

## Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл із тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінення теплової енергії

Оксана Турій

К. ф.-м. н., м. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: dept13@iapmm.lviv.ua

*У роботі, базуючись на підходах феноменологічної теорії поширення випромінювання, сформульовано вихідні співвідношення, що описують перенос випромінювання в опромінюваних двошарових пластинах зі складниками різної прозорості за наявності частково прозорого чи непрозорого проміжкового шару. Здійснено постановки змішаних контактнo-крайових задач теплопереносу для таких пластин. Виведено узагальнені умови переносу випромінювання через частково прозорий проміжковий шар та узагальнені умови теплообміну через проміжковий шар довільної прозорості, які дають можливість використати для опису процесів переносу випромінювання та тепла в пластинах за наявності тонких прошарків модель двошарової пластини за ускладнених радіаційних характеристик межі контакту та теплових контактних умов. Знайдено наближені вирази для напружень в основних шарах, що враховують наведені жорсткісні характеристики на згин і розтяг тонкого проміжкового шару.*

**Ключові слова:** шарувата пластина, термомеханічна поведінка, операторний метод, проміжковий шар, частково прозорі та непрозорі складники, теплове опромінення, теплоперенос, термонапружений стан.

**Вступ.** Для адекватного дослідження теплового та термонапруженого станів шаруватих елементів конструкцій і приладів, що перебувають під дією інтенсивних теплових навантажень (зокрема, теплового опромінення), необхідно якомога точніше врахувати їх структурну будову. Перенос випромінювання, виділення тепла, теплові потоки в шаруватих структурах можуть визначати не лише радіаційні властивості основних (функціональних) шарів, але й тонких прошарків (проміжкових шарів), що утворюються за формування структури. В окремих випадках проміжкові шари виконують основне функціональне призначення, як, наприклад, під час створення нових теплозахисних матеріалів і виробів із регульованою теплопровідністю.

Реальне врахування впливу тонких прошарків на термомеханічну поведінку шаруватих і кусково-неоднорідних тіл суттєво ускладнює формулювання контактнo-крайових задач і застосування аналітичних та числових методів їх розв'язування. Тому їх, зазвичай, виключають із розгляду, замінюючи фізичною поверхнею з приведеними тепловими та механічними характеристиками і враховують узагальненими контактними тепловими та механічними умовами. Для опису теплових умов використовують певні припущення щодо розподілу температури, потоків тепла за товщиною, або формальний операторний метод [1-5]. З його допомогою у працях Підстригача, Шевчука та ін. [1-5] отримано узагальнені умови фізичного обміну через проміжковий шар за лінійних контактних умов (зокрема, тепло- та масообміну).

Аналіз згаданих вище математичних моделей термопружності, які стосуються шаруватих і кусково-неоднорідних тіл, показує, що радіаційні властивості складників, зокрема, міжконтактного прошарку в таких моделях не беруться до уваги. Тому ефекти, пов'язані з поширенням теплового випромінювання (як зовнішнього, так і власного) та поглинання й випромінення теплової енергії в об'ємі за опису теплового стану, не враховуються. В окремих моделях шаруватих тіл враховується лише теплообмін випромінюванням із зовнішнім середовищем граничних шарів за спрощених умов теплообміну за законом Стефана-Больцмана та неявно передбачається їх непрозорість [4].

Наявність проміжкових шарів із відмінними від основних шарів радіаційними, теплофізичними та механічними характеристиками властива шаруватим елементам конструкцій і приладів, що використовуються в космічній, авіаційній, інфрачервоній, електро- та радіотехніці [6-8]. Їх структура, товщина та фізичні властивості визначаються в основному способами з'єднання основних шарів. До них належать: зварка плавленням, дифузійна зварка, пайка, склеювання і т. д. [9-12]. Всі згадані способи з'єднання, що використовуються під час формування шаруватих структур, призводять до утворення проміжкового шару (з'єднуючого чи функціонально-з'єднуючого призначення), фізичні властивості якого можуть суттєво відрізнятися від властивостей решти складників шаруватої структури. З точки зору взаємодії з тепловим випромінюванням такі прошарки можуть бути як частково прозорими, так і непрозорими [11]. Дані про їх радіаційні характеристики в літературі дуже малочисельні [11], але вони необхідні під час моделювання та числових досліджень процесів переносу випромінювання та тепла в опромінюваних шаруватих структурах. В окремих випадках оцінку радіаційних властивостей прошарків можна провести, базуючись на відомих даних про радіаційні властивості сполук, які їх утворюють. Так, для клейових проміжкових шарів на основі синтетичних полімерів, товщини яких не перевищують 1 мм, можна використати експериментальні дані про спектральні пропускну  $T_{\lambda}^{(tr)}$  та відбивальну  $\rho_{\lambda}^{(n)}$  здатності тонких плівок із таких полімерів. Такі характеристики визначають оптичними методами, досліджуючи проходження променя відомої інтенсивності  $I_{0\lambda}^{(n)}$  (у конкретному спектральному діапазоні  $\lambda \pm \Delta\lambda$ ) через плоский зразок заданої товщини  $h_0$  [1, 13, 14] у напрямку нормалі  $\vec{n}$ . Відбивальна здатність  $\rho_{\lambda}^{(n)}$  є відношення інтенсивності  $I_{\lambda}^{refl(n)}$  відбитого в усіх напрямках випромінювання до інтенсивності  $I_{0\lambda}^{(n)}$  падаючого. Зокрема  $\rho_{\lambda}^{(n)} = 2 \int_0^{\pi/2} R_{\lambda}''(\xi, \pi/2) d\xi$ , де  $R_{\lambda}''$  — двоспрямована спектральна відбивальна здатність. Під пропускну здатністю  $T_{\lambda}^{(tr)}$  розуміють відношення інтенсивності  $I_{\lambda}^{tr(n)}$  променя, що пройшов у напрямку нормалі через зразок, до інтенсивності  $I_{\lambda}^{ins(n)} = (1 - \rho_{\lambda}^{(n)}) I_{0\lambda}^{(n)}$  променя на вході. При цьому інтенсивність  $I_{\lambda}^{tr(n)}$  ослабленого променя, нехтуючи внутрішнім перевідбиванням, визначають за законом Бугера [15], тобто  $I_{\lambda}^{tr(n)} = I_{\lambda}^{ins(n)} \exp(-a_{\lambda} h_0)$ . Тоді для пропускну здатності отримують вираз

$$T_{\lambda}^{(tr)} = \frac{I_{\lambda}^{tr(n)}}{I_{\lambda}^{ins(n)}} = \frac{\exp(-a_{\lambda} h_0)}{(1 - \rho_{\lambda}^{(n)})}$$

Співвідношення (1) може служити для встановлення спектрального коефіцієнта поглинання  $a_{\lambda}$  конкретного матеріалу за результатами експериментальних вимірювань спектральної пропускну  $T_{\lambda}^{(tr)}$  та відбивальної  $\rho_{\lambda}^{(n)}$  здатностей на тонких (товщиною  $h_0$ ) плоских зразках.

Наприклад, на рис. 1 зображено спектральні пропускі  $T_{\lambda}^{(tr)}$  здатності поліетилену [6]. Для досліджених тонких (0,24 мм) зразків характерна майже повна прозорість ( $T_{\lambda}^{(tr)} \approx 100\%$ ) у діапазоні видимого світла та ближній області інфрачервоного діапазону спектра ( $0 < \lambda < 8$  мкм). Суттєве поглинання має місце в середній (рис. 1а) області, де пропусна здатність становить лише 60-80%. Така ж здатність властива зразкам більшої товщини (3,21 мм) у дальній області (рис. 1б).

Тенденція до прозорості у ближній області (за винятком однієї вузької спектральної смуги) проявляється і для тонких (0,2 мм) зразків поліметилметакрилату [6].

Для зразків політрихлорфторетилену товщиною 3 мм наявна зона непрозорості ( $4 < \lambda < 5$  мкм) вже у ближній області інфрачервоного діапазону спектра [6].

Щодо відбивальної здатності  $\rho_{\lambda}^{(n)}$ , то для синтетичних полімерів (як і для більшості частково прозорих матеріалів) у ближній області інфрачервоного діапазону спектра вона становить 0,04-0,07. Суттєве зростання цієї величини (на порядок) до 0,7-0,9 спостерігається в середній області [6].

Отже, тонкі проміжкові шари, що виникають під час утворення шаруватих структур із допомогою клейового з'єднання, товщини яких не перевищують 1 мм, є практично прозорими у ближній області інфрачервоного діапазону спектра, тобто для них справедливе наближене співвідношення  $\exp(-a_{\lambda} h_0) \approx 1$ .

У літературі відомі дослідження процесів переносу теплового випромінювання та теплопровідності в шаруватих (композитних) частково прозорих тілах, які проводилися, в основному, на модельних задачах для шаруватої пластини [16-20]. При цьому приймається, що поверхні пластини — непрозорі, а температури на них, які є заданими, визначають випромінювання з поверхні вглиб пластини, як випромінювання непрозорого тіла з відомими радіаційними характеристиками. На межі поділу шарів враховуються ефекти відбивання та заломлення випромінювання, а умови теплового контакту розглядаються як ідеальні.

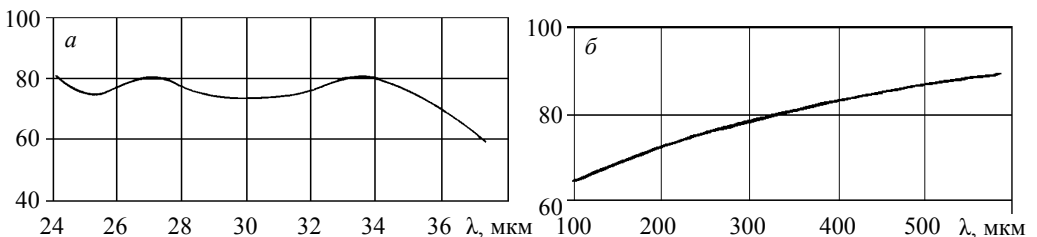


Рис. 1. Спектральна пропусчна здатність зразків поліетилену товщиною 0,24(а) та 3,21(б) мм

Врахування реальної структури опромінюваних шаруватих елементів (наявність основних і проміжкових шарів різної прозорості), реальних параметрів (енергетичних і спектральних) зовнішніх джерел теплового опромінення та їх розташування щодо досліджуваного тіла, умов теплообміну з зовнішнім середовищем, які відповідають умовам експлуатації чи термообробки, вимагає ускладнення постановки задач, що описують перенос випромінювання та теплоперенос, зокрема, задач для двошарових пластин.

Нижче сформулюємо вихідні співвідношення, що описують перенос випромінювання в опромінюваних двошарових пластинах зі складниками різної прозорості за наявності частково прозорого чи непрозорого проміжкового шару та здійснимо постановки задач теплопереносу для таких пластин.

Розглянемо тришарову нескінченну пластину, що складається з двох основних частково-прозорих шарів 1 і 2 (товщинами  $h_1$  та  $h_2$ ), з'єднаних (спряжених) через проміжковий шар 0 товщиною  $h_0$ . Зі сторони шару 1 пластина знаходиться під дією теплового випромінювання інтенсивності  $I_{\lambda_s}(\nu)$  від паралельної до шарів нагрітої ізотермічної поверхні, температура  $T_s$  якої вважається заданою. Тут  $\nu = \cos \xi$ , а  $\xi$  — гострі кути, що утворюють напрями падіння променів від поверхні з додатнім напрямом осі  $z$ , направленої в напрямку зовнішньої нормалі до шару 2. Області  $z < 0$  і  $z > h$  (де  $h = h_1 + h_0 + h_2$ ) зовнішнього середовища (повітря) приймаємо прозорими для теплового випромінювання; поверхні пластини  $z = 0$  і  $z = h$  та поверхні поділу шарів  $z = h_0$ ,  $z = h_1 + h_0$  — дифузно відбиваючими.

Будемо вважати, що теплове випромінювання поверхні має дифузний характер і його інтенсивність  $I_{\lambda_s}$  не залежить від кута  $\xi$  та пропорційна інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла за температури  $T_s$ , яка визначається за законом Планка. Тоді [21]

$$I_{\lambda_s} = k \frac{2\pi c_1}{\lambda^5 \exp(c_2 / \lambda T_s) - 1}, \quad k = const. \quad (1)$$

Тут за допомогою коефіцієнта пропорційності  $k$  задають енергетичні характеристики реального джерела теплового випромінювання.

Розглядаємо випадок, коли основні шари 1 і 2 є частково прозорі. При цьому можливі два варіанти, пов'язані з прозорістю проміжкового шару.

А). Проміжковий шар частково прозорий. Поширення теплового випромінювання в частково-прозорих шарах 1, 0, 2 описуватимемо рівнянням переносу в наближенні не випромінюючого матеріалу [15, 22], які матимуть вигляд:

$$\frac{dI_{\lambda}^{\pm(j)}(z, \nu)}{dz} \nu \pm a_{\lambda}^{(j)} I_{\lambda}^{\pm(j)}(z, \nu) = 0, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (2)$$

де  $I_{\lambda}^{\pm(j)}(z, \nu)$  — спектральні інтенсивності випромінювання в шарах у напрямках, що утворюють гострий кут  $\xi$  та кут  $\pi - \xi$  з віссю  $z$ ;  $a_{\lambda}^{(j)}$  — спектральні коефіцієнти поглинання матеріалів шарів.

Розв'язки рівнянь (2) можна подати через ефективні інтенсивності  $I_{\lambda}^{\pm(j)}(z_j^{\pm}, \nu)$  випромінювання (що відходять від граничних поверхонь і поверхонь поділу всередину шарів) у вигляді:

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^{+(j)}(z, \nu) &= I_{\lambda}^{+(j)}(z_j^+, \nu) \exp\left[-a_{\lambda}^{(j)}(z - z_j^+)/\nu\right], \\ I_{\lambda}^{-(j)}(z, \nu) &= I_{\lambda}^{-(j)}(z_j^-, \nu) \exp\left[a_{\lambda}^{(j)}(z_j^- - z)/\nu\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $z_1^+ = 0$ ,  $z_0^+ = z_1^- = h_1$ ,  $z_0^- = z_2^+ = h_1 + h_0$ ,  $z_2^- = h$ . Використовуючи їх, записуємо, з урахуванням ефектів заломлення та відбивання випромінювання, умови балансу потоків випромінювання (граничні умови для рівняння переносу [15, 22]) на поверхнях пластини  $z = 0$  і  $z = h$  та на обидвох сторонах поверхонь поділу шарів  $z = h_0$ ,  $z = h_1 + h_0$  і отримуємо для визначення величин  $I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu)$ ,  $I_{\lambda}^{-(1)}(h_1, \nu)$ ,  $I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu)$ ,  $I_{\lambda}^{-(0)}(h_1 + h_0, \nu)$ ,  $I_{\lambda}^{+(2)}(h_1 + h_0, \nu)$ ,  $I_{\lambda}^{-(2)}(h, \nu)$  систему шести інтегральних рівнянь типу рівнянь Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) - 2R_{\lambda}^{+(1)} \int_0^1 I_{\lambda}^{-(1)}(h_1, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= I_{\lambda}^{(s)}(\nu), \\ I_{\lambda}^{-(1)}(h_1, \nu) - 2R_{\lambda}^{-(1)} \int_0^{\nu_{*10}} I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu_*) d\nu_* - \\ - 2 \int_{\nu_{*10}}^1 I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= \\ = \begin{cases} \left(n_{\lambda}^{(1)}/n_{\lambda}^{(0)}\right)^2 (1 - R_{\lambda}^{+(0)}) I_{\lambda}^{-(0)}(h_1 + h_0, \xi_{01}) \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/\nu), & \text{якщо } 0 \leq \nu \leq \nu_{*01}, \\ 0, & \text{якщо } \nu_{*01} \leq \nu < 1, \end{cases} \\ I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu) - 2R_{\lambda}^{+(0)} \int_0^{\nu_{*01}} I_{\lambda}^{-(0)}(h_1 + h_0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/\nu_*) d\nu_* - \\ - 2 \int_{\nu_{*01}}^1 I_{\lambda}^{-(0)}(h_1 + h_0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/\nu_*) d\nu_* &= \\ = \begin{cases} \left(n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(1)}\right)^2 (1 - R_{\lambda}^{-(1)}) I_{\lambda}^{+(1)}(0, \xi_{10}) \exp(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu), & \text{якщо } 0 \leq \nu \leq \nu_{*10}, \\ 0, & \text{якщо } \nu_{*10} < \nu \leq 1, \end{cases} \\ I_{\lambda}^{-(0)}(h_1 + h_0, \nu) - 2R_{\lambda}^{-(0)} \int_0^{\nu_{*02}} I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/\nu_*) d\nu_* - \\ - 2 \int_{\nu_{*02}}^1 I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/\nu_*) d\nu_* &= \\ = \begin{cases} \left(n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(2)}\right)^2 (1 - R_{\lambda}^{-(2)}) I_{\lambda}^{-(2)}(h, \xi_{20}) \exp(-\theta_{\lambda}^{(2)}/\nu), & \text{якщо } 0 \leq \nu \leq \nu_{*20}, \\ 0, & \text{якщо } \nu_{*20} \leq \nu < 1, \end{cases} \\ I_{\lambda}^{+(2)}(h_1, \nu) - 2R_{\lambda}^{+(2)} \int_0^{\nu_{*20}} I_{\lambda}^{-(2)}(h, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(2)}/\nu_*) d\nu_* - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_{v_{*20}}^1 I_{\lambda}^{-(2)}(h, v_*) v_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(2)}/v_*) dv_* = \\
& = \begin{cases} \left( n_{\lambda}^{(2)}/n_{\lambda}^{(0)} \right)^2 (1 - R_{\lambda}^{+(0)}) I_{\lambda}^{+(0)}(0, \xi_{02}) \exp(-\theta_{\lambda}^{(0)}/v), & \text{якщо } 0 \leq v \leq v_{*02}, \\ 0, & \text{якщо } v_{*02} < v \leq 1, \end{cases} \\
& I_{\lambda}^{-(2)}(h, v) = 2R_{\lambda}^{-(2)} \int_0^1 I_{\lambda}^{+(2)}(h_1 + h_0, v_*) v_* \exp(-\theta_{\lambda}^{(2)}/v_*) dv_*, \quad (4)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
I_{\lambda}^{(s)}(v) &= \begin{cases} \left( n_{\lambda}^{(1)} \right)^2 (1 - R_{\lambda}^{(s)}) I_{\lambda}^{(s)}(\xi_{s1}), & \text{якщо } 0 \leq v \leq v_{*s1}, \\ 0, & \text{якщо } v_{*s1} < v \leq 1, \end{cases} \\
\cos \xi_{s1} &= \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(s)}/n_{\lambda}^{(1)} \right)^2 (1 - v^2)}, \quad v_{*s1} = \cos \xi_{s1}^{cr}, \\
v_{*s1} &= \cos \xi_{s1}^{cr} = \sqrt{1 - \left( 1/n_{\lambda}^{(1)} \right)^2}, \quad \text{оскільки } n_{\lambda}^{ext} = 1, \\
v_{01} &= \cos \xi_{01} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(1)} \right)^2 (1 - v_{10}^2)}, \\
v_{10} &= \cos \xi_{10} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(1)}/n_{\lambda}^{(0)} \right)^2 (1 - v_{01}^2)}, \\
v_{*01} &= 1, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(0)} > n_{\lambda}^{(1)} \text{ та } v_{*01} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(1)} \right)^2}, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(1)} > n_{\lambda}^{(0)}, \\
v_{*10} &= 1, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(1)} > n_{\lambda}^{(0)} \text{ та } v_{*10} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(1)}/n_{\lambda}^{(0)} \right)^2}, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(0)} > n_{\lambda}^{(1)}, \\
v_{20} &= \cos \xi_{20} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(2)}/n_{\lambda}^{(0)} \right)^2 (1 - v_{02}^2)}, \quad v_{02} = \cos \xi_{02} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(2)} \right)^2 (1 - v_{20}^2)}, \\
v_{*02} &= 1, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(0)} > n_{\lambda}^{(2)} \text{ та } v_{*02} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(0)}/n_{\lambda}^{(2)} \right)^2}, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(2)} > n_{\lambda}^{(0)}, \\
v_{*20} &= 1, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(2)} > n_{\lambda}^{(0)} \text{ та } v_{*20} = \sqrt{1 - \left( n_{\lambda}^{(2)}/n_{\lambda}^{(0)} \right)^2}, \text{ якщо } n_{\lambda}^{(0)} > n_{\lambda}^{(2)},
\end{aligned}$$

$n_{\lambda}^{(j)}$  — коефіцієнти заломлення матеріалів шарів;  $\theta_{\lambda}^{(j)} = a_{\lambda}^{(j)} h_j$  — їх оптичні товщини;  $R_{\lambda}^{(s)}, R_{\lambda}^{\pm(j)}$  — коефіцієнти дифузного відбивання лицевої поверхні шару 1, іншої поверхні пластини та поверхонь поділу шарів. Індекси + і — стосуються поверхонь, нормаль до яких співпадає з додатнім чи від'ємним напрямком осі z.

Оскільки всі складники пластини частково прозорі, то вплив випромінювання на тепловий стан пластини пов'язуємо з об'ємними тепловиділеннями в шарах [22]. Їх виражаємо через введені ефективні інтенсивності  $I_{\lambda}^{\pm(j)}(z_j^{\pm}, v)$  випромінювання таким чином:

$$Q_j(z, t) = 2\pi \int_0^{\infty} a_{\lambda}^{(j)} \left\langle \int_0^1 \left\{ I_{\lambda}^{+(j)}(z_j^+, \nu) \exp\left[-a_{\lambda}^{(j)}(z - z_j^+)/\nu\right] + I_{\lambda}^{-(j)}(z_j^-, \nu) \exp\left[a_{\lambda}^{(j)}(z_j^- - z)/\nu\right] \right\} d\nu \right\rangle d\lambda. \quad (5)$$

Тоді тепловий стан у пластині описуємо рівняннями теплопровідності для складових шарів, у яких тепловиділення служать об'ємними джерелами тепла. За сталих густин  $\rho_j$  і коефіцієнтів теплопровідності  $\kappa_j$ , теплоємності  $c_{ej}$ ,  $j = \overline{0, 2}$ , система рівнянь для визначення відхилень  $\theta_j = T_j - T^{(0)}$  температури в пластині від початкової  $T^{(0)} = const$  має вигляд [14, 19]:

$$\frac{\partial^2 \theta_j(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\varpi_j} \frac{\partial \theta_j(z, t)}{\partial t} = -\frac{Q_j(z, t)}{\kappa_j}, \quad Q_2(z, t) = 0, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (6)$$

де  $\varpi_j = \kappa_j / \rho_j c_{ej}$  — коефіцієнти температуропровідності матеріалів шарів.

Систему рівнянь (6) доповнюємо граничними умовами, що окреслюють теплообмін пластини із зовнішнім середовищем на поверхнях  $z = 0, h$  і контактними, які виражають теплову рівновагу на межах  $z = h_1, z = h_1 + h_0$  поділу частково прозорих шарів. За конвективного теплообміну пластини із зовнішнім середовищем (повітрям), згадані контактні-крайові умови для пластини матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{\partial \theta_1(0, t)}{\partial z} - \alpha_{s1} \left[ \theta_1(0, t) + T^{(0)} - T_1^{ext}(t) \right] &= 0, \\ \kappa_1 \frac{\partial \theta_1(h_1, t)}{\partial z} &= \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1, t)}{\partial z}, \quad \theta_1(h_1, t) = \theta_0(h_1, t), \\ \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1 + h_0, t)}{\partial z} &= \kappa_2 \frac{\partial \theta_2(h_1 + h_0, t)}{\partial z}, \quad \theta_0(h_1 + h_0, t) = \theta_2(h_1 + h_0, t), \\ \kappa_2 \frac{\partial \theta_2(h, t)}{\partial z} + \alpha_{s2} \left[ \theta_2(h, t) + T^{(0)} - T_2^{ext}(t) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\alpha_{s1}, \alpha_{s2}$  — коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь шарів 1 і 2 в повітря;  $T_1^{ext}(t), T_2^{ext}(t)$  — температури повітря в областях  $z < 0$  і  $z > h$  зовнішнього середовища.

**Б).** Проміжковий шар непрозорий. Тоді потоки випромінювання в пластині обумовлені не лише випроміненням зовнішнього джерела, але й тепловим випроміненням із поверхонь  $z = h_1, z = h_1 + h_0$  непрозорого проміжкового шару. Інтенсивності такого випромінювання  $I_{\lambda}^{(0)op}(h_1, \nu), I_{\lambda}^{(0)op}(h_1 + h_0, \nu)$  залежать від температур  $T_0(h_1, t), T_0(h_1 + h_0, t)$  поверхонь та їх радіаційних властивостей (спектральних ступенів чорноти  $\varepsilon_{\lambda}^{\pm(0)}$  (для дифузно відбиваючих поверхонь  $\varepsilon_{\lambda}^{\pm(0)} = 1 - R_{\lambda}^{\pm(0)}$ ), а також від характеристик (спектральних показників заломлення  $n_{\lambda}^{(1)}, n_{\lambda}^{(2)}$ ) основних шарів, у які випромінювання проникає. Поширення випромінювання у пластині

з відбиванням на поверхнях  $z = 0$ ,  $h$  і на межах  $z = h_1$ ,  $z = h_1 + h_0$  контакту шарів можливе лише в частково прозорій області ( $0 < z < h_1$ ,  $h_1 + h_0 < z < h$ ), а в непрозорій ( $h_1 < z < h_1 + h_0$ ) має місце поглинання та випромінення на границях [21, 22].

Поширення теплового випромінювання в частково-прозорих шарах 1, 2 описуємо рівняннями переносу (2). Їх розв'язки, як і раніше, подаємо у вигляді (3). З використанням умов балансу потоків випромінювання на граничних поверхнях і межах контакту частково прозорого та непрозорого середовищ із врахуванням ефектів відбивання, поглинання та випромінення теплової енергії, формулюємо системи інтегральних рівнянь щодо ефективних інтенсивностей  $I_\lambda^{\pm(j)}(z_j^\pm, \nu)$  випромінювання на поверхнях  $z_j^\pm$ , що обмежують частково прозорі шари. Для шарів 1 і 2 вони мають відповідно вигляд:

$$\begin{aligned} I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) - 2R_\lambda^{+(1)} \int_0^1 I_\lambda^{-(1)}(h_1, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= I_\lambda^{(s)}(\nu), \\ I_\lambda^{-(1)}(h_1, \nu) - 2R_\lambda^{-(1)} \int_0^1 I_\lambda^{+(1)}(0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= I_\lambda^{(0)op}(h_1, \nu), \\ I_\lambda^{+(2)}(h_1 + h_0, \nu) - 2R_\lambda^{+(2)} \int_0^1 I_\lambda^{-(2)}(h, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu_*) d\nu_* &= I_\lambda^{(0)op}(h_1 + h_0, \nu), \\ I_\lambda^{-(2)}(h, \nu) - 2R_\lambda^{-(2)} \int_0^1 I_\lambda^{+(2)}(h_1 + h_0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu_*) d\nu_* &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вплив випромінювання на тепловий стан пластини враховуємо об'ємними тепловиділеннями (5) у частково прозорих шарах і тепловими потоками  $q_{op}(h_1)$ ,  $q_{abs}(h_1)$ ,  $q_{op}(h_1 + h_0, t)$ ,  $q_{abs}(h_1 + h_0)$  на поверхнях  $z = h_1$ ,  $z = h_1 + h_0$  непрозорого шару, що виникають внаслідок випромінення та поглинання його матеріалом теплової енергії [22]. Їх виразимо через інтенсивності теплового випромінювання з поверхонь проміжкового шару  $I_\lambda^{(0)op}(h_1, \nu)$ ,  $I_\lambda^{(0)op}(h_1 + h_0, \nu)$  й ефективні інтенсивності  $I_\lambda^{+(1)}(0, \nu)$ ,  $I_\lambda^{-(1)}(h, \nu)$  випромінювання на поверхнях пластини:

$$\begin{aligned} q_{op}(z_0^\pm) &= \pi \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[ I_\lambda^{(0)op}(z_0^\pm, \nu) \nu d\nu \right] \right\} d\lambda, \quad (9) \\ q_{abs}(z_0^+) &= \pi (1 - R_\lambda^{-(1)}) \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[ I_\lambda^{+(1)}(z_1^+, \nu) \exp \left[ a_\lambda^{(1)}(z_1^+ - z_0^+) / \nu \right] \nu d\nu \right] \right\} d\lambda, \\ q_{abs}(z_0^-) &= \pi (1 - R_\lambda^{+(2)}) \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[ I_\lambda^{-(2)}(z_2^-, \nu) \exp \left[ a_\lambda^{(2)}(z_2^- - z_0^-) \right] \nu d\nu \right] \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Розподіл температури в пластині знаходимо з системи рівнянь теплопровідності (6) (якщо  $Q_0(z, t) = 0$ ) за крайових умов, що описують теплообмін пластини із зовнішнім середовищем на поверхнях  $z = 0$ ,  $h$ , і контактних на поверхнях  $z = h_1$ ,  $z = h_1 + h_0$ , які виражають умови ідеального теплового контакту за врахування впливу випромінювання (випромінення та поглинання теплової енергії) на межах поділу частково прозорого та непрозорого середовищ [22]:



$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{\partial \theta_1(0,t)}{\partial z} - \alpha_{s1} \left[ \theta_1(0,t) + T^{(0)} - T_1^{ext}(t) \right] &= 0, \\ \kappa_1 \frac{\partial \theta_1(h_1,t)}{\partial z} &= q_{abs}(h_1) - q_{op}(h_1,t) + \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1,t)}{\partial z}, \quad \theta_1(h_1,t) = \theta_0(h_1,t), \\ \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1+h_0,t)}{\partial z} &= q_{abs}(h_1+h_0) - q_{op}(h_1+h_0,t) + \kappa_2 \frac{\partial \theta_2(h_1+h_0,t)}{\partial z}, \\ \theta_0(h_1+h_0,t) &= \theta_2(h_1+h_0,t), \quad \kappa_2 \frac{\partial \theta_2(h,t)}{\partial z} + \alpha_{s2} \left[ \theta_2(h,t) + T^{(0)} - T_2^{ext}(t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо поверхні непрозорого проміжкового шару, які прийнято дифузно відбиваючими, вважати сірими, тобто, що ступені чорноти цих поверхонь не залежать від довжини хвилі  $\lambda$ , а показники заломлення частково прозорих шарів — незалежними від довжини хвилі (зокрема, рівними середньоінтегральним значенням у реальному спектральному діапазоні ( $\varepsilon_{\lambda}^{\pm(0)} = \varepsilon^{\pm(0)} = const$ ,  $n_{\lambda}^{(j)} = n^{(j)} = const$  ( $j=1,2$ )), то з формули (9) отримуємо вирази Стефана-Больцмана [15, 23] для випромінених потоків

$$q_{op}(h_1) = \varepsilon^{- (0)} \left( n^{(1)} \right)^2 \sigma T_0^4 (h_1, t), \quad q_{op}(h_1 + h_0) = \varepsilon^{+ (0)} \left( n^{(2)} \right)^2 \sigma T_0^4 (h_1 + h_0, t).$$

Тоді контактні умови (друга та четверта з умов (11)) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{\partial \theta_1(h_1,t)}{\partial z} &= \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1,t)}{\partial z} + q_{abs}(h_1) - \varepsilon^{- (0)} \left( n^{(1)} \right)^2 \sigma \left[ \theta_0(h_1, t) + T^{(0)} \right]^4, \\ \kappa_0 \frac{\partial \theta_0(h_1+h_0,t)}{\partial z} &= \kappa_2 \frac{\partial \theta_2(h_1+h_0,t)}{\partial z} + q_{abs}(h_1+h_0) - \\ &- \varepsilon^{+ (0)} \left( n^{(2)} \right)^2 \sigma \left[ \theta_0(h_1+h_0, t) + T^{(0)} \right]^4. \end{aligned}$$

### 1. Узагальнені умови переносу випромінювання та тепла через проміжковий шар

Вплив непрозорого проміжкового шару на поширення теплового випромінювання у пластині можна врахувати відбиванням, поглинанням і випроміненням теплової енергії на його поверхнях. Тоді визначення поля випромінювання у пластині зводиться, за відомих радіаційних характеристик поверхонь проміжкового шару та їх температур, до визначення поля випромінювання в одній чи двох окремих частково прозорих областях із систем двох інтегральних рівнянь щодо ефективних інтенсивностей. Відповідні потоки поглинутої та випроміненої енергії беруться до уваги в умовах теплової рівноваги (контактних умовах) з основними шарами. Тому, враховуючи такі умови, в узагальнених умовах теплообміну через проміжковий шар його можна виключити з розгляду як за визначення поля випромінювання, так і теплового стану. У випадку тонкого частково прозорого проміжкового шару його можна виключити під час визначення поля випромінювання, ввівши ефективний

коефіцієнт відбивання на уявній межі поділу основних шарів. Нехай товщина такого шару мала та набагато менша товщин основних шарів. Тоді оптична товщина шляху в ньому  $\theta_\lambda^{(0)} = a_\lambda^{(0)} h_0 \ll 1$ , а ослаблення ним випромінювання (визначається  $\theta_\lambda^{(0)}$ ) незначне, тобто  $\exp(-\theta_\lambda^{(0)}/\cos \xi) \approx 1$ . Застосувавши таке наближення в системах інтегральних рівнянь для визначення ефективних інтенсивностей випромінювання на поверхнях у частково прозорій області пластини, можна виключити з них ефективні інтенсивності  $I_\lambda^{-(0)}$ ,  $I_\lambda^{+(0)}$  випромінювання на поверхнях проміжкового шару. Тоді отримуємо:

- із системи шести рівнянь (4) для пластини з частково прозорими основними шарами систему чотирьох рівнянь

$$\begin{aligned}
 I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) - 2R_\lambda^{+(1)} \int_0^1 I_\lambda^{-(1)}(h_1, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= I_\lambda^{(s)}(\nu), \\
 I_\lambda^{-(1)}(h_1, \nu) - 2 \int_0^1 R_{ef}^{(1)}(\nu_*) I_\lambda^{+(1)}(0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu_*) d\nu_* &= \\
 = \begin{cases} \left( n_\lambda^{(1)}/n_\lambda^{(2)} \right)^2 (1 - R_\lambda^{+(2)})(1 - R_\lambda^{+(0)}) I_\lambda^{-(2)}(h, \nu) \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*20}, \\ 0, & \nu_{*20} < \nu \leq 1, \end{cases} \\
 I_\lambda^{+(2)}(h_1 + h_0, \nu) - 2 \int_0^1 R_{ef}^{(2)}(\nu_*) I_\lambda^{-(2)}(0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu_*) d\nu_* &= \\
 = \begin{cases} \left( n_\lambda^{(2)}/n_\lambda^{(1)} \right)^2 (1 - R_\lambda^{-(1)})(1 - R_\lambda^{-(0)}) I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*10}, \\ 0, & \nu_{*10} \leq \nu < 1, \end{cases} \\
 I_\lambda^{-(2)}(h, \nu) = 2R_\lambda^{-(2)} \int_0^1 I_\lambda^{+(2)}(h_1 + h_0, \nu_*) \nu_* \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu_*) d\nu_*, & \quad (12)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 R_{ef}^{(1)}(\nu) &= \begin{cases} R_\lambda^{-(1)} + R_\lambda^{-(0)} (1 - R_\lambda^{+(0)}) (1 - R_\lambda^{-(1)}) \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*10}, \\ 0, & \nu_{*10} < \nu \leq 1, \end{cases} \\
 R_{ef}^{(2)}(\nu) &= \begin{cases} R_\lambda^{+(2)} + R_\lambda^{+(0)} (1 - R_\lambda^{-(0)}) (1 - R_\lambda^{+(2)}) \exp(-\theta_\lambda^{(2)}/\nu), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*20}, \\ 0, & \nu_{*20} < \nu \leq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Виразами (12) визначаємо ефективні коефіцієнти відбивання на уявній межі поділу, з урахуванням радіаційних характеристики проміжкового й основних шарів.

Для отримання узагальнених умов теплообміну через тонкий шар (умов неідеального теплового контакту) застосуємо формальний операторний метод, який стосовно задач термомеханіки для оболонок розвинуто у працях [1-4]. Для спрощення викладок початок координат перенесено на серединну поверхню проміжкового шару  $z_* = z - h_1 - \delta$ ,  $\delta = h_0/2$ . Не наводячи перетворень, подамо такі умови для пластини за різної прозорості проміжкового шару.

А). Проміжковий шар частково прозорий:

$$2 \left( \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_*} - \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_*} \right) = C \frac{\partial (\theta_1 + \theta_2)}{\partial t} - 2 \int_{-\delta}^{\delta} Q_0 dz_*,$$

$$6 \left( \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_*} + \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_*} \right) - 12D(\theta_2 - \theta_1) = C \frac{\partial (\theta_2 - \theta_1)}{\partial t} - \frac{6}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} Q_0 dz_*.$$

Тут  $C = h_0 \rho_0 c_{\varepsilon 0}$  — приведена теплоємність проміжкового шару,  $D = \kappa_0 / 2\delta$  ( $1/D$  — термоопір).

**Б). Проміжковий шар непрозорий:**

$$2 \left[ \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_*} - \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_*} + \sigma \varepsilon^{-(0)} (n^{(2)})^2 (\theta_2 + T^{(0)})^4 - q_{abs} (h_1 + h_0) + \right. \\ \left. + \sigma \varepsilon^{+(0)} (n^{(1)})^2 (\theta_1 + T^{(0)})^4 - q_{abs} (h_1) \right] = C \frac{\partial (\theta_1 + \theta_2)}{\partial t},$$

$$6 \left[ \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_*} + \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_*} + \sigma \varepsilon^{-(0)} (n^{(2)})^2 (\theta_2 + T^{(0)})^4 - q_{abs} (h_1 + h_0) - \right. \\ \left. - \sigma \varepsilon^{+(0)} (n^{(1)})^2 (\theta_1 + T^{(0)})^4 + q_{abs} (h_1) \right] - 12D(\theta_2 - \theta_1) = C \frac{\partial (\theta_1 - \theta_2)}{\partial t}.$$

## 2. Наближені співвідношення для визначення напружень в основних шарах

Розглядаємо опроміювану нескінченну тришарову пластину, поверхні  $z = 0, h$  якої вільні від зовнішнього силового навантаження, а краї  $x, y \rightarrow \pm \infty$  закріплені одним із відомих способів [24, 26, 27]. За вихідні вибираємо співвідношення квазістатичної температурної задачі теорії пружності [24, 25]. Ключову систему рівнянь сформулюємо стосовно компонент  $\sigma_{ik}^{(j)}$  ( $i, k = x, y, z; j = \overline{0, 2}$ ) тензора напружень у шарах. Для цього використаємо рівняння рівноваги, співвідношення Дюгамеля-Неймана й обернені до них. Також умови сумісності деформацій, які в розглядуваному випадку (деформації залежать лише від координати  $z$ ) мають вигляд [25]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} = 0. \quad (13)$$

Якщо механічні:  $E_j, \nu_j$  і термомеханічні  $\alpha_i^{(j)}$  характеристики матеріалів шарів прийняти рівними їх усередненим значенням на проміжку нагріву, то, використовуючи обернені до співвідношень Дюгамеля-Неймана співвідношення й умови сумісності деформацій (13), систему рівнянь температурної задачі теорії пружності можна записати щодо компонент  $\sigma_{ik}^{(j)}$  тензорів напружень [25, 28]:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad (14)$$

де  $\phi_j(T_j, T^{(0)}) = \alpha_i^{(j)}(T_j - T^{(0)})$ .

Інтегруючи рівняння (14) з урахуванням рівнянь рівноваги та граничних умов на поверхнях пластини  $\sigma_{zz}^{(1)}(0, t) = 0$ ,  $\sigma_{zz}^{(2)}(h, t) = 0$ , знайдемо:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = -\frac{E_j}{1-\nu_j} \phi_j + C_1^{(j)} z + C_2^{(j)}, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = -\frac{E_j}{1-\nu_j} \phi_j + C_3^{(j)} z + C_4^{(j)}, \quad \sigma_{zz}^{(j)} = 0. \quad (15)$$

Сталі інтегрування  $C_k^{(j)}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) визначаємо з умов закріплення країв  $x, y \rightarrow \pm\infty$  пластини й умов механічного контакту на межах поділу складових шарів.

Розглянемо граничні умови, якщо  $x, y \rightarrow \pm\infty$ , за різних способів закріплення країв пластини [26, 27, 29]:

- обидва краї вільні від зовнішніх зусиль і моментів. Тоді

$$\int_0^{h_1} \sigma_{ll}^{(1)} dz_* + \int_{h_1}^{h_1+h_0} \sigma_{ll}^{(0)} dz_* + \int_{h_1+h_0}^h \sigma_{ll}^{(2)} dz_* = 0, \quad \int_0^{h_1} (z_* - h_1 - h_0/2) \sigma_{ll}^{(1)} dz_* + \\ + \int_{h_1}^{h_1+h_0} (z_* - h_1 - h_0/2) \sigma_{ll}^{(0)} dz_* + \int_{h_1+h_0}^h (z_* - h_1 - h_0/2) \sigma_{ll}^{(2)} dz_* = 0; \quad l = x, y. \quad (16)$$

- жорстке закріплення країв:

$$e_{ll}^{(1)} = 0, \quad e_{ll}^{(0)} = 0, \quad e_{ll}^{(2)} = 0; \quad (17)$$

- жорстке защемлення країв:

$$\int_0^{h_1} \sigma_{ll}^{(1)} dz_* + \int_{h_1}^{h_1+h_0} \sigma_{ll}^{(0)} dz_* + \int_{h_1+h_0}^h \sigma_{ll}^{(2)} dz_* = 0. \quad (18)$$

Під час дослідження напружено-деформованого стану шаруватих тіл найчастіше вважають, що шари деформуються сумісно, тобто має місце ідеальний контакт між шарами. У випадку тришарової нескінченної пластини такі контактні умови, мають вигляд [27]:

$$e_{ll}^{(1)} = e_{ll}^{(0)}, \quad e_{ll}^{(0)} = e_{ll}^{(2)}, \quad \frac{\partial e_{ll}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial e_{ll}^{(0)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial e_{ll}^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial e_{ll}^{(2)}}{\partial z}. \quad (19)$$

Отримаємо наближені вирази для напружень в основних шарах пластини за умов закріплення країв, що описуються співвідношеннями (16)-(18). Для цього перейдемо у знайдених відповідних виразах напружень (15) до границі, якщо  $h_0/2 \rightarrow 0$  зберігаючи приведені жорсткісні характеристики на згин  $g_0^* = K_{02} h_0^3 / 2$  та розтяг  $g_0 = 2K_{02} h_0$  проміжкового шару [5]. Тоді, у випадку пластини з вільними від зусиль і моментів краями, отримаємо:

$$C_1^{(1)} = \frac{6K_{12} \left[ (h_2^2 - K_{12} h_1^2) S - (2K_{12} h_1 - g_0 + h_2) P \right]}{3(h_2^2 - K_{12} h_1^2)^2 - (2K_{12} h_1^3 + g_0^* + 2h_2^3)(2K_{12} h_1 - g_0 + h_2)},$$

$$C_2^{(1)} = \frac{2K_{12} \left[ 3(h_2^2 - K_{12}h_1^2)P - (2K_{12}h_1^3 + g_0^* + 2h_2^3)S \right]}{3(h_2^2 - K_{12}h_1^2)^2 - (2K_{12}h_1^3 + g_0^* + 2h_2^3)(2K_{12}h_1 - g_0 + h_2)}.$$

За жорстко закріплених країв пластини знайдемо:  $C_1 = C_2 = 0$ , а за їх жорсткого заземлення  $C_2^{(1)} = K_{10}C$ ,  $C_2^{(2)} = K_{02}C$ ,  $C = S / (K_{10}h_1 + K_{02}h_2)$ .

**Висновки.** Отримані співвідношення для напружень доповнюють наведені вище для опису переносу випромінювання та тепла. Разом вони дають можливість використати під час дослідження термонапруженого стану за наявності тонких прошарків модель двошарової пластини за ускладнених радіаційних характеристик межі контакту та теплових контактних умов.

### Література

- [1] *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах // Физ.-хим. механика материалов. — 1967. — Т. 3, № 5. — С. 575-583.
- [2] *Шевчук В. А.* Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методы та фіз.-мех. поля. — 1995. — Т. 38. — С. 116-120.
- [3] *Подстригач Я. С., Швець Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978. — 343 с.
- [4] *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Задача теплопроводности для опроминюваних оболонок // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 3. — С. 263-267.
- [5] *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах // Защитные покрытия на металлах. — 1971. — Вып. 5. — С. 180-183.
- [6] *Оптические материалы для инфракрасной техники / Е. М. Воронкова, Б. Н. Гречушиников, Г. И. Дистлер, И. П. Петров.* — Москва: Наука, 1965. — 335 с.
- [7] *Колтун М. М.* Солнечные элементы. — Москва: Наука, 1987. — 192 с.
- [8] *Кочубей Г. С.* Потери мощности солнечных батарей высокоорбитальных космических аппаратов при длительном воздействии потоков газа, плазмы и излучения // Техническая механика. — 2004. — № 2. — С. 64-70.
- [9] *Метелкин И. И., Павлова М. А., Поздеева Н. В.* Сварка керамики с металлами. — Москва: Металлургия, 1977. — 160 с.
- [10] *Мусин Р. А., Конюшков Г. В.* Соединение металлов с керамическими материалами. — Москва: Машиностроение, 1991. — 223 с.
- [11] *Попов В. М.* Теплообмен через соединения на клеях. — Москва: Энергия, 1974. — 304 с.
- [12] *Попов В. М.* Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. — Москва: Энергия, 1971. — 258 с.
- [13] *Петров В. А., Марченко Н. В.* Перенос энергии в частично прозрачных твердых телах. — Москва: Наука. 1985. — 192 с.
- [14] *Излучательные свойства твердых материалов: Справочник / Под ред. А. Е. Шейдлина.* — Москва: Энергия, 1974. — 471 с.
- [15] *Зигель Р., Хауэлл Д.* Теплообмен излучением. — Москва: Мир, 1975. — 935 с.
- [16] *Siegel R.* Two flux Green's function analysis for transient spectral radiation in a composite // J. Thermophys. Heat Transfer. — 1996. — Vol. 10. — P. 681-688.
- [17] *Tan H. P., Wang P. Y., Xia X. L.* Transient coupled radiation and conduction in an absorbing and scattering composite layer // J. Thermophys. Heat Transfer. — 2000. — Vol. 14, No 1. — P. 77-87.
- [18] *Timoshenko V. P., Trener M. G.* A method for evaluating heat transfer in multilayer semitransparent materials // Heat Transfer-Soviet Research. — 1986. — Vol. 18. — P. 321-340.

- [19] Tsai C-F., Nixon G. Transient temperature distribution of a multilayer composite wall with effects of internal thermal radiation and conduction // Num. Heat Transfer. — 1986. — Vol. 10. — P. 95-101.
- [20] Wang P-Y., Cheng H-E., Tan H-P. Transient thermal analysis of semitransparent composite layer with an opaque boundary // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2002. — Vol. 45. — P. 425-440.
- [21] Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах / О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький. — Львів: СПОЛОН, 2007. — 184 с.
- [22] Брухаль М. Б., Терлецький Р. Ф., Турій О. П. Задачи термомеханики для облучаемых тел // Теоретическая и прикладная механика — 2012. — Вып. 4(50). — С. 30-37.
- [23] Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением: Справочник. — Москва: Энергоатомиздат, 1991. — 432 с.
- [24] Коваленко А. Д. Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.
- [25] Амензаде Ю. Ф. Теория упругости. — Москва: Высш. школа, 1976. — 272 с.
- [26] Коваленко А. Д. Избранные труды. — Киев: Наук. думка, 1976. — 764 с.
- [27] Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — Киев Наук. думка, 1977. — 248 с.
- [28] Новацкий В. Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 872 с.
- [29] Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 1: Термомеханіка багатоконпонентних тіл низької електропровідності / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький. — Львів: СПОЛОН, 2006. — 300 с.

## Modelling of thermomechanical behaviour of irradiated layered solids with thin intermediate layers considering absorption and emission of thermal radiation

Oksana Turii

*In this paper based on the phenomenological theory of radiation formulated initial relationships that describe the transfer of radiation in the irradiated double-layer plates with different components of the radiative properties in the presence of semitransparent or opaque thin layer. Obtained the generalized conditions of radiative transfer through a semitransparent intermediate layer and generalized conditions of heat transfer through an intermediate layer of arbitrary transparency allow to use to describe the processes of radiative transfer and heat in the plate in the presence of thin layers model of a two-layer plate. Approximated relations to determine the radiative characteristics, temperature and stresses in plate consisting of two layers connected by an intermediate thin layer have been developed.*

## Моделирование термоупругого состояния облучаемых слоистых тел с тонкими промежуточными слоями с учетом поглощения и излучения тепловой энергии

Оксана Турій

*В работе, на основе феноменологической теории излучения, сформулированы исходные соотношения, которые описывают перенос излучения в облучаемых двухслойных пластинах с составляющими отличающимися радиационными свойствами при наличии частично прозрачной или непрозрачной тонкой прослойки. Выведены обобщенные условия переноса излучения через частично прозрачный промежуточный слой и обобщенные условия теплообмена через промежуточный слой произвольной прозрачности, позволяющие использовать для описания процессов переноса излучения и тепла в пластине при наличии тонких прослоек модель двухслойной пластины. Найдены приближенные выражения для напряжений в основных слоях, учитывающие приведенные жесткосные характеристики на изгиб и растяжение промежуточного слоя.*

Представлено професором О. Гачкевичем

Отримано 20.03.13