УДК 517.926

Математичне моделювання вимушених коливань балки з дискретно-неперервним розподілом параметрів

Олеся Власій

ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна, 76005, e-mail: olesyav@ukr.net

У статті запропоновано й обґрунтовано метод побудови аналітичного розв'язку граничних задач для спеціального класу систем неоднорідних диференціальних рівнянь із мірами без побудови функції Гріна. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладі математичної моделі вимушених коливань консольної балки з насадженими дисками й узагальненими зовнішніми навантаженнями. Чисельний аналіз проведених розрахунків показав ефективність запропонованого апроксимаційного методу.

Ключові слова: узагальнена система диференціальних рівнянь із мірами, квазідиференціальне рівняння, вимушені коливання, точкові навантаження.

Вступ. Створення адекватних математичних моделей реальних фізичних процесів та явищ дискретно-неперервної природи призводить до дослідження неоднорідних диференціальних рівнянь з узагальненими функціями в коефіцієнтах [1-4]. Математичний апарат теорії узагальнених функцій широко застосовується у задачах будівельної механіки, квантової механіки, теплотехніки тощо для описання точкових зарядів і мас, точкових джерел тепла, зосереджених мас і моментів за допомогою дельта-функції Дірака й одиничної функції Хевісайда [5, 6]. Під час математичного моделювання вище вказаних процесів часто виникають диференціальні рівняння, які з точки зору класичної теорії розподілів є некоректними, оскільки у процесі їх дослідження виникає відома проблема множення узагальнених функцій [7]. Такі рівняння прийнято називати *квазідиференціальними*. Суттєвим поштовхом у їх дослідженні став розвиток теорії квазіпохідних [8]. Однак недостатньо вивченою залишалася проблема розробки нових і вдосконалення існуючих як аналітичних, так і чисельних методів розв'язання таких рівнянь. Оскільки вивчення квазідиференціальних рівнянь зводиться до дослідження систем квазідиференціальних рівнянь першого порядку з мірами, то у цій статті виділено широкий клас таких систем (і відповідних квазідиференціальних рівнянь), для яких вказано алгоритм побудови аналітичного розв'язку граничних задач. Застосування розробленого математичного апарату ілюструється на дослідженні математичної моделі вимушених коливань балки з насадженими дисками й узагальненими зовнішніми навантаженнями.

Позначення. $I=\left[x_0;x_n\right]\subset R$, $C_{m\times m}(I)$ — простір матриць-функцій, елементи яких є неперервними на I функціями, $C_{m\times 1}(I)=C_m(I)$; $R^{m\times m}$ — простір дійснозначних матриць розміру $m \times m$, $R^{m\times 1} = R^m$; $\Delta C(x) = C(x+0) - C(x)$ — стрибок неперервної праворуч матриці-функції в точці x; $\delta_k(x) = \delta\left(x - x_k\right)$ — функція Дірака з носієм у точці x_k; $\overline{k,l}$ — множина цілих чисел від *k* до *l*; E_p й O_p — відповідно одинична та нульова квадратна матриці *p*-ого порядку; $\Theta_k(x)$ — характеристична функція інтервалу $\left[x_k;x_{k+1}\right)$, тобто $\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[x_k;x_{k+1}\right), \\ 0, & x \notin \left[x_k;x_{k+1}\right), \end{cases}$ $x \in I; \omega_n = \left\{x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n\right\}$ — розбиття відрізка $\left[x_0;x_n\right]$; КДР — квазідиференціальне рівняння.

1. Формулювання задачі

Розглянемо узагальнену систему диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k \delta_k(x) \right) Y = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} S_k \delta_k(x), \tag{1}$$

де $Y(x)$ — невідома m-вимірна вектор-функція, $x_k \in \omega_N$, $C_k \in R^{m\times m}$, $S_k \in R^m$, $k = \overline{1,N}$; $A_k(x) \in C_{m\times m}(I)$, $R_k(x) \in C_m(I)$, $k = \overline{0,N-1}$.

Систему (1) розглядатимемо разом із початковою умовою

$$Y\left(x_0\right) = \widehat{Y}_0. \tag{2}$$

Теорема 1. [9] Якщо виконуються умови коректності

$$C_k^2 \equiv 0, \quad C_k S_k \equiv 0, \quad k = \overline{1,N}, \tag{3}$$

то розв’язок задачі (1), (2) існує та єдиний у просторі неперервних справа функцій, обмежених на *I* варіацій, причому стрибки цього розв’язку визначаються формулами:

$$\Delta Y\left(x_k\right) = C_k Y\left(x_k - 0\right) + S_k \quad \forall x_k \in I, \quad k = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Означення. Систему $Y' = \sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x)Y$ називатимемо *визначальною* для системи (1).

Вважатимемо фундаментальну матрицю $\widetilde{B}_k(x,s)$ визначальної системи, що відповідає системі (1), на інтервалі $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ відомою.

2. Аналітичне зображення розв’язку

2.1. Початкова задача. У роботі [9] отримані формули для аналітичного зображення розв’язку задачі (1), (2), однак наступна теорема дає алгоритм побудови розв’язку цієї задачі, яким зручніше користуватися на практиці.

Теорема 2. Розв’язок задачі (1), (2) можна знайти за такими рекурентними формулами:

$$Y_0(x) = \tilde{B}_0(x, x_0)\hat{Y}_0 + \int_{x_0}^{x} \tilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds, x \in \left[x_0; x_1\right); \tag{5}$$

$$Y_k(x) = \tilde{B}_k\left(x, x_k\right)\left[\tilde{C}_k Y_{k-1}\left(x_k - 0\right) + S_k\right] +$$
$$+\int_{x_k}^{x} \tilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds, \quad x \in \left[x_k; x_{k+1}\right), \quad k = \overline{1, N-1}; \tag{6}$$

$$Y_N\left(x_N\right) = \tilde{C}_N Y_{N-1}\left(x_N - 0\right) + S_N, \tag{7}$$

де $\tilde{C}_k = E + C_k$.

Доведення. Якщо $k = 0$, тобто на проміжку $\left[x_0; x_1\right)$, то система (1) не містить жодних узагальнених компонент, а є системою з неперервними коефіцієнтами. А, отже, для її розв'язку справджується формула Коші (5).

Для $k = 1$, тобто на інтервалі $\left[x_1; x_2\right)$, розв'язок системи (1) можна записати у формі Коші з невідомим початковим вектором:

$$Y_1(x) = \tilde{B}_1\left(x, x_1\right)\hat{Y}_1 + \int_{x_1}^{x} \tilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds. \tag{8}$$

Використаємо умову спряження (4) розв'язку узагальненої системи (1) у точці $x = x_1$, тобто умову $Y\left(x_1\right) = \tilde{C}_1 Y\left(x_1 - 0\right) + S_1$. Враховуючи, що $Y\left(x_1\right) = Y_1\left(x_1\right) = \hat{Y}_1$, а $Y\left(x_1 - 0\right) = Y_0\left(x_1 - 0\right)$, маємо, фактично, вираз для початкового вектора $\overline{Y}_1 = \tilde{C}_1 Y_0\left(x_1 - 0\right) + S_1$ розв'язку системи (1) на інтервалі $\left[x_1; x_2\right)$. Після його підстановки у співвідношення (8) отримуємо формулу (6) для $k = 1$:

$$Y_1(x) = \tilde{B}_1\left(x, x_1\right)\left[\tilde{C}_1 Y_0\left(x_1 - 0\right) + S_1\right] + \int_{x_1}^{x} \tilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds.$$

Для довільного $k > 1$ доведення проводиться методом математичної індукції.

2.2. Зведення крайової задачі до початкової. Систему (1) розглянемо разом із крайовими умовами:

$$PY\left(x_0\right) + QY\left(x_N\right) = U, \quad P, Q \in C^{m \times m}, \quad U \in C^m. \tag{9}$$

У роботі [10] запропоновано метод зведення крайової задачі до початкової. У нашому випадку вдається конкретизувати вказаний алгоритм.

Теорема 3. Якщо

$$\det\left[P + QB\left(x_N, x_0\right)\right] \neq 0, \tag{10}$$

то за виконання умов коректності (3) існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (9), який можна обчислити за формулами (5)-(7) з початковим вектором

$$\hat{Y}_0 = \left[P + QB\left(x_N, x_0 \right) \right]^{-1} \left[U - Q\sum_{j=1}^{N} B_N\left(x_N, x_j \right) Z_j \right], \tag{11}$$

де $B_N\left(x_N, x_j \right) = \prod_{i=0}^{N-j-1} \tilde{C}_{N-i} \tilde{B}_{N-i-1}\left(x_{N-i}, x_{N-i-1} \right)$, $Z_j = \tilde{C}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \tilde{B}_{j-1}\left(x_j, s \right) R_{j-1}(s) ds + S_j$.

Доведення. Для розв’язку початкової задачі (1), (2) в точці $x = x_N$ справджується формула [9]

$$Y\left(x_N \right) = \sum_{j=0}^{N} B_N\left(x_N, x_j \right) Z_j, \quad Z_0 = Y\left(x_0 \right) = \hat{Y}_0 .$$

Тоді

$$Y\left(x_N \right) = B_N\left(x_N, x_j \right) Y\left(x_0 \right) + \sum_{j=1}^{N} B_N\left(x_N, x_j \right) Z_j ,$$

$$QY\left(x_N \right) = QB_N\left(x_N, x_j \right) Y\left(x_0 \right) + Q\sum_{j=1}^{N} B_N\left(x_N, x_j \right) Z_j .$$

Враховуючи крайову умову (9), одержимо рівність:

$$U - PY\left(x_0 \right) = QB_N\left(x_N, x_j \right) Y\left(x_0 \right) + Q\sum_{j=1}^{N} B_N\left(x_N, x_j \right) Z_j ,$$

звідки і випливає формула (11). Виконання умови (10) забезпечує існування оберненої матриці $\left[P + QB\left(x_N, x_0 \right) \right]^{-1}$, а відтак і початкового вектора $\hat{Y}_0 = Y\left(x_0 \right)$. Таким чином, розв’язування крайової задачі (1), (9) звелося до знаходження розв’язку відповідної початкової задачі (1), (2), який згідно з теоремою 1 існує та єдиний.

3. Математичне моделювання вимушених коливань балки із зосередженими факторами

3.1. Математична модель. Нехай на консольну балку сталої жорсткості із зосередженими вантажами діє за гармонійним законом зовнішнє навантаження. Якщо вибрати вісь x так, щоб вона співпадала з прямолінійною віссю балки, а вісь y — спрямованою в сторону відхилення від положення рівноваги, то вимушені коливання такої балки моделюються таким диференціальним рівнянням [2]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[m^*(x) w(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^*(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) \right] = q(x) \sin \omega t , \tag{12}$$

де $w(x,t)$ — прогин балки в напрямку осі y; $EI(x)$ — згинна жорсткість балки (E — модуль Юнга; $I(x)$ — момент інерції в перерізі x); $q(x)$ — амплітудна функція навантаження, залежна тільки від x; ω — частота коливань навантаження, а

$$m^*(x) = m(x) + \sum_{k=1}^{N} m_k \delta_k(x), \quad \mu^*(x) = \mu(x) + \sum_{k=1}^{N} J_k \delta_k(x)$$

— погонні маса та момент інерції відповідно, причому $m(x)$ і $\mu(x)$ — неперервно розподілені маса та момент, а m_k, J_k, $k = \overline{1,N}$ — маса та момент інерції вантажу, зосередженого в перерізі $x = x_k$.

Для усталених вимушених коливань покладемо $w(x, t) = y(x)\sin(\omega t)$, де $y(x)$ — невідома амплітудна функція прогинів, для якої диференціальне рівняння (12) після розділення змінних методом Фур'є матиме вигляд:

$$\left(EIy''\right)'' - \omega^2 \left[m^* y - \left(\mu^* y'\right)' \right] = q(x).$$

Обмежимося в цьому випадку лише точковими зовнішніми навантаженнями, які моделюються виразом $q(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[P_k \delta_k(x) + M_k \delta_k'(x) \right]$, де P_k та M_k — сила та момент навантаження в перерізі $x = x_k$ [2]. У випадку сталої жорсткості матимемо:

$$y^{IV} - p^2 \left[m^* y - \left(\mu^* y'\right)' \right] = \sum_{k=1}^{N} \left[p_k \delta_k(x) + \mu_k \delta_k'(x) \right],$$

де $p = \omega / \sqrt{EI}$, $p_k = P_k / EI$, $\mu_k = M_k / EI$.

Розглянемо приклад побудови точного та наближеного розв'язку задачі, яка моделює вимушені коливання консольної балки сталої жорсткості з неперервно розподіленою масою та насадженими дисками і зазнає зовнішніх узагальнених точкових навантажень (рис. 1). Нехай математична модель коливань такої балки описується таким (квазі)диференціальним рівнянням у безрозмірних величинах:

$$y^{IV} - p^2 \left\{ \left[1 + \sum_{k=1}^{5} m_k \delta\left(x - x_k^*\right) \right] y - \left[\sum_{k=1}^{5} J_k \delta\left(x - x_k^*\right) y' \right]' \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} \left[p_k \delta_k \left(x - x_k^*\right) + \mu_k \delta_k' \left(x - x_k^*\right) \right], \tag{13}$$

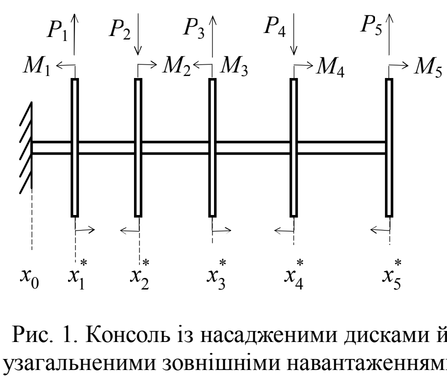

Рис. 1. Консоль із насадженими дисками й узагальненими зовнішніми навантаженнями

де p — натуральний параметр; $x_1^* = l/8$, $x_2^* = l/4$, $x_3^* = l/2$, $x_4^* = 3l/4$, $x_5^* = l$; $m_k = m = 0,25$, $R_k = R = 0,2$, $J_k = J = mR^2$, $k = \overline{1,5}$, $p_1 = -0,5$, $p_2 = 3$, $p_3 = -4$, $p_4 = 1,5$, $p_5 = -1$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = -1$, $\mu_4 = 0,5$, $\mu_5 = 2$.

Квазіпохідні для рівняння (13) вводимо за формулами

$$y^{[1]} = y', \ \ y^{[2]} = y'', \ \ y^{[3]} = -\left(y^{[2]}\right)' - p^2 \sum_{k=1}^{4} J\delta\left(x - x_k^*\right) y' + \sum_{k=1}^{4} \mu_k \delta\left(x - x_k^*\right). \quad (14)$$

Зауважимо, що квазіпохідні мають певний механічний зміст: $y(x)$ — прогин балки; $y^{[1]}(x)$ — кут повороту; $y^{[2]}(x)$ — момент; $y^{[3]}(x)$ — перерізуюча сила.

Умови консольного закріплення балки запишемо у вигляді крайових умов:

$$y(0) = y'(0) = y^{[2]}(l) = y^{[3]}(l) = 0. \quad (15)$$

3.2. Побудова точного розв'язку. Квазідиференціальне рівняння (13) за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\mathrm{T}}$ зводимо до системи

$$Y' = \left[A + \sum_{k=1}^{5} C_k \delta\left(x - x_k^*\right) \right] Y + \sum_{k=1}^{5} S_k \delta\left(x - x_k^*\right), \quad (16)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -p^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^2 J & 0 & 0 \\ -p^2 m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_k \\ -p_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,5}.$$

Для системи (16) крайові умови, відповідні умовам (15), матимуть вигляд:

$$PY(0) + QY(l) = 0, \quad P = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Визначальною для системи (16) буде система $\tilde{Y}' = A\tilde{Y}$, якій відповідає визначальне рівняння $\tilde{y}^{IV} - p^2 \tilde{y} = 0$. Функція Коші $\tilde{K}(x,s)$ визначального рівняння (тобто функція, яка за змінною x задовольняє це рівняння та справджує умови $K(s,s) = K^{[1]}(s,s) = K^{[2]}(s,s) = 0$, а $K^{[3]}(s,s) = 1$ у термінах квазіпохідних (14)) обчислюється за формулою $\tilde{K}(x,s) = \left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\} \Big/ \left(10\sqrt{p}\right)$. Нехай $\tilde{B}(x,s) = \left(\tilde{b}^{ij}\right)_{i,j=1}^{4}$ — фундаментальна матриця визначальної системи $\tilde{Y}' = A\tilde{Y}$. Враховуючи вигляд квазіпохідних (14) і структуру фундаментальної матриці, побудуємо $\tilde{B}(x,s)$:

$$\tilde{b}^{11} = \tilde{b}^{22} = \tilde{b}^{33} = \tilde{b}^{44} = \left\{\cos\left[\sqrt{p}(x-s)\right] + \mathrm{ch}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2,$$

$$\tilde{b}^{12} = \tilde{b}^{23} = \left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] + \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/\left(2\sqrt{p}\right),$$

$$\tilde{b}^{13} = \left\{\mathrm{ch}\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \cos\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/\left(2p\right),$$

$$\tilde{b}^{14} = \left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/\left(2p\sqrt{p}\right),$$

$$\tilde{b}^{21} = \tilde{b}^{32} = \sqrt{p}\left\{\mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2,$$

$$\tilde{b}^{24} = \left\{\cos\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \mathrm{ch}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/\left(2p\right),$$

$$\tilde{b}^{31} = p\left\{\mathrm{ch}\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \cos\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2,$$

$$\tilde{b}^{34} = -\left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] + \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/\left(2\sqrt{p}\right),$$

$$\tilde{b}^{41} = -p\sqrt{p}\left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] + \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2,$$

$$\tilde{b}^{42} = p\left\{\cos\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \mathrm{ch}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2,$$

$$\tilde{b}^{43} = \sqrt{p}\left\{\sin\left[\sqrt{p}(x-s)\right] - \mathrm{sh}\left[\sqrt{p}(x-s)\right]\right\}\Big/2.$$

Скористаємося *теоремою 3* для знаходження розв’язку задачі (16), (17), перша координата якого і буде розв’язком задачі (13), (15). Внаслідок громіздкості формул для розв’язку ми їх наводити не будемо, а скористаємося ними для визначення похибки за наближеного розв’язання задачі (13), (15). Графік точного розв’язку зображено на рис. 2.

3.3. Побудова наближеного розв’язку. Для чисельного розв’язання узагальнених КДР використовуються методи L- та D-апроксимації [12]. Для ілюстрації методу D-апроксимації знайдемо наближений розв’язок попередньої задачі для балки зі змінною розподіленою масою $m(x) = 1 + cx^2$:

$$y^{IV} - p^2\left\{\left[1 + cx^2 + \sum_{k=1}^{5} m_k \delta\left(x - x_k^*\right)\right]y - \left[\sum_{k=1}^{5} J_k \delta\left(x - x_k^*\right)y'\right]'\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{5}\left[p_k \delta_k\left(x - x_k^*\right) + \mu_k \delta'_k\left(x - x_k^*\right)\right], \qquad (18)$$

значення коефіцієнтів і крайові умови — такі ж, як у задачі (13), (15).

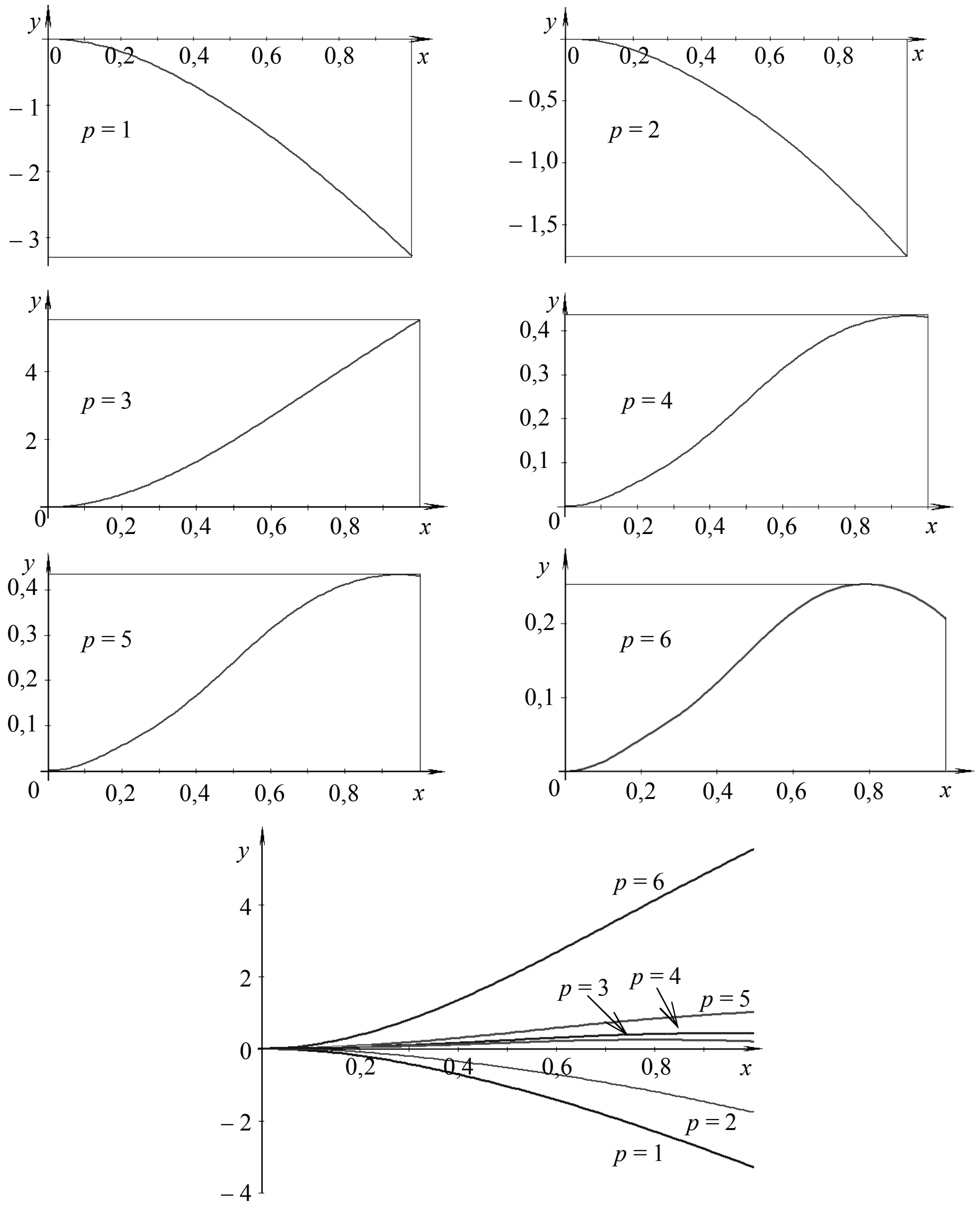

Рис. 2. Форми вимушених коливань балки за різних значень параметра *p*

Квазіпохідні вводимо за формулами (14) і за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\mathrm{T}}$ КДР (18) зводимо до системи

$$Y' = \left[A + \sum_{k=1}^{5} C_k \delta\left(x - x_k^*\right) \right] Y + \sum_{k=1}^{5} S_k \delta\left(x - x_k^*\right), \tag{19}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -p^2\left(1+cx^2\right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^2 J & 0 & 0 \\ -p^2 m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad S_k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_k \\ -p_k \end{pmatrix},\quad k=\overline{1,5}.$$

Для системи (19) крайові умови мають вигляд (17).

На відрізку $[0;1]$ введемо сітку $\omega_n=\{0\equiv x_0<x_1<\ldots x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{n-1}\equiv 1\}$, $n\in N$, так, щоб точки $x_k^*,\ k=\overline{1,4}$, входили у розбиття. Позначимо $\omega^*=$ $=\left\{x_k^*, k=\overline{1,5}\right\}$ — множину носіїв узагальнених коефіцієнтів вихідного рівняння (13). Розташування точок зосередження мас дозволяє вибрати рівномірну сітку ω_n із кроком $h=1/n$. До коефіцієнта a_{41} матриці A застосуємо D-апроксимацію, тобто на кожному інтервалі $\left[x_k;x_{k+1}\right), k=\overline{0,n-1}$, функцію $b_{41}=\int\limits_0^x\left(1+at^2\right)dt=$ $=cx^3/3+x$ апроксимуємо сталою функцією $b_{41}^k=b_{41}\left(x_k\right)=cx_k^3/3+x_k$. Тоді на всьому інтервалі $\left[x_0;x_n\right]$ коефіцієнт a_{41} матриці A апроксимується таким чином:

$$a_{41}\approx p^2\sum_{i=1}^{n}\left(b_{41}^k-b_{41}^{k-1}\right)\delta\left(x-x_k\right)=p^2\sum_{i=1}^{n}h_k\delta\left(x-x_k\right),$$

де $h_k=c\left(\dfrac{x_k^3-x_{k-1}^3}{3}\right)+x_k-x_{k-1}$.

Отримаємо апроксимацію системи (19):

$$Y_n'=\left[A_n+\sum_{k=1}^{n}C_k^n\delta\left(x-x_k\right)\right]Y_n+\sum_{k=1}^{5}S_k\delta\left(x-x_k^*\right). \tag{20}$$

Тут $Y_n(x)=\left(y_n, y_n^{[1]}, y_n^{[2]}, y_n^{[3]}\right)^{\mathrm{T}}$ — невідома вектор-функція,

$$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_k^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^2 mR^2 & 0 & 0 \\ -p^2 m_k^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad m_k^*=\begin{cases} h_k, & x_k\notin\omega^*; \\ h_k+m, & x_k\in\omega^*. \end{cases}$$

Систему (20) розглядаємо з крайовими умовами, що відповідають (17):

$$PY_n(0)+QY_n(l)=0. \tag{21}$$

Зазначимо, що в цьому випадку задача (13), (15) апроксимується крайовою задачею для виродженого КДР:

$$y_n^{IV}-p^2\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k^*\delta_k(x)\right)y_n-\left[\sum_{k=1}^{4} J\delta\left(x-x_k^*\right)y_n'\right]'\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\left[p_k\delta\left(x-x_k^*\right)+\mu_k\delta'\left(x-x_k^*\right)\right], \tag{22}$$

$$y_n(0)=y_n'(0)=y_n^{[2]}(l)=y_n^{[3]}(l)=0\,. \tag{23}$$

Для системи (20) визначальна система [12] має елементарний вигляд $\tilde{Y}_n'=A_n\tilde{Y}$, відповідне їй визначальне рівняння є виродженим, тому фундаментальна матриця $\tilde{B}_n(x,s)$ визначальної системи на всьому проміжку $[0;1]$ має вигляд [13]:

$$\tilde{B}_n(x,s)=\begin{pmatrix} 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} & \frac{(x-s)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x-s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відтак за *теоремою 3* знаходимо розв'язок $Y_n(x)$ задачі (20), (21).

Запропонована апроксимація задовольняє всі умови теореми про збіжність [11, с. 250], а тому розв'язок $Y_n(x)$ задачі (20), (21) буде покоординатно збігатися до розв'язку $Y_n(x)$ задачі (19), (17). Внаслідок цього збігається не тільки розв'язок $y_n(x)$ задачі (22), (23) до розв'язку $y(x)$ задачі (18), (15), але й забезпечується збіжність усіх його квазіпохідних $y_n^{[i]}(x)$ до відповідних квазіпохідних $y^{[i]}(x)\,, i=\overline{1,3}$. Отримані результати наведені для кількості точок поділу відрізка $[0;1]$ на 2^{15} частин. Зауважимо, що для $c=0$ ми отримаємо задачу, точний розв'язок якої знайшли в попередньому пункті. Аналіз числових результатів показав, що для $c=0$ та конкретних значень параметра p (було вибрано $p=\overline{1,6}$) точність розв'язку досягається 10^{-5}. Наближені розв'язки задачі (18), (15) (тобто наближені форми вимушених коливань балки) за різних значень параметрів p і c наведені на рис. 3.

Висновки. У статті запропоновано метод побудови аналітичного розв'язку початкової та крайової задач для неоднорідних узагальнених систем із мірами без побудови функції Гріна. Дослідження таких задач є актуальне, оскільки математичне моделювання фізичних процесів і явищ дискретно-неперервної природи призводить до формулювання та розв'язання крайових задач для квазідиференціальних

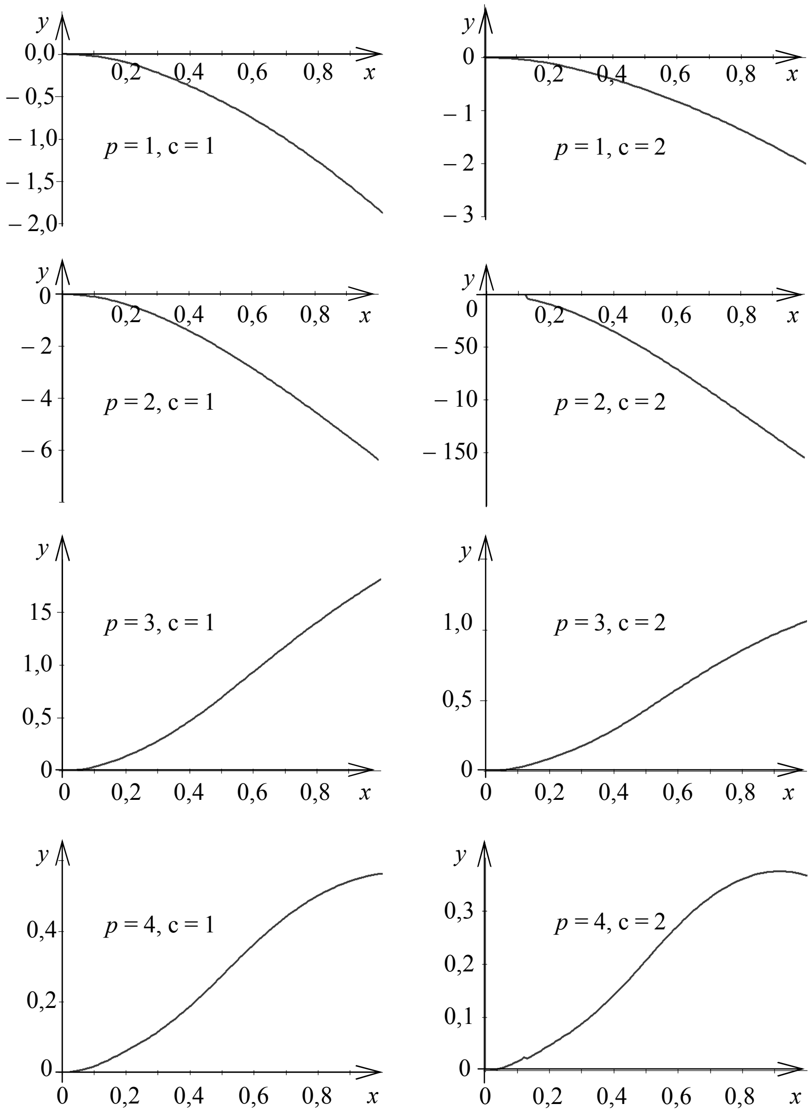

Рис. 3. Наближені форми вимушених коливань балки для різних значень параметрів p та c

рівнянь, вивчення яких зводиться саме до вивчення узагальнених систем такого вигляду. На прикладі вимушених коливань консольної балки з насадженими дисками й узагальненими зовнішніми навантаженнями проілюстровано застосування чисельного методу розв’язання КДР — методу D-апроксимації. У нашому випадку цей метод можна трактувати як наближення рівномірно розподіленої маси балки системою точкових мас. Проведено чисельний аналіз отриманих результатів, який свідчить про ефективність запропонованого методу.

Література

[1] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями: пер. с нем. — Москва: Наука, 1968. — 503 с.
[2] *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — Москва: Машиностроение, 1973. — 659 с.
[3] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / *К. Я. Кухта, А. Г. Бойко, Н. З. Гармаш* и др.; отв ред. *И. И. Ляшко*. — Киев: Наук. думка, 1981. — 272 с.
[4] *Гащук П., Зорій Л.* Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. — Львів: Укр. технол., 1999. — 372 с.
[5] *Корнеев С. А.* Техническая теория стержней. Применение обобщенных функций для решения задач сопротивления материалов: уч. пособие. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. — 84с.
[6] Oscillations of a string with concentrated masses / *B. J. Gomez, C. E. Repetto, C. R. Stia, R. Welti* // European Journal of Physics, 2007. — No 28. — P. 961-975.
[7] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — Москва: Наука, 1979. — 320 с.
[8] *Тацій Р., Стасюк М., Мазуренко В.* Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 10. — С. 7-37.
[9] *Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М.* Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. — 2009. — № 660 — С. 34-38.
[10] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем: пер. с рум. — Москва: Мир, 1971. — 312 с.
[11] *Таций Р. М., Пахолок Б. Б.* О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 4. — С. 25-28.
[12] Узагальнені квазідиференціальні рівняння / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій.* — Дрогобич: Коло, 2011. — 301 с.
[13] Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій, М. Живічинські* // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. — 2007. — № 601. — С. 18-27.

Mathematical modelling of forced beam oscillation with discrete-continuous distribution of parameters

Olesya Vlasij

The paper proposed an algorithm for constructing of the analytical solution of initial and boundary value problems for a special class of generalized systems with measures without constructing of Green's function. Application of the results illustrated by the mathematical model of forced oscillations of the cantilever beam with fitted discs and generalized external loads. Numerical analysis of the calculations showed the effectiveness of the proposed approximation method.

Математическое моделирование вынужденных колебаний балки с дискретно-непрерывным распределением параметров

Олеся Власий

В статье предложен и обоснован метод построения аналитического решения граничных задач для специального класса неоднородных обобщенных систем с мерами без построения функции Грина. Применение полученных результатов иллюстрируется примером математического моделирования вынужденных колебаний консольной балки с насажденными дисками и обобщенными внешними нагрузками. Численный анализ проведенных расчетов показал эффективность предложенного аппроксимационного метода.

Представлено доктором технічних наук О. Чернухою Отримано 20.11.12