

## Моделювання стохастичних дифузійних потоків у двофазній багат шаровій смугі з ймовірним розташуванням включень у середині тіла

Анастасія Давидок

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: davydoka@gmail.com

*Досліджено дифузійний потік домішки у двофазній багат шаровій смугі, область найбільш ймовірного розташування шаруватих включень у якій знаходиться в середині тіла. Крайову задачу сформульовано для функції випадкового потоку маси за умов підтримання сталого потоку на верхній поверхні тіла та нульової концентрації домішки на нижній межі. Одержано розрахункові формули для дифузійного потоку, усередненого за ансамблем конфігурацій фаз за часткового випадку  $\beta$ -розподілу за нульової та ненульової сталої початкових концентрацій. Визначено залежність усередненого потоку домішки від характеристик середовища. Показано, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, ущільнення включень у середині тіла призводить до зростання дифузійного потоку в околі концентрації включень.*

**Ключові слова:** випадковий дифузійний потік, двофазна шарувата смуга, ряд Неймана, усереднення за ансамблем конфігурацій фаз,  $\beta$ -розподіл.

**Вступ.** Моделювання процесів масоперенесення у багатофазних неоднорідних тілах вимагає дослідження впливу просторово стохастично розташованих включень. Важливою характеристикою процесу перенесення маси, разом із хімічним потенціалом і концентрацією частинок, є дифузійний потік. Проте використання апарату усереднення під час дослідження цієї характеристики може викликати труднощі, пов'язані з тим, що невідомими є функції кореляції градієнта випадкового поля концентрації та стохастичного коефіцієнта дифузії. З метою вирішення цієї проблеми у працях [1-3] балансові рівняння для пористих тіл складають для гомогенізованих середовищ, у яких фізичними характеристиками є усереднені величини, що враховують відмінності між фазами, але при цьому нехтують взаємодією між ними. У роботі [4] стохастичний потік запропоновано визначати за законом Дарсі, коефіцієнт фільтрації якого є функцією просторової координати. Для одержання розв'язку задачі використовують методи малих збурень і згладжування (з відповідними обмеженнями), за умови нормального розподілу фаз у середовищі. При цьому усереднений потік рівний нулю, і запропонований підхід дозволяє визначити тільки двоточкову функцію коваріації. У роботах [5-7] запропоновано досліджувати випадковий потік маси в багатофазних випадково неоднорідних

тілах на основі рівняння дифузії для функції потоку. З метою уникнення протиріч, наприклад, коли в обмежене тіло надходить необмежена кількість речовини (потік на верхній межі більший, ніж на нижній), на одній із поверхонь задають граничну умову на потік, а на іншій — на функцію концентрації. Такий підхід дозволяє випадкове поле подати у вигляді ряду Неймана та проводити процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз із заданою функцією розподілу. Зокрема, у працях [6, 7] розглянуто випадки рівномірного розподілу включень у тілі. У цій роботі прийнято, що включення розташовані за частинним випадком  $\beta$ -розподілу, що відповідає структурі з включеннями, сконцентрованими в середині тіла.

### 1. Об'єкт дослідження та постановка задачі для функції потоку

У смузі товщини  $z_0$ , що складається з  $n_0$  підшарів фази  $j=0$  (матриця) та  $n_1$  підшарів фази  $j=1$  (включення), дифундує домішкова речовина. Координати розташування підшарів є невідомими, об'ємна частка базової фази  $v_0$  набагато більша за об'ємну частку включення  $v_1$ , а коефіцієнти дифузії є сталими у межах кожної з фаз. Вважаємо, що область найбільш ймовірного розташування шаруватих включень міститься в середині тіла, при цьому на обидвох границях тіла з ймовірністю 1 знаходиться матриця (рис. 1а). Для опису такої випадкової структури використано частинний випадок  $\beta$ -розподілу включень [8]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0], \end{cases} \quad (1)$$

коли  $\alpha = \beta \geq 1,5$ . Тут  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  — Гама-функція [9];  $\alpha, \beta$  — ступені вільності ймовірного  $\beta$ -розподілу.

На рис. 1б наведено характерні густини розподілу (1) за таких значень ступенів вільності:  $\alpha = \beta = 1,5; 2; 2,5; 2,7$  (криві 1-4). Зазначимо, що збільшення параметра  $\alpha$  призводить до ущільнення включень у середині тіла, при цьому область найбільш ймовірного розташування включень звужується.

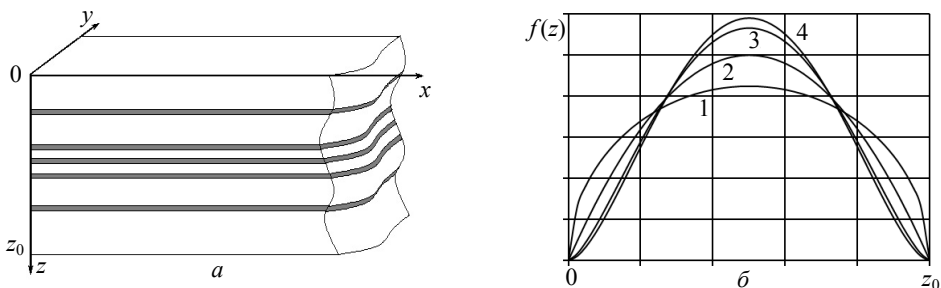


Рис. 1. Можлива реалізація випадково неоднорідної структури (а) та густина розподілу  $f(z)$  (б)

В одновимірному за просторовою координатою випадку рівняння дифузії домішки, сформульоване для функції потоку маси у багатофазному тілі, має вигляд [5]

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Тут  $J(z,t)$  — випадковий потік маси;  $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0 \\ D_1, & z \in \Omega_1 \end{cases}$  — стохастичний коефіцієнт дифузії,  $\Omega_j$  — область  $j$ -ої фази ( $j = 0, 1$ ).

Нехай у початковий момент часу відсутній дифузійний потік у тілі. На границі  $z = 0$  потік є сталий, а на нижній поверхні смуги  $z = z_0$  концентрація дорівнює нулю, при цьому дифузійний потік на цій межі дорівнює деякій функції  $F(t)$ , яку необхідно визначити додатково. Тобто задано такі крайові умови:

$$J(z,t)|_{t=0} = 0; \quad (3)$$

$$J(z,t)|_{z=0} = J_* \equiv const, \quad J(z,t)|_{z=z_0} = F(t). \quad (4)$$

Умова на потік (3) означає, що в початковий момент часу концентрація домішки може бути як нульовою, так і сталою відмінною від нуля. Тут розглядаються обидва випадки.

## 2. Еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння. Ряд Неймана

Задачу (2)-(4) зведемо до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння. Для цього введемо випадкову «функцію структури», що не залежить від фізичних характеристик середовища та задовольняє умову суцільності тіла [10, 11]:

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}; \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(z) = 1,$$

де  $\Omega_{ij}$  —  $i$ -а однозв'язна область  $j$ -ої фази,  $\Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}$ .

Коефіцієнт дифузії подамо через функцію  $\eta_{ij}$  у вигляді

$$D(z) = \sum_{i=1}^{n_0} D_0 \eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1 \eta_{i1}(z).$$

Якщо підставити таке подання  $D(z)$  у рівняння (2), позначити оператори

$$L(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \left( \sum_{i=1}^{n_0} D_0 \eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1 \eta_{i1}(z) \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L_0(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

то, з урахуванням умови суцільності тіла, рівняння дифузії можна подати так

$$L_0(z,t)J(z,t) = L_s(z,t)J(z,t). \quad (5)$$

Тут  $L_s(z) = L_0(z,t) - L(z,t) = (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Неоднорідність структури тіла розглядаємо як внутрішні джерела. Тоді розв'язок крайової задачі (3)-(5) можна подати як суму розв'язку однорідної крайової задачі  $J_0(z, t)$  та згортки функції Гріна  $G(z, z', t, t')$  із джерелом:

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt'. \quad (6)$$

Функція Гріна має вигляд [6]:

$$G(z, z', t, t') = \frac{\theta(t-t')}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t-t')} \left\{ \cos[y_k(z-z')] - \cos[y_k(z+z')] \right\}, \quad (7)$$

де  $y_k = k\pi/z_0$ ;  $\theta(t-t')$  — одинична сходинова функція Хевісайда.

Щоб знайти розв'язок однорідної крайової задачі, необхідно визначити значення функції потоку на границі  $z = z_0$ . Для цього розв'язуємо крайову задачу для функції концентрації  $C(z, t)$  і застосовуємо перший закон Фіка.

За умови нульової початкової концентрації  $C(z, t)|_{t=0} = 0$  отримаємо:

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} = F(t) = J_* \left( 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \right),$$

а для  $C(z, t)|_{t=0} = C_* \equiv const$  вираз для потоку на границі  $z = z_0$  буде таким

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right).$$

Враховуючи відповідні значення функції потоку на нижній поверхні тіла, знайдемо розв'язок задачі

$$\frac{\partial J_0(z, t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 J_0(z, t)}{\partial z^2};$$

$$J_0(z, t)|_{t=0} = 0; \quad J_0(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv const, \quad J_0(z, t)|_{z=z_0} = F(t).$$

При цьому за нульової початкової концентрації одержимо

$$J_0(z, t) = J_* \left[ 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) \right], \quad (8)$$

де  $\xi_n = \pi(2n-1)/2z_0$ .

У випадку сталі ненульової початкової концентрації:

$$J_0(z, t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left[ J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right] \sin(\xi_n z). \quad (9)$$

Методом послідовних ітерацій [12] знайдено розв'язок інтегро-диференціального рівняння (6) у вигляді ряду Неймана

$$\begin{aligned}
 J(z, t) = & J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' + \\
 & + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' + \\
 & + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') \times \\
 & \times \int_0^{t''} \int_0^{z_0} G(z'', z''', t'', t''') L_s(z''') J_0(z''', t''') dz''' dt''' dz'' dt'' dz' dt' + \dots
 \end{aligned} \quad (10)$$

Ряд (10) є абсолютно та рівномірно збіжний, якщо коефіцієнти дифузії є обмежені [11]:  $D_0, D_1 \leq K < \infty$  і  $D_0 \neq 0$ . Перший член ряду (10) визначає дифузійний потік в однорідному шарі з фізичними характеристиками матриці, другий доданок є сумою збурень потоку, що виникають у разі вміщення в тіло включень із характеристиками, відмінними від характеристик матриці. Третій доданок описує ефекти парного взаємовпливу включень на потік маси, що виникають, якщо в однорідне тіло з характеристиками матриці по чергово поміщати по два включення з іншими фізичними характеристиками, і т. д.

### 3. Усереднення дифузійного потоку за ансамблем конфігурацій фаз

Обмежившись двома першими членами ряду Неймана (10), проведемо усереднення за ансамблем конфігурацій фаз із функцією розподілу (1), якщо  $\alpha = \beta \geq 1,5$ . Припускаємо, що прошарки мають характерну товщину  $h_1$ , а випадковою величиною є координата верхньої межі прошарку  $z_1$ . Тоді

$$\langle J(z, t) \rangle_{conf} = \langle J_0(z, t) \rangle_{conf} + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \langle L_s(z') \rangle_{conf} J_0(z', t') dz' dt'. \quad (11)$$

Зазначимо, що  $\langle J_0(z, t) \rangle = J_0(z, t)$ ,  $\langle L_s(z') \rangle = (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle \partial^2 / \partial z'^2$ .

Усереднення останнього виразу отримано у вигляді

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle &= \frac{Bv_1}{h_1 z_0^{\alpha-2}} z_2'^{\alpha} F_1 \left( \alpha, 1 - \alpha; 1 + \alpha; \frac{z'}{z_0} \right) \quad \text{для } z' \leq h_1; \\
 \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle &= \frac{Bv_1}{h_1 z_0^{\alpha-2}} \left[ z_2'^{\alpha} F_1 \left( \alpha, 1 - \alpha; 1 + \alpha; \frac{z'}{z_0} \right) - \right. \\
 &\left. - (z' - h_1)^{\alpha} {}_2 F_1 \left( \alpha, 1 - \alpha; 1 + \alpha; \frac{z' - h_1}{z_0} \right) \right] \quad \text{для } z' \geq h_1,
 \end{aligned}$$

де  $B = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\alpha\Gamma^2(\alpha)}$ ,  ${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!}$  — гіпергеометрична функція,

$$(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1), \quad (a)_0 = 1.$$

Підставляючи одержані співвідношення в рівняння (11), отримаємо усереднену за ансамблем конфігурацій фаз формулу дифузійного потоку домішки у двофазній багаточаровій смузі з частинним випадком  $\beta$ -розподілу включень

$$\begin{aligned} \langle J(z,t) \rangle &= J_0(z,t) + \frac{(D_1 - D_0)Bv_1}{z_0^{\alpha-2}h_1} \int_0^t \left[ \int_0^{z_0} z'^{\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, 1-\alpha; 1+\alpha; \frac{z'}{z_0}\right) \times \right. \\ &\times G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' - \int_{h_1}^{z_0} (z' - h_1)^{\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, 1-\alpha; 1+\alpha; \frac{z' - h_1}{z_0}\right) \times \\ &\left. \times G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' \right] dt'. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи у співвідношення (12) вирази для функції Гріна (7) і для потоку маси в однорідній смузі за нульової (8) і ненульової сталої (9) початкових концентрацій, отримаємо відповідні розрахункові формули:

для нульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{\langle J(z,t) \rangle}{J_*} &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0)v_1 B}{D_0 z_0^{\alpha} h_1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right) A_{kn} \sin(y_k z); \end{aligned} \quad (13)$$

для ненульової сталої початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{\langle J(z,t) \rangle}{J_*} &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( \frac{1}{\xi_n} + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0)v_1 B}{D_0 z_0^{\alpha} h_1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right) \left( 1 + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \xi_n \right) A_{kn} \sin(y_k z), \end{aligned} \quad (14)$$

де  $A_{kn} = f(0, 0, x_{kn}^-) - f(0, 0, x_{kn}^+) - f(h_1, 0, x_{kn}^-) + f(h_1, 0, x_{kn}^+) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\dots(m-\alpha)}{z_0^m m!(m+\alpha)} \times$   
 $\times f(0, m, x_{kn}^-) - f(0, m, x_{kn}^+) - f(h_1, m, x_{kn}^-) + f(h_1, m, x_{kn}^+)$ ,  $x_{kn}^{\pm} = y_k \pm \xi_n$ , а  $f(a, b, p) =$   
 $= \int_a^{z_0} (z-a)^{\alpha+b} \cos(pz) dz$ .

Дослідимо вплив параметрів задачі на поведінку усередненого дифузійного потоку.

#### 4. Числові дослідження усередненого дифузійного потоку

На рис. 2-5 показані характерні розподіли усереднених потоків залежно від різних значень параметрів задачі. Розрахунки проведено у безрозмірних змінних [13]  $\eta = z/z_0$ ,  $\tau = D_0 t / z_0^2$  для випадків нульової (рис. а) та ненульової сталої (рис. б) початкових концентрацій. За базові значення характеристик прийнято такі:  $\tau = 0,1$ ;  $\nu_1 = 0,2$ ;  $h_1 = 0,01$ ;  $C^*/J^* = 0,1$  і  $\alpha = \beta = 2,5$ . На рис. 2-4 криві а наведені для  $D_1/D_0 = 0,01$ , криві б —  $D_1/D_0 = 10$ . Штриховою лінією позначено відповідні потоки в однорідному шарі.

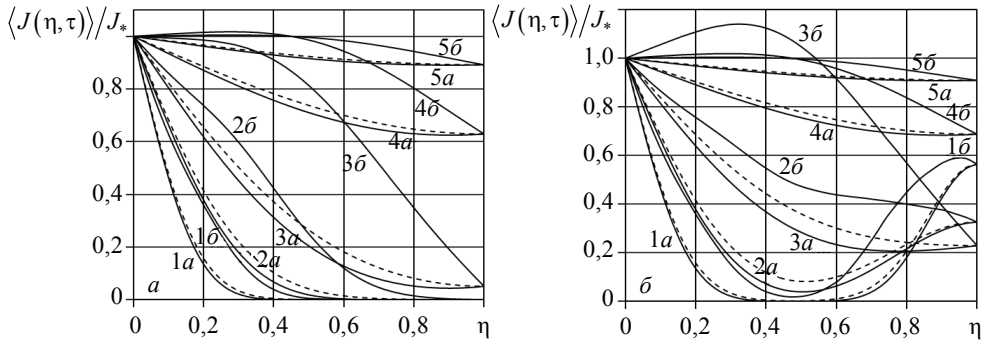


Рис. 2. Розподіли потоків маси у смузі в різні моменти безрозмірного часу

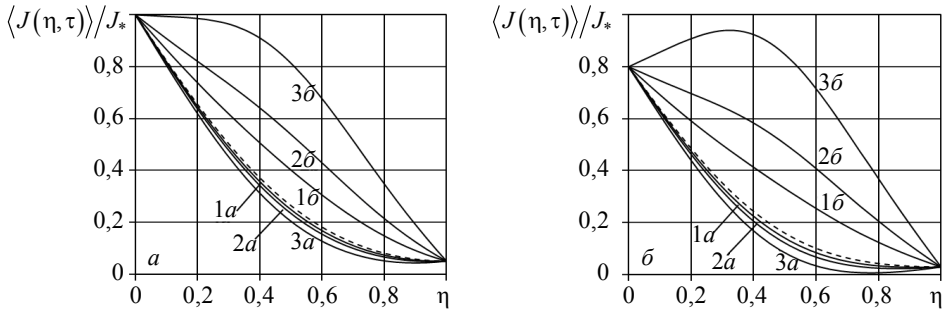


Рис. 3. Розподіли потоків маси у смузі для різних значень об'ємної частки включень

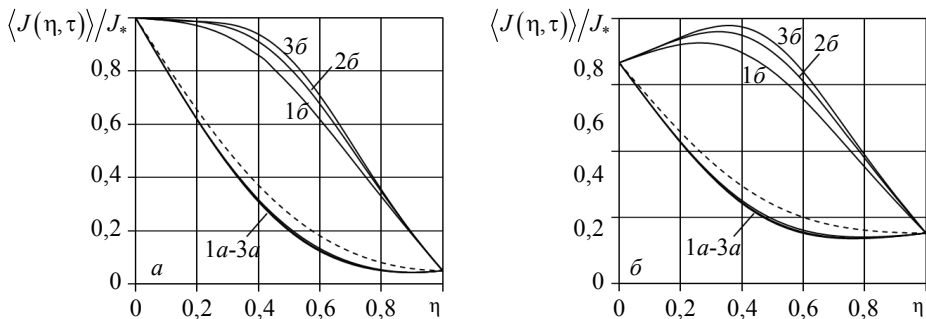


Рис. 4. Залежність потоків маси у смузі від ступенів вільності розподілу  $f(z)$

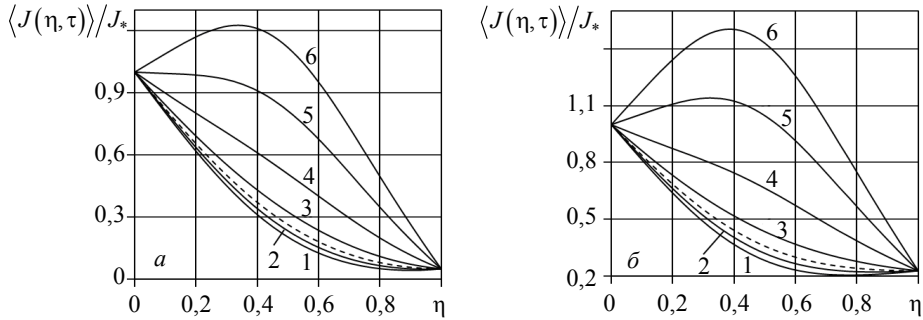


Рис. 5. Розподіли потоків маси у смузі для різних значень відношення  $D_1/D_0$

На рис. 2 проілюстровано розподіли усереднених потоків маси в різні моменти безрозмірного часу:  $\tau = 0,01; 0,03; 0,1; 0,5; 1$  (криві 1-5). На рис. 3 показано поведінку усередненого дифузійного потоку маси для різних значень об'ємної частки включень:  $v_1 = 0,05; 0,1; 0,2$  (криві 1-3). На рис. 4 наведено розподіли функції потоку залежно від параметрів:  $\alpha = \beta = 1,5; 2,5; 3,5$  (криві 1-3). На рис. 5 показано розподіли потоків маси у смузі за різних значень відношення коефіцієнтів дифузії  $D_1/D_0 = 0,01; 0,5; 2; 5; 10; 15$  (криві 1-6 відповідно).

Зазначимо, що наявність шаруватих включень у середині шару може впливати як на поведінку функції усередненого потоку, так і на його значення (рис. 2-5). За нульової початкової концентрації, якщо  $D_1 < D_0$ , розподіли потоків є монотонно спадні функції (криві *a*, рис. 2*a*). У випадку ненульової сталої початкової концентрації для малих часів дифузійний потік від границі  $z = 0$  спадає, в середині шару є близьким до нуля, і стрімко зростає біля границі  $z = z_0$  (криві 1 на рис. 2*b*). Із збільшенням часу протікання процесу дифузії, якщо  $D_1 > D_0$ , функція потоку стає опуклою вгору (криві 3*b*-5*b*, рис. 2). У подальшому цей максимум зменшується та пропадає під час наближення до стаціонарного режиму. Зазначимо, що потоки в однорідній та неоднорідній смугах на границях шару співпадають.

Збільшення об'ємної частки включень для  $D_1 < D_0$  веде до зменшення величини усередненого потоку маси (криві *a*, рис. 3), а для  $D_1 > D_0$  — до збільшення значень потоку стосовно потоку в однорідному шарі (криві *b*, рис. 3). Величина початкової концентрації в тілі впливає як на поведінку, так і на значення функції потоку домішкової речовини. Для малих значень відношення  $C_*/J_*$  потік домішки як в однорідному шарі, так і у багат шаровій смузі, є монотонно спадною функцією. За збільшення початкової концентрації  $C_*$  потік біля поверхні шару  $z = z_0$  зростає, що може призвести до появи локального мінімуму в середині шару. Збільшення ступенів вільності розподілу  $f(z)$  (ущільнення включень) для  $D_1 < D_0$  практично не впливає на значення та поведінку потоку маси (криві *a*, рис. 4). Якщо ж коефіцієнт дифузії включення більший від коефіцієнта дифузії матриці, то ущільнення включень призводить до зростання усередненого потоку як для нульової, так і для ненульової сталої початкових концентрацій (криві *b*, рис. 4).

Якщо коефіцієнт дифузії у включенні менший за коефіцієнт дифузії матриці, то потік у неоднорідній смузі завжди менший, ніж в однорідній структурі



(криві 1-2, рис. 5); у протилежному випадку — усереднений потік у багатошаровій смузі більший, ніж в однорідній (криві 3-6, рис. 5). Збільшення відношення  $D_1/D_0$  призводить до зростання потоку, причому в середині шару значення усередненого потоку можуть стати більшими за його значення на верхній поверхні смуги. Зокрема, для ненульової початкової концентрації цей ефект спостерігається за менших значень відношення  $D_1/D_0$  (криві 5-6, рис. 5б). Така ситуація пояснюється одночасним зростанням потоку через нижню межу смуги.

**Висновки.** Досліджено випадкові дифузійні потоки у двофазному багатошаровому випадково неоднорідному тілі за умови, що включення зосереджені в середині тіла. Для опису такої структури використано частинний випадок  $\beta$ -розподілу. Формулювання крайової задачі здійснено для функції потоку маси, зокрема, розглянуто випадки нульової та ненульової сталої початкових концентрацій. Вихідну задачу зведено до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, розв'язок якого побудовано у вигляді ряду Неймана. Усереднення одержаного розв'язку проведено за ансамблем конфігурацій фаз для нульової та ненульової сталої початкових концентрацій. Отримано розрахункові формули та проведено числовий аналіз усередненого потоку залежно від різних значень характеристик середовища. Показано, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, ущільнення включень у середині тіла призводить до зростання дифузійного потоку. Представляє інтерес дослідження дифузійних потоків домішкових речовин у випадково неоднорідних тілах, включення яких розподілені за експоненціальним, ерлангівським,  $\chi^2$ -розподілами тощо.

## Література

- [1] Bergins C., Crone S., Strauss K. Multiphase Flow in Porous Media with Phase Change. Part II: Analytical Solutions and Experimental Verification for Constant Pressure Stream Injection // Transport in Porous Media. — 2005. — Vol. 60. — P. 275-300.
- [2] Shulenber T., Muller U. An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles // Int. J. Multiphase Flow. — 1987. — Vol. 13(1). — P. 87-97.
- [3] Pieper M., Klein P. Application of simple, periodic homogenization techniques to non-linear heat conduction problems in non-periodic, porous media // Heat Mass Transfer. — 2012. — Vol. 48, Issue 2. — P. 291-300.
- [4] Keller J. B. Flow in Random Porous Media // Transport in Porous Media. — 2001. — Vol. 43. — P. 395-406.
- [5] Чапля Є., Чернуха О., Васьо Н. Математичне моделювання потоків в шарі // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. матем. інформ. — 2010. — Вип. 15. — С. 103-115.
- [6] Чернуха О., Давидок А. Дифузійний потік домішкової речовини у смузі з випадково розташованим прошарком // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 116-126.
- [7] Davydok A., Chernukha O. Mathematical modeling diffusion flow in a strip with a randomly disposed sublayer in the case of nonzero initial concentration // Zeszyty Studenckiego Towarzystwa Naukowego. — 2012. — Nr. 25 — P. 81-87.
- [8] Справочник по теории вероятности и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. — Москва: Наука, 1985. — 640 с.
- [9] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — Москва: Мир, 1979. — 830 с.

**Анастасія Давидок**

**Моделювання стохастичних дифузійних потоків у двофазній багатослоєвій смужі ...**

- [10] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику Ч. II. Случайные поля. — Москва: Наука, 1978. — 436 с.
- [11] Чапля С. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ: Наукова думка, 2009. — 302 с.
- [12] Краснов М. Л. Интегральные уравнения. — Москва: Наука, 1975. — 303 с.
- [13] Лыков А. В. Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1978. — 480 с.

## **Modelling stochastic diffusion flows in a two-phase multilayered strip with probable disposition of inclusions in the middle of the body**

Anastasiia Davydok

*An admixture diffusion flow is investigated in a two-phase multilayered strip, in which domain of the most probable disposition of layered inclusions is located in the middle of the body. The initial-boundary value problem is formulated for the function of random mass flow under conditions of constant flow on the upper surface and zero concentration of admixture on the lower surface. Calculating formulae are obtained for diffusion flow averaged over the ensemble of phase configurations in the particular case of  $\beta$ -distribution at zero and nonzero initial concentrations. Dependence of the averaged admixture flow on medium characteristics is established. It is shown that if the admixture diffusion coefficient in a sublayer greater than in matrix, consolidation of inclusions in the middle of the body leads to increasing diffusion flow.*

## **Моделирование стохастических диффузионных потоков в двухфазной многослойной полосе с вероятным расположением включений в середине тела**

Анастасія Давидок

*Исследован диффузионный поток примеси в двухфазной многослойной полосе, область наиболее вероятного расположения включений в которой находится в середине тела. Краевая задача сформулирована для функции случайного потока массы при условии поддержки постоянного потока на верхней поверхности тела и нулевой концентрации примеси на нижней границе. Получены расчетные формулы для диффузионного потока, усредненного по ансамблю конфигураций фаз для частного случая  $\beta$ -распределения при нулевой и ненулевой постоянной начальных концентрациях. Определена зависимость усредненного потока примеси от характеристик среды. Показано, что в случае большего коэффициента диффузии примеси в прослойке, чем в матрице, уплотнение включений в середине тела приводит к росту диффузионного потока в окрестности концентрации включений.*

Представлено доктором технічних наук О. Чернухою

Отримано 15.02.13