-\alpha)}k_0 f_0(x)\,.$$

Висновки. У праці многочлени Лагерра застосовано для розв’язування диференціальних рівнянь у дробових похідних. Показано, що перевагою такого підходу є те, що інтегрування згортки двох функцій зводиться до сумування згортки рядів. Таким чином уникаємо використання процедури дискретизації, яка вносить значну похибку в процес обчислень.

Література

[1] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
[2] *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 — 256 с.
[3] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — Москва: Наука, 2005. — 199 с.
[4] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. — 272 с.
[5] *Нахушева В. А.* Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. — 100 с.
[6] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975. — 407 с.
[7] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высшая школа, 1965. — 466 с.

Using the Laguerre polynomials to the spectral method of solving equations with fractional time derivatives

Yaroslav Pjanylo, Mariya Vasyunyk, Ivan Vasyunyk

The method of the solution of the differential equations in fractional time derivatives with use of Laguerre polynomials is offered. The solution is found from triangular system of the differential equations with usual or partial derivatives in coordinates. The received results are approved on a model problem.

Использование многочленов Лагерра в спектральном методе решения уравнений в дробных производных по времени

Ярослав Пьянило, Мария Васюнык, Иван Васюнык

Предложен метод решения дифференциальных уравнений в дробных производных по времени с использованием многочленов Лагерра. Решение определено с треугольной системы дифференциальных уравнений в обычных или частных производных по координатам. Полученные результаты апробированы на модельной задаче.

Отримано 15.04.13