

Поздовжній зсув анізотропних тіл із тонкими відшарованими включеннями

Георгій Сулим¹, Ярослав Пастернак², Назар Оліярник³

¹ д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

² к. ф.-м. н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

³ Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nazaroliyarnyk13@gmail.com

Авторський модифікований метод граничних елементів застосовано до розв'язування задачі поздовжнього зсуву анізотропних тіл із тонкими відшарованими включеннями. Побудовано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності для безмежного анізотропного тіла, що містить однобічно повністю відшароване абсолютно жорстке тонке включення. Розглянуто випадок часткового відшарування тонкого включення на одному з берегів. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень у його вершинах за різних значень довжини ділянки відшарування та міри анізотропії матеріалу. Побудовані графіки розподілу контактних напружень на березі включення, що перебуває в умовах ідеального контакту з тілом. Окрім того, досліджено вплив міри анізотропії (ортотропії) матеріалу на значення контактних напружень на відшарованому березі включення.

Ключові слова: тонке відшароване включення, антиплоска деформація, контактні напруження.

Вступ. Внаслідок умисного впровадження в однорідний матеріал тонких стрічкових включень чи створення поверхневих напилень можливо досягти значного покращення його механічних, реологічних, термічних чи електричних властивостей або утворення захисних шарів. Саме тому з таких композитів часто виготовляють відповідальні й утримувальні елементи конструкцій. З іншого боку, у процесі експлуатації дія зовнішнього навантаження, розвиток пошкоженості на межі розділу матеріалів можуть спричинити відшаровування армувальних елементів і подальше пришвидшене руйнування конструкції. У цьому випадку важливою є побудова методів оцінювання напружено-деформованого стану такого тіла.

Зазвичай існують два основних підходи для моделювання включення під час дослідження тіл із тонкими неоднорідностями. Перший базується на конкретному описі форми включення. Зокрема, задачі для еліпсоїдного включення висвітлені у роботах [1, 2]. Інший підхід ґрунтується на принципі спряження континуумів різної вимірності та методі функцій стрибка. Згідно цього підходу включення замінюється певною поверхнею (у двовимірному випадку — лінією) розриву фізико-механічних полів, що описують збурювальний ефект тонкої неоднорідності [3]. У монографії [1] побудовано моделі тонких пружних включень, які враховують

змінну товщину неоднорідностей, їхню жорсткість і геометрію, а також різного роду плівкові моделі, що використовуються під час дослідження пружної рівноваги тіл із включеннями за їх ідеального термомеханічного контакту. Більш складними є задачі визначення напружено-деформованого стану композиту у разі неідеального контакту між тілом і включенням. Задачі відшарування пружних жорстких включень досліджено у роботах [4-7]. Не менш важливим є врахування анізотропних характеристик тіла із включенням.

У роботі [10] побудовано загальний матричний підхід формулювання моделей тонких включень з урахуванням можливості їхнього ідеального та неідеального контакту. На цій основі досліджено плоску задачу для тіла з подвійно періодичною системою підсилених отворів [11], а також антиплоску деформацію ізотропних тіл із тонкими стрічковими накладками та включеннями в умовах ідеального та неідеального контакту [12].

Метою цієї роботи є розширення сфери застосування загального підходу для дослідження поздовжнього зсуву тіл із тонкими включеннями за умови неідеального механічного контакту на спільній межі чи повного або часткового відшарування берега включення у разі анізотропії (ортотропії) матеріалу тіла.

1. Формулювання зовнішньої задачі

Розглянемо циліндричне анізотропне тіло з тонким стрічковим пружним включенням, твірні якого паралельні до твірних необмеженого у цьому напрямі тіла (рис. 1). На межі тіла задані такі крайові умови, щоб виконувалися умови деформування поздовжнім зсувом. Вважатимемо, що механічні поля та навантаження, які виникають у тілі та включенні, не змінюються з плином часу та вздовж напрямку, паралельного до твірної тіла. На межі тіла задані крайові умови першого роду (у напруженнях).

Згідно принципу спряження континуумів різної вимірності [1] вилучаємо з розгляду включення як геометричний об'єкт, а контактні напруження та переміщення переносимо на береги Γ_C^+ та Γ_C^- його серединної лінії Γ_C (див. рис. 1). Таким чином сформульована задача зводиться до задачі визначення невідомих функцій стрибків напружень і переміщень у тілі з розрізом.

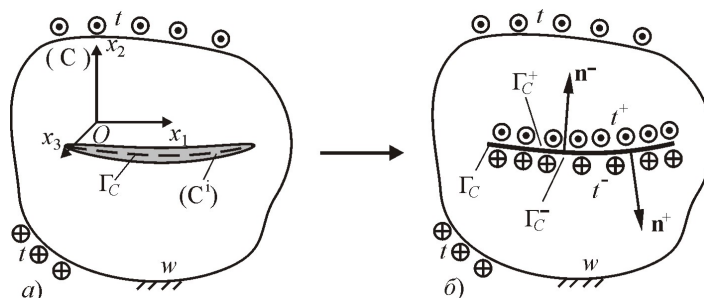


Рис. 1. Загальна схема задачі та підходу моделювання тонкого включення за принципом спряження

На основі формули Сомільяни, записаної для тіла з розрізом, спрямовуючи внутрішню точку тіла почергово до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та $\mathbf{y} \in \Gamma_C$ межі включення, отримуємо інтегральні рівняння стосовно крайових функцій w, t на межі тіла та $\Delta w, \Sigma t$ на розрізі Γ_C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}^w(\Sigma t, \Delta w) - \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ &n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}^t(\Sigma t, \Delta w) - n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де позначення RPV означає величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV — головне значення інтеграла (Cauchy principal value); HPV — скінченну частину гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). Ядра інтегральних рівнянь $[W, T, D_j, S_j](\mathbf{x}, \mathbf{y})$ означені в роботі [3].

Вирази функціоналів $\tilde{F}^w(\Sigma t, \Delta w)$, $\tilde{F}^t(\Sigma t, \Delta w)$, що згідно принципу спряження описують модель тонкого включення за ідеального контакту з основним матеріалом, у явному вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^w(\mathbf{y}, \Sigma t, \Delta w) &\equiv \Sigma w(\mathbf{y}) = w^0 + \int_{y_0}^{\mathbf{y}} \frac{P(\mathbf{y}) + P^*(\mathbf{y})}{T^i(\mathbf{y}) h(\mathbf{y})} ds, \\ \tilde{F}^t(\mathbf{y}, \Sigma t, \Delta w) &\equiv \Delta t(\mathbf{y}) = -\frac{Q^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta w(\mathbf{y}) + \Delta w^*(\mathbf{y})]. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $Q^i = c_{55}$, $T^i = c_{44}$ — значення модулів пружності матеріалу включення [3]; w^0 — переміщення лівого торця включення, що визначається шляхом додаткового використання рівняння рівноваги включення; $\Delta w^*(\mathbf{y})$, $P^*(\mathbf{y})$ — коригувальні функції [1]. Умови (3) враховують, що між включенням і основним матеріалом існує ідеальний механічний контакт, а відтак у середовищі у разі переходу через включення виникають такі ж, як і на включенні, стрибки напружень і переміщень.

Доповнення залежностей (1), (2) виразами (3), а також рівнянням рівноваги включення

$$P^n + P^0 - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad (4)$$

породжує замкнуту систему інтегральних рівнянь, числовий розв'язок якої отримуємо за допомогою модифікованого [8, 9] методу граничних елементів.

2. Математична модель тонкого пружного включення

2.1. Ідеальний контакт. Модель включення у випадку ідеального контакту берегів включення та середовища, тобто за умов

$$t^{i\pm}(\mathbf{y}) = -t^{\pm}(\mathbf{y}), \quad w^{i\pm}(\mathbf{y}) = w^{\pm}(\mathbf{y}), \quad (5)$$

детально описано у працях [3, 10]. У співвідношеннях (3) верхнім прямим індексом «i» позначено величини, що стосуються тонкого включення.

2.2 Повне відшарування окремих ділянок тонкого включення. Нехай тонке включення повністю відшароване від берега Γ_C^- на ділянках $\gamma_C^- \subset \Gamma_C^-$. Тоді, внаслідок відсутності на цих ділянках контактних напружень, у точці колокації $\mathbf{x}^{s,r} \in \gamma_C^-$ повинні виконуватися такі крайові умови:

$$t^-(\mathbf{x}^{k,r}) = 0, \quad w^+(\mathbf{x}^{k,r}) = w^{i+}(\mathbf{x}^{k,r}). \quad (6)$$

Оскільки $\Sigma t = t^+ + t^-$ і $\Delta t = t^+ - t^-$, то, враховуючи першу рівність у співвідношенні (6), можемо записати перше рівняння моделі повністю відшарованого включення

$$F^{t^-}(\mathbf{x}^{k,r}) \equiv \Delta t^{k,r} = \Sigma t^{k,r}. \quad (7)$$

Оскільки включення відшароване від берега Γ_C^- , а на березі Γ_C^+ задовольняються умови ідеального механічного контакту, то необхідно врахувати його зсув у площинах, дотичних до серединної поверхні. Внаслідок малої товщини включення переміщення його серединної поверхні в перерізі у близькі до переміщень $w^{i+}(\mathbf{y})$ берега Γ_C^+ . Тоді з рівнянь для ідеально контактуючого включення [10] можемо записати друге рівняння для переміщень повністю відшарованого включення

$$F^{w^-}(\mathbf{x}^{k,r}) \equiv \Sigma w^{k,r} = \tilde{F}^w(\mathbf{x}^{k,r}) - \Delta w^{k,r}, \quad (8)$$

де тильдою позначено вираз математичної моделі включення (3) за його ідеального контакту з матрицею.

Таким же способом отримуємо рівняння для повністю відшарованого від берега Γ_C^+ на ділянках $\gamma_C^+ \subset \Gamma_C^+$ включення. У результаті отримуємо:

$$t^+(\mathbf{x}^{k,r}) = 0, \quad w^-(\mathbf{x}^{k,r}) = w^{i-}(\mathbf{x}^{k,r}), \quad (9)$$

$$F^{t+}(\mathbf{x}^{k,r}) \equiv \Delta t^{k,r} = -\Sigma t^{k,r}, \quad F^{w+}(\mathbf{x}^{k,r}) \equiv \Sigma w^{k,r} = \tilde{F}^w(\mathbf{x}^{k,r}) + \Delta w^{k,r}. \quad (10)$$

3. Числовий аналіз прикладів

Розглянемо безмежне пружне циліндричне анізотропне тіло, що містить тонке абсолютно жорстке стрічкове включення, розміщене вздовж відрізка $[-a; a]$ осі Ox . Тіло перебуває під дією зовнішнього навантаження $\sigma_{yz}^\infty, \sigma_{xz}^\infty$ так, що виконуються умови поздовжнього зсуву. Вважаємо, що на своїй верхній поверхні $x_2 = +0$ включення ідеально контактує із середовищем, а на нижній $x_2 = -0$ — повністю відшароване уздовж всієї довжини. У такому разі, використовуючи співвідношення (2), (7) і (8), система інтегральних рівнянь задачі матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \frac{\partial \Delta w(\xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\Sigma t(\xi)}{x - \xi} dx &= \frac{1}{k} (c_{44} \sigma_{xz}^\infty - c_{45} \sigma_{yz}^\infty), \\ -\frac{1}{2} \Sigma t(\xi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{k \Delta w'(x)}{x - \xi} dx &= \sigma_{yz}^\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $\Delta w'(x) = \partial \Delta w(x) / \partial x$, $k = \sqrt{c_{44} c_{55} - c_{45}^2}$; c_{44}, c_{45}, c_{55} — модулі пружності анізотропного тіла.

Ввівши у розгляд функції $p(x), q(x)$, які для $|x| \leq a$ визначаються зі співвідношень

$$p(x) = \Sigma t(x) + k \frac{\partial \Delta w(x)}{\partial x}, \quad q(x) = \Sigma t(x) - k \frac{\partial \Delta w(x)}{\partial x} \quad (12)$$

з урахуванням накладених на них додаткових умов:

$$\int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-a}^a q(x) dx = P_0 + P_n, \quad (13)$$

де P_0, P_n — торцьове навантаження на лівому та правому кінцях включення. При цьому рівняння (11) запишемо так:

$$\begin{aligned} p(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{p(x)}{x - \xi} dx &= -2 \left[\sigma_{yz}^\infty + \frac{1}{k} (c_{44} \sigma_{xz}^\infty - c_{45} \sigma_{yz}^\infty) \right], \\ q(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{q(x)}{x - \xi} dx &= -2 \left[\sigma_{yz}^\infty - \frac{1}{k} (c_{44} \sigma_{xz}^\infty - c_{45} \sigma_{yz}^\infty) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Відповідно до праці [13] розв'язок (11) за умов (13) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{1}{X_1(x/a)} \left[\frac{P_0 + P_n}{\pi a \sqrt{2}} - \sqrt{2} \left[\gamma_2 \sigma_{xz}^\infty + (1 - \gamma_1) \sigma_{yz}^\infty \right] \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \right], \\
 q(x) &= \frac{1}{X_2(x/a)} \left[\frac{P_0 + P_n}{\pi a \sqrt{2}} - \sqrt{2} \left[\gamma_2 \sigma_{xz}^\infty - (1 + \gamma_1) \sigma_{yz}^\infty \right] \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{15}$$

де $X_1(\xi) = (1 + \xi)^{3/4} (1 - \xi)^{1/4}$, $X_2(\xi) = (1 + \xi)^{1/4} (1 - \xi)^{3/4}$, $\gamma_1 = c_{45}/k$, $\gamma_2 = c_{44}/k$.

У разі $\sigma_{yz}^\infty = \sigma_{xz}^\infty = 0$, $P_0 + P_n = T$ розв'язок (15) повністю узгоджується з граничним випадком розв'язку [7] для ізотропної пружної смуги з навантаженим зосередженою силою T жорстким відшарованим тонким включенням, коли товщина смуги прямує до нескінченності.

Тепер розглянемо випадок, коли тонке включення відшароване не на усій поверхні $x_2 = +0$, а лише на деякій її частині $[-b; b] \subset [-a; a]$. Міру анізотропії матеріалу окреслюватимемо відношенням $c = c_{44}/c_{55}$ (при цьому вважається, що $c_{45} = 0$, тобто, розглядаємо ортотропне тіло). Відносна жорсткість включення характеризується параметром $k = G^i/c_{55}$, де G^i — модуль зсуву матеріалу неоднорідності. Півтовщина включення $h = 0,001a$. Здійснено розрахунки нормованого узагальненого коефіцієнта інтенсивності напружень (УКІН) $K_{32}^* = K_{32}/\tau\sqrt{\pi a}$ у випадку абсолютно жорсткого включення (АЖВ, при цьому у числовій схемі вважалось, що $k = 10^{10}$). Досліджено вплив зміни відношення $q = b/a$ ділянки відшарування до всієї довжини включення та міри анізотропії матеріалу c на значення УКІН (табл. 1). Для розбиття осі неоднорідності у методі граничних елементів використано всього 40 граничних елементів однакової довжини.

З аналізу отриманих результатів (табл. 1) випливає, що в обох випадках навантажування значення УКІН K_{32} за збільшення ділянки відшарування зростають.

Таблиця 1

УКІН для різної довжини ділянки відшарування та міри анізотропії матеріалу

q		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
K_{32}^* , $\sigma_{yz}^\infty = 0$, $\sigma_{xz}^\infty = \tau$	$c = 0,1$	0,316	0,316	0,316	0,317	0,317	0,318	0,321	0,327
	$c = 1$	1,000	1,000	1,001	1,001	1,003	1,007	1,015	1,036
	$c = 10$	3,163	3,164	3,164	3,167	3,172	3,184	3,210	3,275
K_{32}^* , $\sigma_{yz}^\infty = \tau$, $\sigma_{xz}^\infty = 0$	$c = 0,1$	0,003	0,010	0,024	0,044	0,073	0,113	0,172	0,266
	$c = 1$	0,003	0,010	0,024	0,044	0,073	0,113	0,172	0,266
	$c = 10$	0,003	0,010	0,024	0,044	0,073	0,113	0,172	0,266

Для навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = 0$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$ значення K_{32} близькі до УКІН включення у безмежному середовищі за ідеального механічного контакту тіла та включення. У разі навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{xz}^{\infty} = 0$ спостерігається істотний вплив ефекту відшарування на K_{32} , хоча для відповідної задачі за ідеального контакту цей УКІН дорівнюватиме нулю. Також подані дані для різних параметрів міри анізотропії c , згідно яких видно: 1) відсутність впливу анізотропії на значення УКІН K_{32} за навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{xz}^{\infty} = 0$ так само, як і для тріщини в анізотропному матеріалі; 2) зменшення/збільшення значень УКІН у разі зміни c для навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = 0$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$, хоча відносні прирости K_{32} ізотропного й анізотропного тіла зі зміною ділянки відшарування й однакового c залишаються практично однакові (різниця в межах 0,1 %).

Для ізотропної матриці здійснено розрахунки контактних напружень $t = \sigma_{yz}^{\infty} / \tau$, що виникатимуть на невідшарованому березі включення у разі навантаження тіла напруженнями $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$. Отримані результати для різних значень параметра q продемонстровані на рис. 2а. Пунктирна лінія відповідає напруженням, отриманим згідно аналітичного розв'язку (15) для однобічно повністю відшарованого включення. Для розбиття осі неоднорідності у методі граничних елементів бралось 80 граничних елементів. Зі збільшенням ділянки відшарування напруження зростають, особливо у разі наближення до торців включення; у випадку повного відшарування берега напруження практично співпадають із даними розв'язку (15) (див. рис. 2а).

Досліджено вплив анізотропії середовища на значення контактних напружень $t_1 = \sigma_{xz}^{\infty} / \tau$ на відшарованому березі включення у разі навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = 0$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$. Результати обчислень у вигляді кривих зображені на рис. 2б. Штрихові лінії відповідають значенню $q = 1/4$, суцільні — $q = 7/8$. Розбиття осі неоднорідності таке ж, як і в попередньому випадку.

На обох графіках рис. 2 спостерігається різке зростання (стрибок) значень контактних напружень у кінцевих точках ділянок порушення ідеального контакту, а на усій ділянці відшарування вони нульові. Також потрібно зауважити, що за зростання параметра міри анізотропії c та ділянки відшарування q значення напружень t_1 та амплітуди їхніх стрибків теж збільшуються. Таким чином підтверджено достовірність отриманих результатів і можливість застосування розробленого підходу до вивчення тіл із тонкими відшарованими включеннями.

Висновки. У роботі запропоновано числово-аналітичний підхід для розв'язування задач поздовжнього зсуву анізотропних тіл із тонкими включеннями за умови неідеального механічного контакту на їхній спільній межі. Отримано аналітичний розв'язок для анізотропного тіла з однобічно повністю відшарованим абсолютно жорстким тонким включенням, а також числово розв'язано задачу у разі

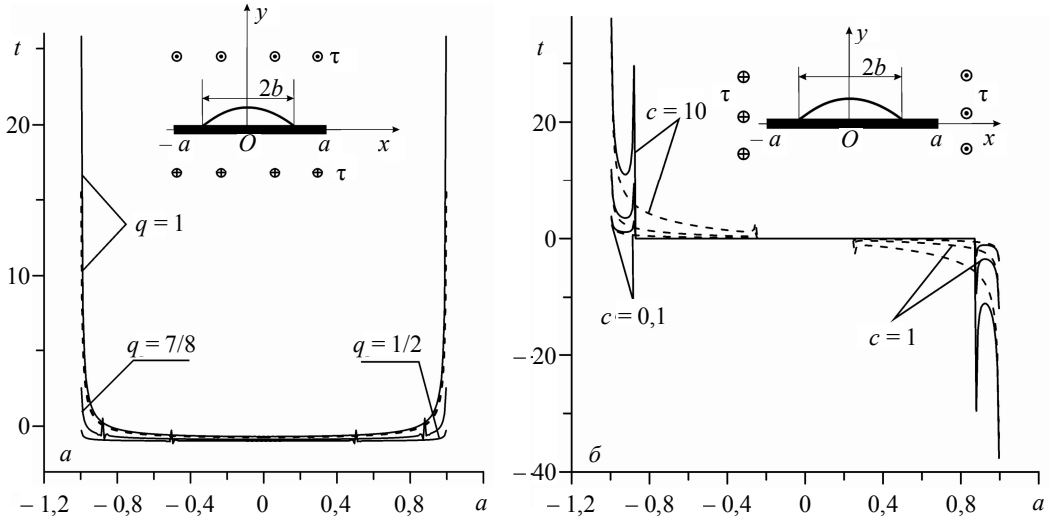


Рис. 2. Контактні напруження $t = \sigma_{yz}^{\infty} / \tau$ на відшарованому березі включення для різної ділянки відшарування q (a) та міри анізотропії матеріалу c (b)

однобічного відшарування центральної частини жорсткого включення. За навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = 0, \sigma_{xz}^{\infty} = \tau$ виявлено зростання значення УКІН жорсткого включення у разі збільшення ділянки відшарування, що справджується як для сильної, так і для слабкої анізотропії. Натомість у випадку $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau, \sigma_{xz}^{\infty} = 0$ вплив анізотропії на значення УКІН відсутній. Побудовані графічні залежності (рис. 2) відображають характер зміни контактних напружень на невідшарованому березі включення за збільшення ділянки відшарування та зміни міри анізотропії матеріалу. Отримані результати можна використати під час діагностики й оцінювання експлуатаційної здатності армованих елементів конструкцій чи композитних матеріалів у випадку часткового чи повного відшарування волокон.

Література

- [1] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [2] Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. — Київ: Наук. думка, 1986. — 216 с.
- [3] VEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities / V. Bozhydarnyk, Ia. Pasternak, H. Sulym, N. Oliyarnyk // Acta mechanica et automatic. — 2011. — Vol. 5, No 4. — P. 11-16.
- [4] Ильина И. И., Сильвестров В. В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отслоившемся вдоль одной стороны от среды // Механика твердого тела. — 2005. — № 3. — С. 153-166.
- [5] Ильина И. И., Сильвестров В. В. Частично отслоившееся тонкое жесткое включение между разными упругими материалами при наличии трения в зоне контакта // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2007. — № 4 (54). — С. 124-139.
- [6] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — Москва: Наука, 1982. — 344 с.

- [7] Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. — Москва: Физматлит, 1993. — 224 с.
- [8] Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2011. — Vol. 35, No 4. — P. 678-690.
- [9] Pasternak Ia., Sulym H. T. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure // Proc. Int. Conf. «Integral Equations — 2010», 25-27 August 2010 (Lviv). — Lviv: PAIS, 2010. — P. 104-108.
- [10] Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». — 2011. — Вип. 15, т. 2, № 5. — С. 200-210.
- [11] Сулим Г. Т., Пастернак Я. М., Куцук С. Л. Концентрація напружень та ефективні механічні характеристики пластинок із подвійно періодичними системами підкріплених отворів // Вісник ТНТУ. — 2012. — № 3 (67). — С. 7-16.
- [12] Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах // Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць. — Вип. 9. — Львів: Каменяр, 2012. — С. 98-113.
- [13] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — Москва: Наука, 1977. — 640 с.

Longitudinal shear of anisotropic solids with thin delaminated inclusions

Heorhiy Sulym, Iaroslav Pasternak, Nazar Oliyarnyk

Authors modified boundary element method was applied to the solution of the longitudinal shear problem for anisotropic solids with thin delaminated inclusions. The analytic solution of the elasticity problem for an infinite anisotropic solid containing a unilaterally delaminated rigid line inclusion was obtained. Partial delamination of a single face of the thin inclusion was considered. The stress intensity factors were evaluated for different values of the length of delamination area and the material anisotropy. The paper presents the plots of contact stress distribution at the face of the inclusion, which is in a perfect contact with the solid. The influence of the anisotropy (orthotropy) of the material on the contact stresses at the face of fully delaminated inclusion was studied.

Продольный сдвиг анизотропных тел с тонкими расслоенными включениями

Георгий Сулим, Ярослав Пастернак, Назар Олиярник

Авторский модифицированный метод граничных элементов применен к решению задач продольного сдвига анизотропных тел с тонкими отслоенными включениями. Построено аналитическое решение задачи теории упругости для бесконечного анизотропного тела, содержащего односторонне полностью отслоенное абсолютно жесткое тонкое включение. Рассмотрен случай частичного отслоения тонкого включения на одном из берегов. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в его вершинах при различных значениях длины участка отслоения и меры анизотропии материала. Построены графики распределения контактных напряжений на берегу включения, который находится в условиях идеального контакта с телом. Кроме того исследовано влияние меры анизотропии (ортотропии) материала на значение контактных напряжений на отслоившемся берегу включения.

Отримано 14.03.13