УДК 532.595

Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною

Олександр Константінов[1], Олег Лимарченко[2]

[1] к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, e-mail: akonst.im@mail.ru
[2] д. т. н, професор, КНУ імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 4-е, Київ,
e-mail: olelim2010@yahoo.com

У роботі досліджено динамічні особливості сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» у разі вертикального збурення руху резервуара за заданим гармонічним законом. При цьому резервуар може додатково рухатися поступально в горизонтальній площині внаслідок параметрично збуджених поперечних коливань вільної поверхні рідини. Внесення можливості горизонтального руху резервуара є узагальненням класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» у разі вертикального кінематичного збурення резервуара. Умови виникнення й особливості розвитку параметричного резонансу в системі, одержані авторами в попередніх роботах в аналітичному вигляді, чисельно перевіряються на основі багатомодової нелінійної дискретної моделі системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Ключові слова: задача Фарадея, зони нестійкості, додаткова ступінь вільності, параметричний резонанс, вимушений резонанс, власна частота, комбінаційна частота.

Вступ. У роботі [1] узагальнено класичну задачу Фарадея для випадку внесення в систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» додаткового ступеня вільності — можливості горизонтального руху резервуара внаслідок коливань вільної поверхні рідини (рис. 1). При цьому в аналітичному вигляді отримано рівняння границь зон стійкості та нестійкості, визначено умови виникнення параметричного резонансу в системі та показано, що саме співвідношення мас резервуара та рідини є ключовим фактором, який зумовлює особливості сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Як прийнято в теорії коливань [2], рівняння границь зон нестійкості визначено на основі лінеаризованих рівнянь руху системи з урахуванням форми коливань із нижчою частотою (першої антисиметричної форми). У цій роботі на основі чисельного моделювання зроблено перевірку отриманих аналітичних результатів і досліджено особливості розвитку параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея на основі багатомодової (12 форм коливань) нелінійної моделі механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею».

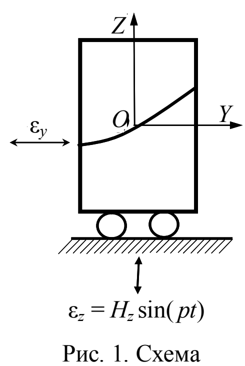


Рис. 1. Схема узагальненої задачі Фарадея

1. Об'єкт дослідження

В узагальненій задача Фарадея досліджуються динамічні особливості сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в нелінійному діапазоні зміни параметрів за умов, що резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \sin(pt)$, а також може здійснювати переміщення ε_y у горизонтальній площині вздовж осі OY внаслідок поперечних коливань вільної поверхні рідини.

У праці [1] на основі методики роботи [3] побудовано дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для узагальненої задачі Фарадея, якщо резервуар має додатковий ступінь вільності — можливість горизонтального руху — у вигляді системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \ddot{a}_i \left(\beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right) + \\
&+\ddot{\varepsilon}_y \left(B_r^{1y} + \sum_i a_i B_{ri}^{2y} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3y} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4y} \right) = \\
&= -\ddot{\varepsilon}_z \left(B_r^{1z} + \sum_i a_i B_{ri}^{2z} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3z} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4z} \right) + \\
&+\frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j \left(\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q \right) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \left(\delta_{ijkr}^q - 2\delta_{rijk}^q \right) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\
&+\dot{\varepsilon}_y \left[B_r^{1y} + \sum_i a_i \left(B_{ir}^{2y} - B_{ri}^{2y} \right) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2 \left(B_{ijr}^{3y} - B_{rij}^{3y} \right) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3 \left(B_{ijkr}^{4y} - B_{rijk}^{4y} \right) \right] + \\
&+\dot{\varepsilon}_z \left[B_r^{1z} + \sum_i a_i \left(B_{ir}^{2z} - B_{ri}^{2z} \right) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2 \left(B_{ijr}^{3z} - B_{rij}^{3z} \right) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3 \left(B_{ijkr}^{4z} - B_{rijk}^{4z} \right) \right],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{M_F + M_T} \left[\sum_i \ddot{a}_i \left(B_i^{1y} + \sum_j a_j B_{ij}^{2y} + \sum_{j,k} a_j a_k B_{ijk}^{3y} \right) \right] + \ddot{\varepsilon}_y = \\
&= \frac{F_y}{M_F + M_T} - \frac{\rho}{M_F + M_T} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j B_{ij}^{2y} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2 B_{ijk}^{3y} \right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де ρ — щільність рідини, g — прискорення гравітаційних сил; M_F та M_T — маси рідини та резервуара відповідно.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1), (2), визначає властивості механічної системи, яка розглядається, й особливості прояву в ній внутрішніх лінійних і нелінійних механізмів. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^{q}, \gamma_{ijr}^{q}, \delta_{rijk}^{q}, \alpha_{r}^{s}, N_{r}$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти B_{r}^{1y}, B_{ri}^{2y}, B_{rij}^{3y}, B_{rijk}^{4y}, B_{r}^{1z}, B_{ri}^{2z}, B_{rij}^{3z}, B_{rijk}^{4z} відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуара .

Відповідно до методики роботи [3] рівняння вільної поверхні рідини ξ подамо у вигляді

$$\xi = \sum_{i} a_i(t)\psi_i(r,\theta) ,$$

де набір координатних функцій має вигляд

$$\psi_{1,2}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{matrix}, \qquad \psi_{7,8}(r,\theta) = J_3\left(\frac{\kappa_3^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(3\theta)\\ \cos(3\theta)\end{matrix},$$

$$\psi_{3}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(1)}}{R}r\right), \qquad \psi_{9,10}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(2)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{matrix},$$

$$\psi_{4,5}(r,\theta) = J_2\left(\frac{\kappa_2^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(2\theta)\\ \cos(2\theta)\end{matrix}, \qquad \psi_{11,12}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(3)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{matrix},$$

$$\psi_{6}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(2)}}{R}r\right).$$

Тут кожну з координатних функцій отримано на основі точного аналітичного розв'язку лінійної спектральної задачі.

Питання про можливість розвитку в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» параметричного резонансу розв'язується за допомогою побудови областей нестійкості у площині параметрів зовнішнього збурення (p, H_z). У роботі [1] на основі лінеаризованих рівнянь (1), (2), записаних відповідно до методики роботи [1] тільки для першої антисиметричної форми a_1 із можливістю горизонтального руху за координатою ε_y у вигляді

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1\ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2\left(1 - \nu H_z p^2\cos(pt)\right)a_1 = 0 , \tag{3}$$

$$\lambda_2\ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0 , \tag{4}$$

з урахуванням введених позначень $\nu = B_{11}^{2z}\big/\left(gN_1\right)$, $\lambda_1 = B_1^{1y}\big/\beta_{11}^{q}$, $\lambda_2 = \rho B_1^{1y}\big/\left(M_T + M_F\right)$, за допомогою методу Гальоркіна отримані відповідні рівняння границь зони першого параметричного резонансу

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 - 2\omega_1^2\nu H_z - \lambda_1\lambda_2}}, \qquad p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1^2\nu H_z - \lambda_1\lambda_2}}. \tag{5}$$

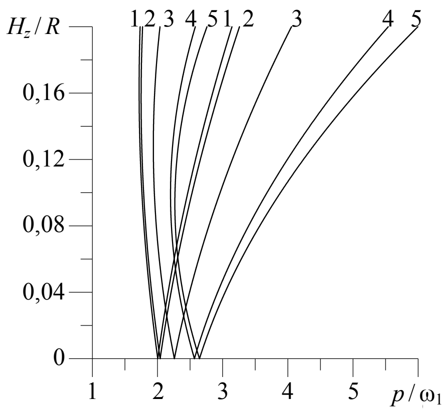


Рис. 2. Зони першого резонансу
в узагальненій задачі Фарадея

На рис. 2 ці границі зображені в площині $(\omega/\omega_1, H_z/R)$ відповідно для різних співвідношень мас (1 — $M_F/M_T = 100$; 2 — $M_F/M_T = 10$; 3 — $M_F/M_T = 1$; 4 — $M_F/M_T = 0{,}1$; 5 — $M_F/M_T = 0{,}01$).

Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального руху резервуара) призводить до підвищення частоти параметричного резонансу (див. рис. 2), причому вона тим вища, чим менша маса резервуара щодо маси рідини.

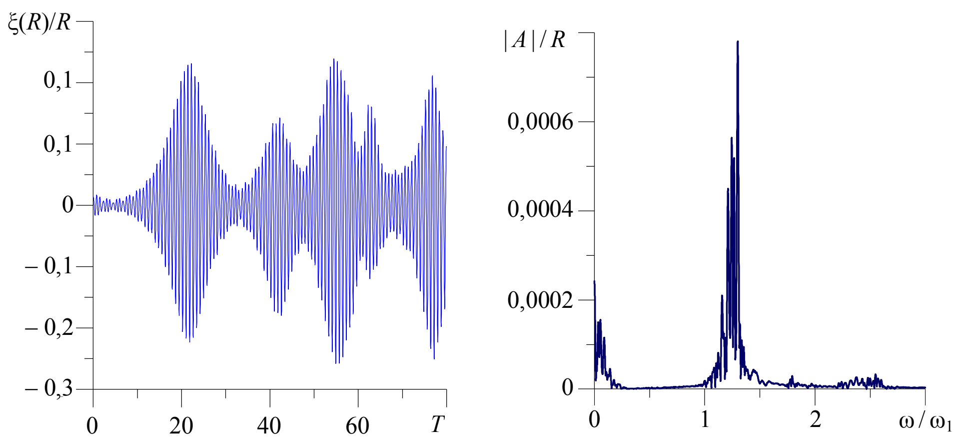
Рівняння (5) границь зони нестійкості, отримані на основі спрощених лінеаризованих рівнянь (3), (4), визначають тільки умови появи в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» параметричного резонансу. Але характерні особливості розвитку параметричного резонансу можна дослідити тільки на основі повної нелінійної дискретної моделі (1), (2).

2. Чисельний приклад виходу на параметричний резонанс на основі нелінійної багатомодової моделі системи «резервуар – рідина»

Розглядається круговий циліндричний резервуар із вертикальною поздовжньою віссю OZ, який здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \sin(pt)$, а також може здійснювати переміщення ε_y у горизонтальній площині вздовж осі OY внаслідок поперечних коливань вільної поверхні рідини. Резервуар радіуса $R = 0{,}3$ м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Початкове збурення вільної поверхні рідини в нульовий момент часу в усіх випадках дорівнює $a_1(0) = 0{,}01R$.

Система рівнянь зводиться чисельно до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрується за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. Під час дослідження динаміки системи резервуар – рідина в розкладах отримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій із точністю до квадратів амплітуд і $n_3 = 6$ із точністю до кубічних членів. Координатні функції розміщено в порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 — другої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0{,}1\pi/\omega_{12}$ с, де ω_{12} — власна найвища частота в системі. Під час аналізу результатів і побудови графіків амплітуди приводилися до безрозмірного вигляду щодо характерного розміру системи — радіуса R резервуара, а час — стосовно періоду коливань першої антисиметричної форми ψ_1.

Розглянуто особливості виходу на режим параметричного резонансу для системи, в якій співвідношення мас резервуара та рідини $M_F/M_T = 0{,}01$, а параметри руху резервуара за гармонічним законом дорівнюють $p = 2{,}6\omega_1$ та $H_z = 0{,}01R$. Графік зміни у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара $\xi(R)/R$ наведено на рис. 3*а*, а частотний спектр цього збурення — відповідно на рис. 3*б*. Як видно з графіка $\xi(R)/R$, за заданого співвідношення $p = 2{,}6\omega_1$, знайденого за формулами границь нестійкості (5), система виходить на режим параметричного резонансу — амплітуда збурень на стінці зростає більше, ніж у 20 разів. При цьому виходу на усталений режим коливань не спостерігається — для збурення $\xi(R)/R$ характерна амплітудна модуляція, закон якої постійно змінюється у часі, а наявність гармонік на нульовій і близьких до нульової частотах означає присутність у спектрі тренду (середнього значення), який змінюється в досить широкому діапазоні. На частотному спектрі збурення на стінці (рис. 3*б*) видно домінуючий пік гармоніки на частоті $\omega = 1{,}2\omega_1 = p/2$, що є підтвердженням виходу системи саме на режим параметричного резонансу (коли домінуюча частота коливань системи вдвічі менша за частоту зовнішнього збурення). Характерні для багатомодової нелінійної системи гармоніки спектра на комбінованих частотах згруповані в околі домінуючої частоти — це теж є додатковим свідченням розвитку в системі саме параметричного резонансу.



а) *б*)

Рис. 3. Вихід на режим параметричного резонансу за малих амплітуд збурення:
а) амплітуда збурення вільної поверхні на стінці резервуара;
б) спектр збурення вільної поверхні на стінці резервуара

Для інших співвідношень маси резервуара та маси рідини M_T/M_F, наведених на рис. 2 (тобто, коли маса резервуара зростає), кількість гармонік на комбінованих частотах, близьких до $\omega = p/2$, у частотному спектрі $\xi(R)/R$ значно зменшується, що означає зменшення впливу коливань рідини на горизонтальні рухи резервуара, а у випадку $M_T/M_F = 100$ ці комбіновані частоти взагалі відсутні — наявний параметричний резонанс як у класичній задачі Фарадея (коливання рідини взагалі не впливають на коливання резервуара).

Границі області стійкості, задані співвідношенням (5), перевірялися також для випадку, коли у разі малих амплітуд руху резервуара $H_z = 0{,}01R$ зовнішня частота збурення знаходиться в зоні стійкості, наприклад, дорезонансній $p = 2\omega_1$ і зарезонансній $p = 2{,}9\omega_1$ (рис. 4) для співвідношення мас $M_T/M_F = 0{,}01$. Для дорезонансної зони збурення характерна відсутність параметричного резонансу — збурення на стінці вільної поверхні рідини $\xi(R)/R \approx 0{,}1$, тобто знаходяться в лінійному режимі коливань. Для зарезонансної зони, навпаки, спостерігається параметричний резонанс (рис. 4), причому, як і видно з графіків амплітуд і частотного спектра, під час виходу на режим параметричного резонансу в системі спостерігається тільки перехідний процес, в якому істотно проявляється вплив вищих форм коливань.

Для великих амплітуд і високих частот збурення резервуара на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу та вимушених коливань, тому в цьому випадку можливий вихід на нелінійний режим. На рис. 5 показані результати дослідження коливань у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за амплітуди резервуара $H_z = 0{,}1R$, частоти $p = 1{,}9\omega_1$ (дорезонансна зона) та співвідношення мас $M_T/M_F = 0{,}01$.

Не зважаючи на те, що частота зовнішнього збурення знаходиться в зоні стійкості, механічна система наближається до нелінійного режиму коливань.

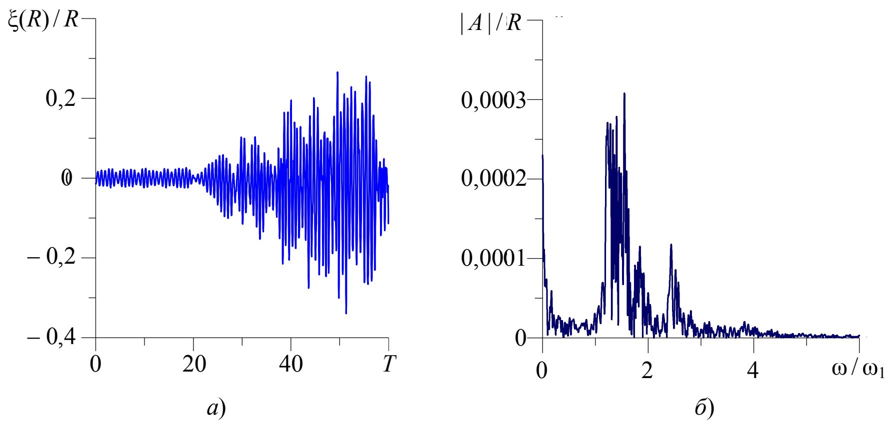


Рис. 4. Коливання вільної поверхні рідини в зарезонансній зоні за малих амплітуд збурення:
а) збурення вільної поверхні на стінці резервуара;
б) спектр збурення вільної поверхні на стінці резервуара

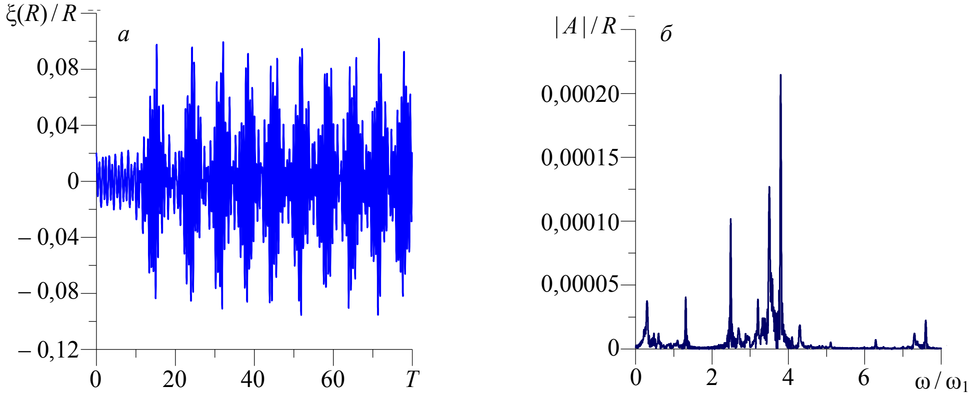


Рис. 5. Коливання вільної поверхні рідини в дорезонансній зоні за великих амплітуд збурення:
а) амплітуда збурення вільної поверхні на стінці резервуара;
б) спектр збурення вільної поверхні на стінці резервуара

Домінуюча гармоніка має частоту $\omega \approx p$, що означає перевагу механізму вимушених коливань над механізмом параметричного резонансу (див. рис. 5*б*). У разі перенесення частоти збурення резервуара в зарезонансну зону $p = 4{,}26\omega_1$ резонанс у системі розвивається упродовж одного періоду коливань, причому домінуючим є механізм вимушених коливань (амплітуда гармоніки на частоті $\omega \approx p$ вдвічі більша за амплітуду гармоніки на частоті $\omega \approx p/2$). Механізм вимушених коливань виводить систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» у режим резонансу, навіть якщо частота зовнішнього збурення резервуара не є резонансна. Тобто на відміну від класичної задачі Фарадея за наявності горизонтальних рухів резервуара вертикальною гармонічною силою можна на будь-якій частоті суттєво збільшити коливання вільної поверхні рідини.

Висновки. Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні у разі вертикальних коливань резервуара. Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального руху резервуара) призводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона тим вища, чим менша маса резервуара щодо маси рідини. За вертикального збурення руху резервуара за наявності можливості горизонтального руху системи на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу та вимушених коливань, тому в цьому випадку на будь-якій частоті можливий вихід на нелінійний режим (суттєве зростання амплітуд коливань). Вихід на усталений режим коливань у нелінійних багаточастотних системах типу «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за параметричного збурення руху резервуара взагалі не відбувається — спектр коливань збурення вільної поверхні рідини на стінці (як найхарактернішій точці, яка доступна для вимірів і спостереження) завжди містить гармоніки на власних і комбінаційних частотах.

Література

[1] *Константінов О. В., Лимарченко О. С.* Узагальнена задача Фарадея про рух резервуара з рідиною // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 76-85.

[2] *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 600 с.

[3] *Лимарченко О. С., Ясинский В. В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ «КПИ», 1997. — 338 с.

Attainment to parametric resonance in the Faraday generalized problem about motion of reservoir with liquid

Oleksandr Konstantinov, Oleg Limarchenko

Dynamic peculiarities of combined motion of the mechanical system «reservoir and liquid with a free surface» under vertical motion excitation by the given harmonic law was investigated. Here the reservoir can perform supplementary translational motion in a horizontal plane caused by parametrically excited transversal oscillations of a free surface of liquid. Introduction of potential horizontal motion of the reservoir represents generalization of the classical Faraday problem about parametric resonance in the system «reservoir and liquid with a free surface» under vertical kinematic excitation. Conditions of origination and peculiarities of development of parametric resonance of the system, obtained by authors in previous publications in analytical form, were verified numerically on the basis of multimodal nonlinear discrete model of the system «reservoir and liquid with a free surface».

Выход на параметрический резонанс в обобщенной задаче Фарадея о движении резервуара с жидкостью

Александр Константинов, Олег Лимарченко

В работе исследованы динамические особенности совместного движения механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при вертикальном возбуждении движения по заданному гармоническому закону. При этом резервуар может дополнительно двигаться поступательно в горизонтальной плоскости за счет параметрически возбужденных поперечных колебаний свободной поверхности жидкости. Внесение возможности горизонтального движения резервуара является обобщением классической задачи Фарадея о параметрическом резонансе в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при вертикальном кинематическом возмущении движения. Условия возникновения и особенности развития параметрического резонанса в системе, полученные авторами в предыдущих работах в аналитическом виде, численно проверяются на основе многомодовой нелинейной дискретной модели системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью».

Представлено доктором технічних наук Я. П’янилом

Отримано 07.11.12