

## Задача керування джерелом тепла

Олена Кобильська

К. ф.-м. н., Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, Кременчук, e-mail: leca91@yandex.ru

*Розглядається математична модель теплового процесу, що відбувається у рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з внутрішнім періодичним у часі джерелом тепла. Для визначення параметра керування тепловим процесом розв'язано обернену задачу з інтегральною умовою для рівняння теплопровідності. Пропонується методика визначення параметра керування температурним полем. Якість керування оцінюється за допомогою квадратичного функціонала якості, що визначений на розв'язок нестационарного рівняння теплопровідності. Розв'язок знайдено ітераційним методом. Інтегральна умова, що виражає баланс енергії зони нагрівання, використовувалася для пошуку додаткової інформації. Ця умова необхідна для формулювання задачі керування джерелом тепла в нестационарній задачі теплопровідності. Проведені числові розрахунки температурних розподілів.*

**Ключові слова:** математична модель, періодичне джерело тепла, керування, температурний розподіл, функціонал.

**Вступ.** Виробництво тугоплавкого та важкодеформованого дроту без попереднього розігріву перед пластичною деформацією призводить до зниження якості продукції. Застосування технології електропластичного волочіння (ЕПВ) у процесі виробництва тонкого дроту періодично діючими імпульсними внутрішніми джерелами тепла дозволяє знизити зусилля пластичної деформації [1]. Однією з основних технологічних проблем, що виникають під час реалізації ЕПВ, є визначення таких параметрів керування процесом ЕПВ, які б дозволили максимально знизити зусилля волочіння. Їх можна визначити, досліджуючи математичну модель процесу ЕПВ та розв'язуючи задачу керування джерелом імпульсного струму в задачі теплопровідності, що описує температурне поле під час волочіння. Необхідно за рахунок теплових впливів утримувати задану температуру на певному рівні. В якості керування виступає внутрішнє імпульсне джерело тепла  $W(r, z, t)$ , а саме, струм  $I(t)$ .

### 1. Формулювання задачі

З математичної точки зору температурне поле рухомого дроту під час процесу ЕПВ можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою  $I(t)$  в зоні нагрівання.

Розглянемо загальне формулювання задачі визначення температурного поля в середовищі, яке розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Процес нагрівання протікає у два етапи. На першому етапі відбувається нагрівання зі змінною швидкістю  $v(t)$  руху середовища. Це нестационарний перехідний процес. Під час перехідного процесу, який відбувається упродовж часу  $0 \leq t < t_0$ , швидкість руху середовища  $v(t)$  змінюється в межах  $0 \leq v(t) < v = const$ . Якщо під час перехідного процесу в зоні нагрівання діють джерела тепла, параметри яких не змінюються, то температурне поле буде нестационарним. Якщо нагрівання дроту супроводжується пластичною деформацією, то це може призвести до обриву дроту [1]. Тому одночасно з питанням визначення температурного розподілу під час перехідного процесу виникає проблема визначення таких параметрів керування процесом нагрівання, за яких температурне поле під час руху середовища зі змінною  $v(t)$  швидкістю було б стаціонарним. Цього можна досягти, обравши відповідним чином щільність джерел тепла.

Починаючи з деякого моменту часу, для  $t \geq t_0$ , швидкість руху дроту стає сталою  $v = const$ . Вибір параметрів керування дозволяє підтримувати в зоні ЕПВ необхідний із технологічної точки зору режим обробки. Густина джерела можна підібрати таким чином, щоб упродовж розглядуваного проміжку часу утримувати температуру близькою до деякої заданої. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності. Її розв'язання дозволяє визначити температурне поле рухомого дроту, в зоні нагрівання якого діє джерело тепла зі щільністю  $W(z, t, T)$ , що залежить від координат і температури [2]. Метою роботи є пошук оптимального значення параметрів керування процесом електропластичної деформації під час перехідного процесу волочіння, за умови руху дроту зі змінною швидкістю.

## 2. Математична модель теплових процесів за електропластичного волочіння дроту

Визначення нестационарного температурного розподілу під час перехідного процесу призводить до розв'язування такої початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в області  $\Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$  [3]:

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), \quad (r, z) \in \Omega_t, \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f_{12} \left[ -\alpha (T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right], \quad (4)$$

де  $\lambda, c, \rho_n$  — коефіцієнт теплопровідності, теплоємність і щільність;  $T_c$  — температура навколишнього середовища;  $\alpha, \varepsilon, \sigma$  — коефіцієнт конвективної тепловіддачі

з поверхні, ступінь чорноти та стала Стефана-Больцмана. Функція джерел тепла  $W(z, t, T)$  у випадку залежності від координати та часу має вигляд

$$\begin{aligned} W(z, t, T) &= f_{11}(z)f_2(T), & 0 < t \leq t_0, \\ W(z, t, T) &= f_{12}(t)f_2(T), & t > t_0, \end{aligned} \quad (5)$$

$f_2(z, t, T) = \frac{I^2(t)\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ ;  $\rho_0, \beta$  — питомий опір і температурний коефіцієнт

опору дроту.

Функції  $f_{11}(z), f_{12}(t)$  залежно від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд

$$\begin{aligned} f_{11}(z) &= \begin{cases} m \frac{z}{l_0} - mn, & nl_0 \leq z \leq \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0, \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 < z \leq (n+1)l_0, \quad z < 0, \end{cases} \\ f_{12}(t) &= \begin{cases} m \frac{t}{t_0} - mn, & nt_0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0, \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 < t \leq (n+1)t_0, \quad t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тут параметри  $m, n$  визначають циклічний характер дії джерел тепла. Функції  $f_{11}(z), f_{12}(t)$  є кусково-неперервні та додатно визначені.

Для термічно тонкого середовища можна провести осереднення температури уздовж радіуса, врахувавши умову (4).

Співвідношення [2]  $u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr$  дозволить перейти до осередненої температури і задача (1)-(5) трансформується в області  $\tilde{\Omega}_t : \{(z, t) | 0 \leq z \leq l, 0 \leq t \leq t_0\}$  у таку:

$$c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = F_1(u, t), \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (6)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (7)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l, \quad (8)$$

де

$$Lu = -\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu c\rho_n \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_1(u, t) = f(u) + V(u, t),$$

$$V(u, t) = \left( \frac{I^2(t)\rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_{1i}(t) + \frac{I^2(t)\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4} f_{1i}(t)u \right) \quad (i = 1, 2),$$

$$f(u) = \left( -\frac{2\alpha}{r_0} u \right) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4).$$

Функцію джерела тепла  $V(u, t)$  будемо вважати невідомою. Визначивши її, можна знайти температурне поле в цій області з розв'язку прямої задачі для рівняння теплопровідності (6)-(8).

### 3. Задача керування джерелом тепла

Як відомо з робіт [2, 3], адекватний температурний розподіл можна отримати, залучивши до математичної моделі (6)-(8) інтегральну умову, яка виражає баланс енергії зони нагрівання.

Спостереження за температурою та керування здійснюється у кожній точці розрахункової області у кожен момент часу. Тому розглянемо інтегральну рівність у вигляді

$$\int_{0+0}^{t_0} \int_0^l \frac{I^2 \rho_0 l + \beta I^2 \rho_0 u^*(z, t) l}{r_0^4 \pi^2 \nu(t)} f_{1i}(t) dz dt = c \rho_n \int_{0+0}^{t_0} \int_0^l (u^*(z, t) - T_0) dz dt + \frac{\alpha l}{2\pi r_0} \int_{0+0}^{t_0} \oint \frac{u^*(z, t) - T_c}{\nu(t)} dz dt \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

$$\int_{0+0}^{t_0} \int_0^l M(t) u^*(z, t) dz dt = \int_{0+0}^{t_0} \int_0^l N(t) dz dt, \quad M(t) = \left( c \rho_n - \frac{\beta I^2 \rho_0 l}{r_0^4 \pi^2 \nu(t)} f_{12}(t) + \frac{\alpha l}{2\nu(t) \pi r_0} \right),$$

$$N(t) = c \rho_n T_0 + \frac{I^2 \rho_0 l}{r_0^4 \pi^2 \nu(t)} f_{12}(t) + \frac{\alpha l T_c}{2\nu(t) \pi r_0}. \quad (10)$$

Рівність (10) виражає баланс енергії зони нагрівання.

Із розв'язку інтегрального рівняння (10) отримаємо функцію  $u^*(z, t)$ , що є додатковою умовою в задачі (6)-(8), де невідомими є осереднене значення температури  $u(z, t)$  та функція  $V(u, t)$ . Оскільки функцію  $u^*(z, t)$  знайдено за сталого значення струму  $I$ , то мова йде про адекватне значення температури, яка виражає  $u^*(z, t)$  лише для скінченного набору точок. Будемо вважати, що розглядається задача керування температурою тіла в нестационарних умовах. Величина джерел тепла підбирається таким чином, щоб упродовж часу  $0 \leq t \leq t_0$  утримувати температуру поблизу деякого заданого значення, оскільки різке підвищення або зниження температури внаслідок недотримання технологічних умов може призвести до обриву дроту.

### 4. Методика розв'язування задачі керування та результати обчислень

Оскільки спостереження за температурою ведеться у кожній точці розглядуваної області у кожен момент часу, то функціонал якості візьмемо у вигляді[3]:

$$J_\varepsilon(V) = \int_Q \left( u(z,t,V) - u^*(z,t) \right)^2 dt dz + \frac{1}{\varepsilon^2} \|V\|^2, \\ Q = \{(z,t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}, H = L_2(Q), (V, \omega) = \int_Q V \omega(z,t) dz dt. \quad (11)$$

Величина  $J_\varepsilon(V)$  визначає відстань у просторі  $L_2$  між заданою та розрахованою температурами, за деякого заданого  $\varepsilon$  шукаємо мінімум функціонала.

Будемо шукати  $\omega(z,t)$  таке, щоб

$$J_\varepsilon(\omega) = \inf_{v \in H} J_\varepsilon(V).$$

Гradient функціонала знаходиться на основі розгляду приросту функціонала

$$\delta J_\varepsilon(V) = J_\varepsilon(V + \delta V) - J_\varepsilon(V).$$

Маємо

$$\delta J_\varepsilon(V) = 2\delta \int_Q u(u - u^*(z,t)) dz dt + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_Q \delta V V dz dt + \int_Q (\delta u)^2 v dz dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_Q (\delta V)^2 dz dt.$$

Спряжений стан  $p(z,t)$  визначаємо таким чином, щоб виконувалася рівність

$$\int_Q \delta u(u - u^*(z,t)) dz dt = \int_Q \delta V p(z,t) dz dt.$$

Для цього достатньо, щоб  $p(z,t)$  було розв'язком лінеаризованої задачі:

$$-c p_n \frac{\partial p}{\partial t} + L p = \frac{\partial f}{\partial u} p + u(z,t) - u^*(z,t), \quad 0 < z < l, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (12)$$

$$p(z, t_0) = 0, \quad 0 < z < l, \quad (13)$$

$$p(0,t) = p(l,t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (14)$$

Gradient функціонала визначається через спряжений стан так:

$$\text{grad } J_\varepsilon(V) = 2 \left( p(z,t) + \frac{1}{\varepsilon^2} V(z,t) \right), \quad \text{grad } J_\varepsilon(\omega) = 0, \\ p(z,t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \omega(z,t) = 0, \quad (z,t) \in Q. \quad (15)$$

Задачу знаходження оптимального керування зведено до розв'язування системи рівнянь (12)-(14), рівняння  $c p_n \partial u / \partial t + Lu = f(u) + \omega(u,t)$  та умов (7), (8), (15).

Введемо в області  $Q$  рівномірну сітку  $\omega_{z\tau} = \{(z,t) | t = n\tau; n = \overline{0, N}; N\tau = t_0; z = mh; m = \overline{0, M}; Mh = l\}$ .

Для апроксимації будемо використовувати різницьову схему з квазілінеаризованою правою частиною

$$\begin{aligned}
 & c\rho_n \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \Lambda [\sigma u_{n+1} + (1 - \sigma)u_n] = f(u_n) + \\
 & + \frac{df(u_n)}{du} (u_{n+1} - u_n) + v(u_{n+1}), \quad n = \overline{0, N-1}, \\
 & u_0 = T_0, \quad u_n^M = T_l, \quad u_n^0 = T_0, \quad \Lambda u = -(\lambda u_{\bar{z}})_z + \nu \text{сри}_z,
 \end{aligned} \tag{16}$$

де  $u_{\bar{z}}, u_z$  — ліва та центральна різницева похідна відповідно.

Функціоналу (11) поставимо у відповідність

$$J_\varepsilon(v) = \|u - u^*\| + \frac{1}{\varepsilon^2} \|v\|^2, \quad J_\varepsilon(v) = \inf_{v \in H} J_\varepsilon(v). \tag{17}$$

Оптимальне значення знаходиться з умови мінімуму функціонала. Спряжений стан визначається із задачі

$$\begin{aligned}
 & -c\rho_n \frac{p_{n+1} - p_n}{\tau} + \Lambda [\sigma p_n + (1 - \sigma)p_{n+1}] = \frac{df}{du} p_n + u_n - u_n^*, \quad n = \overline{1, N}, \\
 & p_0 = 0, \quad u_n^M = u_n^0 = 0, \quad n = \overline{1, N+1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Гradient функціонала визначається виразом

$$\text{grad } J_\varepsilon(v) = 2 \left( p_n(z) + \frac{1}{\varepsilon^2} v_n(z) \right), \quad n = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Різницева схема (18) є апроксимацією спряженої задачі (12)-(14).

Беручи до уваги вираз для gradienta (19), запишемо gradientний ітераційний метод у вигляді

$$\frac{\omega^{k+1} - \omega^k}{\tau_{k+1}} + 2 \left( p^k + \frac{1}{\varepsilon^2} \omega^k \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$k$  — номер ітерації.

Для знаходження  $p^k$  розв'яжемо дві задачі [4, 5]:

$$\begin{aligned}
 & c\rho_n \frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{\tau} + \Lambda [\sigma u_{n+1}^k + (1 - \sigma)u_n^k] = \\
 & = f(u_n^k) + \frac{df(u_n^k)}{du} (u_{n+1}^k - u_n^k) + \omega_{n+1}^k, \quad n = \overline{0, N-1},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$u_0^k = T_0, \quad u_n^{Mk} = T_l, \quad u_n^{0k} = T_0, \quad n = \overline{0, N-1},$$

$$-c\rho_n \frac{p_{n+1}^k - p_n^k}{\tau} + \Lambda [\sigma p_n^k + (1 - \sigma)p_{n+1}^k] = \frac{df}{du} p_n^k + u_n^k - u_n^*, \quad n = \overline{1, N}, \tag{21}$$

$$p_{n+1}^{Mk} = p_{n+1}^{0k} = p_{N+1}^k = 0, \quad n = \overline{0, N}.$$

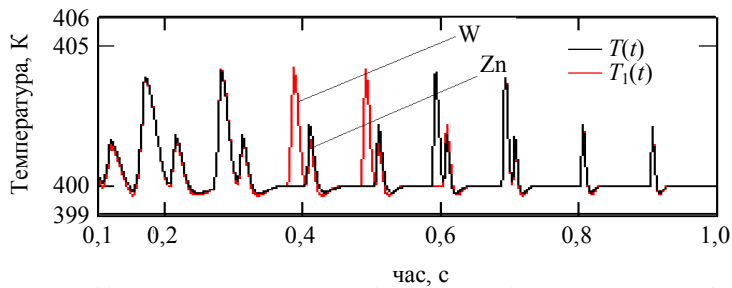


Рис. 1. Графіки температурних розподілів, отримані для цинку та вольфраму з розв'язку (1)-(5) для значень параметрів  $j = 10^7 [A/m^2]$ ,  $\alpha = 1 [B/(m^2K)]$ ,

$$v = 0,1 [m/c], r_0 = 0,2 \cdot 10^{-3} [m], L = 10^{-2} [m]$$

На рис. 1 зображені графіки температурних розподілів, отримані з розв'язку задачі (20), (21). При цьому функція  $V(u, t)$  відповідає оптимальному керуванню джерелом тепла під час процесу електропластичного волочіння. Розрахунки зроблені для цинку та вольфраму.

**Висновки.** Розглянуто задачу керування імпульсним джерелом тепла під час процесу ЕПВ. Джерело тепла підбиралося таким чином, щоб значення температури було близьким до значення отриманого з балансу енергій розглядуваного теплового процесу. Якість керування оцінювалася за допомогою квадратичного функціоналу якості, що визначений на розв'язках нестационарного рівняння теплопровідності. Умови оптимальності формулюються у вигляді системи рівнянь для вихідного та спряженого стану. Розв'язок системи знайдено ітераційними методами.

Запропоновано методику визначення параметра керування температурним полем під час ЕПВ. Інтегральна умова, що виражає баланс енергії зони нагрівання, використовується для пошуку додаткової інформації, яка необхідна для постановки задачі керування джерелом тепла в нестационарній задачі теплопровідності. Результати, отримані у цій роботі, можна використати під час проектування систем автоматичного керування та контролю температурних розподілів.

## Література

- [1] Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов: Монография / О. А. Троцкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобильская и др.; под. ред. В. Е. Громова. — Новокузнецк: Изд-во «СибГИУ», 2011. — 218 с.
- [2] Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов / О. А. Троцкий, В. И. Сташенко, В. Г. Рыжков, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобильская // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). — Харьков, 2011. — Вып. 4/2011. — С. 111-117.
- [3] Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении / В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобильская, Т. А. Григорова, О. А. Троцкий // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. — Кременчук, 2011. — Вып. 4/2011 (69), част. 1. — С. 57-62.
- [4] Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. — Москва: Машиностроение, 1988. — 280 с.
- [5] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — Москва: Едиториал УРСС, 2003. — 782 с.

## The heat source control problem

Elena Kobilskaya

*In the paper the mathematical model of temperature field for the mobile isotropic environment with periodically operating heat sources is considered. For determination of control parameter thermal process the inverse task for the heat conductivity equation with an integrated condition is solved. The method of search of control parameter the temperature field is offered. Control quality with quadratic cost functional is estimated. This functional is defined on the solutions of non-stationary heat equation. Optimality condition in the form of equations for the initial state and the dual state for cylindrical region is formulated. The solution is found with the iterative method. Integral condition which expresses the energy balance of the heating zone to find additional information is used. This condition is necessary for the heat source control problems in non-stationary heat problem. Calculations of temperature distributions are realized.*

## Задача управления источником тепла

Елена Кобильская

*Рассматривается математична модель теплового процесса, который происходит в движущейся осесимметрической изотропной среде с внутренним периодическим во времени источником тепла. Для определения параметра управления тепловым процессом решается обратная задача с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Предлагается методика определения параметра управления температурным полем. Качество управления оценивается с помощью квадратичного функционала качества, который определяется на решениях нестационарного уравнения теплопроводности. Решение находится итерационным методом. Интегральное условие, выражающее баланс энергии зоны нагревания используется для поиска дополнительной информации. Это условие необходимо для постановки задачи управления источником тепла в нестационарной задаче теплопроводности. Проведены численные расчеты температурных распределений.*

Представлено професором В. Чекурінім

Отримано 20.02.13