УДК 518.5

Чебишовське наближення розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння

Нестор Данчак[1], Петро Малачівський[2], Оксана Хапко[3]

[1] Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005
[2] д. т. н., професор, п. н. с. Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua
[3] Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, Львівська філія, вул. І. Блашкевич, 12а, Львів

Запропоновано метод наближення розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n-ого порядку. Обґрунтовано можливість визначення поліноміального наближення розв’язку задачі Коші за чебишовським критерієм з ермітовим інтерполюванням. Описано алгоритм побудови чебишовського наближення розв’язку задачі Коші. Подано аналіз точності наближення розв’язку та похідних для диференціального рівняння 2-го порядку.

Ключові слова: задача Коші, чебишовське наближення з ермітовим інтерполюванням.

Вступ. Ідеєю застосування чебишовського наближення для опису розв’язків диференціальних рівнянь переймалося багато вчених, зокрема, Л. Коллатц [1], В. К. Дзядик [2], К. Ланцош [3] та інші. В згаданих працях для наближення розв’язків диференціальних рівнянь досліджували можливості використання класичного чебишовського наближення. У цій статті запропоновано метод наближення розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n-го порядку, який ґрунтується на застосуванні чебишовського наближення з ермітовим інтерполюванням [4]. Застосування чебишовського наближення з ермітовим інтерполюванням забезпечує врахуванням початкових умов задачі Коші.

1. Метод чебишовського наближення розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння

Задача Коші для лінійного диференціального рівняння n-ого порядку полягає в знаходженні такої функції $y(x)$, яка задовольняє рівнянню

$$y^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}V_i(x)y^{(n-i)}(x)=U(x) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$y\left(x_0\right)=y_0,\ y'\left(x_0\right)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

де функції $V_i(x),\, i=\overline{1,n}$ — неперервні на деякому інтервалі $I=(\alpha,\beta)$, $x_0\in I$, а $y_0, y_0',\ldots, y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Нехай розв'язок $y(x)$ задачі Коші (1)-(2) існує та на відрізку $[x_0,\beta_0]\subset I$ задовільно наближається поліномом k-ого степеня $k\ge n$

$$y(x)\approx\sum_{i=0}^{k}a_i x^i\,, \tag{3}$$

значення якого в точці x_0 задовольняє умову (2). Тоді m-та похідна шуканого розв'язку задачі (1)-(2) на відрізку $[x_0,\beta_0]$ наближається поліномом $(k-m)$-ого степеня

$$y^{(m)}(x)\approx\sum_{j=m}^{k}\frac{j!}{(j-m)!}a_j x^{j-m}\,,$$

а значення n-ої похідної в точці x_0 буде задовольняти умову

$$y^{(n)}(x_0)=U(x_0)-\sum_{i=1}^{n}V_i(x_0)\,y_0^{(n-i)}\,. \tag{4}$$

Отже, наближення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n-ого порядку зводиться до апроксимації її розв'язку за чебишовським критерієм з ермітовою інтерполяцією n-го порядку. Застосування чебишовського критерію з ермітовою інтерполяцією дає можливість врахувати початкову умову. Значення невідомих параметрів $a_j\left(j=\overline{0,k}\right)$ полінома (3) визначатимемо з умови досягнення найменшої нев'язки рівняння (1) на відрізку $[x_0,\beta_0]$ за чебишовським (мінімаксним) критерієм. Відповідно до цього критерію в разі апроксимації розв'язку рівняння (1) на відрізку $[x_0,\beta_0]$ поліномом k-ого степеня (3) з врахуванням умов (2) та (4) на $(x_0,\beta_0]$ знайдуться $(k-n+1)$-а впорядковані за зростанням точки

$$z_i,\; i=\overline{1,k-n+1}\,, \tag{5}$$

в яких нев'язка рівняння (1)

$$r(x)=\sum_{i=1}^{n}V_i(x)\sum_{j=n-i+1}^{k}\frac{j!}{(j-n+i-1)!}a_j x^{j-n+i-1}+\sum_{j=n}^{k}\frac{j!}{(j-n)!}a_j x^{j-n}-U(x) \tag{6}$$

набуватиме найбільшого за модулем значення та її знак у цих точках почергово змінюватиметься

$$r(z_1)=-r(z_2)=\ldots=(-1)^{k-n+1}r(z_{k-n+1})=\pm\max_{x\in(x_0,\,\beta_0]}|r(x)|\,, \tag{7}$$

а в точці x_0 дорівнюватиме нулю

$$r\left(x_0\right)=0\,.$$

Точки (5) називають точками альтернансу та для знаходження цих точок можна використати ітераційну схему Є. Я. Ремеза [5].

2. Алгоритм обчислення параметрів наближення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння *n*-го порядку

Отже, для визначення параметрів полінома (3) отримуємо задачу чебишовської інтерполяції на множині точок альтернансу (5) щодо нев'язки диференціального рівняння (1) з урахуванням початкових умов (2), яка описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z_s\right) \sum_{j=n-i+1}^{k} \frac{j!}{\left(j-n+i-1\right)!} a_j z_s^{j-n+i-1} + \sum_{j=n}^{k} \frac{j!}{\left(j-n\right)!} a_j z_s^{j-n} - \\ -U\left(z_s\right)=\left(-1\right)^s \mu, \qquad s=\overline{1, k-n+1}, \\ \sum_{i=1}^{n} V_i\left(x_0\right) \sum_{j=n-i+1}^{k} \frac{j!}{\left(j-n+i-1\right)!} a_j x_0^{j-n+i-1} + \sum_{j=n}^{k} \frac{j!}{\left(j-n\right)!} a_j x_0^{j-n} - U\left(x_0\right)=0, \\ \sum_{j=m}^{k} \frac{j!}{\left(j-m\right)!} a_j x_0^{j-m} = y_0^{(m)}, \qquad m=\overline{0, n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Система рівнянь (8) — це система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих параметрів апроксимації $a_i\left(i=\overline{0, k}\right)$ та нев'язки μ.

За початкове наближення до точок $z_j\left(j=\overline{1, k-n+1}\right)$ можна прийняти екстремальні точки полінома Чебишова $T_{k-n+1}(x)$ з інтервалу $\left(x_0, \beta_0\right]$

$$\bar{z}_j = \frac{x_0+\beta_0}{2} + \frac{\beta_0-x_0}{2}\cos\frac{\left(k-n+1-j\right)\pi}{k-n+1}, \quad j=\overline{1, k-n+1}\,. \tag{9}$$

Уточнення точок альтернансу відповідно до схеми Ремеза можна провести за модифікованим R-алгоритмом [5].

Запропонований метод — це застосування ідеї методу колокації для отримання чебишовського наближення розв'язку задачі Коші та відповідно він забезпечує стійкість обчислювального процесу, характерну для методу колокації [6]. Порівняно з τ-методом [3] і α-методом, запропонованим В. К. Дзядиком [2], цей метод допускає наближення розв'язку задачі Коші з будь-якими нелінійними коефіцієнтами. Ми сподіваємося, що застосування чебишовського наближення буде ефективним у разі апроксимації розв'язків жорстких диференціальних рівнянь.

3. Тестовий приклад

Знайдемо чебишовське наближення розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = -101y' - 100y \tag{10}$$

з початковими умовами

$$y'(0) = -2, \quad y(0) = 1{,}01. \tag{11}$$

Аналітичний розв'язок цієї задачі Коші такий

$$y(x) = \frac{1}{100}e^{-100x} + e^{-x}. \tag{12}$$

Задача (10), (11) — це приклад жорсткої задачі. Такі задачі характеризуються наявністю в розв'язку швидкозмінних компонент. Для отримання стійкого наближення розв'язків таких задач приходиться різко зменшувати крок інтегрування [7]. Зокрема, для задовільного наближення першого доданку розв'язку (12) необхідно вибрати достатньо малий крок. Хоча вклад цього доданку стає дуже малим, коли x досягає значення 0,1, проте для забезпечення задовільної апроксимації першого доданку крок інтегрування повинен залишатися малим і надалі [7].

У табл. 1 і 2 подано похибки розв'язку задачі Коші (1), (2), отримані за допомогою методу Рунге-Кутта 2, 3 та 4 порядку, методу Фелберґа (Рунге-Кутта 4/5 порядку) та чебишовського наближення поліномом шостого степеня в точках $x = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$.

Із поданих у табл. 1 і 2 результатів слідує, що похибки чебишовського наближення поліномом 6-ого степеня розв'язку задачі Коші (1), (2) близькі (співмірні) з похибками методу Фелберґа та значно менші, ніж похибки методу Рунге-Кутта четвертого порядку.

У табл. 3 і 4 подано похибки розв'язку задачі Коші (1), (2) з використанням чебишовського поліномами різного степеня від 3-ого до 9-ого на відрізках [0; 0,01] і [0; 0,02].

З поданих у табл. 3, 4 результатів слідує, що похибки чебишовського наближення другої похідної розв'язку задачі Коші (1)-(2) близькі (співмірні) з нев'язкою.

Це дає можливість наближення розв'язку задачі Коші з використанням неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення з заданою точністю.

Таблиця 1

Похибки розв'язку задачі Коші (10), (11)

x	Метод Рунге-Кутта				Чебишовське наближ. ($k = 6$)
	2	3	4	4/5	
0,01	$0{,}227 \cdot 10^{-3}$	$0{,}286 \cdot 10^{-4}$	$0{,}291 \cdot 10^{-5}$	$0{,}19 \cdot 10^{-8}$	$0{,}95 \cdot 10^{-8}$
0,02	$0{,}173 \cdot 10^{-3}$	$0{,}209 \cdot 10^{-4}$	$0{,}215 \cdot 10^{-5}$	$0{,}24 \cdot 10^{-8}$	$0{,}94 \cdot 10^{-8}$
0,03	$0{,}983 \cdot 10^{-4}$	$0{,}115 \cdot 10^{-4}$	$0{,}118 \cdot 10^{-5}$	$0{,}23 \cdot 10^{-8}$	$0{,}38 \cdot 10^{-7}$

Таблиця 2

Похибки наближення похідної розв'язку задачі Коші (1), (2)

x	Метод Рунге-Кутта				Чебишовське наближ. (k = 6)
	2	3	4	4/5	
0,01	$0{,}227\cdot10^{-1}$	$0{,}286\cdot10^{-2}$	$0{,}291\cdot10^{-3}$	$0{,}19\cdot10^{-6}$	$0{,}12\cdot10^{-5}$
0,02	$0{,}173\cdot10^{-1}$	$0{,}209\cdot10^{-2}$	$0{,}214\cdot10^{-3}$	$0{,}24\cdot10^{-6}$	$0{,}63\cdot10^{-6}$
0,03	$0{,}982\cdot10^{-2}$	$0{,}115\cdot10^{-2}$	$0{,}118\cdot10^{-3}$	$0{,}23\cdot10^{-6}$	$0{,}31\cdot10^{-6}$

Таблиця 3

Похибки чебишовського наближення
розв'язку задачі Коші (10), (11) на відрізку [0; 0,01]

Степінь	Δy	$\Delta y'$	$\Delta y''$	μ (нев'язка)
9	$9{,}537\cdot10^{-9}$	$3{,}153\cdot10^{-8}$	$2{,}034\cdot10^{-5}$	$2{,}033\cdot10^{-5}$
8	$9{,}568\cdot10^{-9}$	$2{,}566\cdot10^{-8}$	$2{,}177\cdot10^{-5}$	$1{,}924\cdot10^{-5}$
7	$9{,}537\cdot10^{-9}$	$6{,}756\cdot10^{-8}$	$5{,}489\cdot10^{-5}$	$5{,}917\cdot10^{-5}$
6	$9{,}537\cdot10^{-9}$	$1{,}385\cdot10^{-6}$	$1{,}319\cdot10^{-3}$	$1{,}289\cdot10^{-3}$
5	$1{,}237\cdot10^{-7}$	$4{,}368\cdot10^{-5}$	$2{,}817\cdot10^{-2}$	$2{,}771\cdot10^{-2}$
4	$6{,}057\cdot10^{-6}$	$1{,}264\cdot10^{-3}$	0,526538	0,5022057
3	$2{,}095\cdot10^{-4}$	0,0365125	6,258089	8,3380270

Таблиця 4

Похибки чебишовського наближення
розв'язку задачі Коші (10), (11) на відрізку [0; 0,02]

Степінь	Δy	$\Delta y'$	$\Delta y''$	μ (нев'язка)
9	$9{,}733\cdot10^{-9}$	$2{,}772\cdot10^{-8}$	$2{,}224\cdot10^{-5}$	$2{,}232\cdot10^{-5}$
8	$9{,}549\cdot10^{-9}$	$2{,}602\cdot10^{-7}$	$1{,}470\cdot10^{-4}$	$1{,}551\cdot10^{-4}$
7	$1{,}003\cdot10^{-8}$	$3{,}783\cdot10^{-6}$	$2{,}095\cdot10^{-3}$	$2{,}076\cdot10^{-3}$
6	$1{,}942\cdot10^{-7}$	$5{,}262\cdot10^{-5}$	0,0271258	$2{,}632\cdot10^{-2}$
5	$4{,}586\cdot10^{-6}$	$8{,}179\cdot10^{-4}$	0,2878612	0,2886674
4	$1{,}008\cdot10^{-4}$	$1{,}140\cdot10^{-2}$	2,687981	2,727235
3	$1{,}969\cdot10^{-3}$	0,1597211	15,19902	25,04226

Висновок. Чебишовське наближення з відтворенням значення функції та її похідних дає можливість апроксимації розв'язку задачі Коші з врахуванням початкових умов. Похибка такого чебишовського наближення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку поліномом шостого степеня збігається з похибкою методу Фелберґа. При цьому похибка наближення похідної другого порядку збігається з нев'язкою. Це дає підстави для побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення розв'язку задачі Коші з заданою точністю.

Література

[1] *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения: пер. с нем. — Москва: Наука, 1978. — 272 с.
[2] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1988. — 304 с.
[3] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа: пер. с англ. — Москва: Физматгиз, 1961. — 525 с.
[4] *Малачівський П. С., Скопецький В. В.* Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. — Київ: Наук. думка, 2013. — 270 с.
[5] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
[6] *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Справочное пособие. — Киев: Наук. думка, 1986. — 542 с.
[7] *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 288 с.

Chebyshev approximation of solution the Koshi task for linear differential equation

Nestor Danchak, Petro Malachivskyy, Oksana Khapko

The numerical method of approximation of the Cauchy problem solution for linear differential equation of n^{th} order is offered. There is grounded a possibility of determination the polynomial approximation to solution of Cauchy problem after a Chebyshev criterion with Hermitte interpolation. The algorithm of construction of the Chebyshev approximation to solution of Cauchy problem is described. The analysis of the approximation accuracy of solution and its derivatives for differential equation of 2 orders has done.

Чебышевское приближение решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

Нестор Данчак, Петро Малачивский, Оксана Хапко

Предложен метод приближения решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Обоснована возможность определения полиномиального приближения решения задачи Коши по чебышевскому критерию с эрмитовым интерполированием. Описан алгоритм построения чебышевского приближения решения задачи Коши. Проанализировано точность приближения решения и производных для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Отримано 04.10.13