УДК 519.61

Збіжність наближених розв'язків нелінійної задачі для моделі Леонтьєва-Форда

Микола Недашковський[1], Тетяна Крошка[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Університет Казимира Великого в Бидгощи, вул. Коперніка, 1, Бидгощ, Польща, 85-064, e-mail: m_nedashkovsky@yahoo.com

[2] Буковинський державний фінансово-економічний університет, вул. Манфреда Штерна, 1, Чернівці, 58000, e-mail: tanya.kroshka83@gmail.com

Розглянуто числові методи обчислення розв'язків нелінійної задачі для моделі Леонтьєва-Форда з використанням апарату матричних гіллястих ланцюгових дробів. Запропоновано ефективні та зручні алгоритми розвинення у матричний гіллястий ланцюговий дріб розв'язків цієї задачі. Розглянуто проблему збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків нелінійної моделі Леонтьєва-Форда. Отримано ряд зручних у використанні достатніх ознак збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків нелінійної задачі для моделі Леонтьєва-Форда.

Ключові слова: модель Леонтьєва-Форда, балансова модель міжгалузевої еколого-економічної взаємодії, матричні гіллясті ланцюгові дроби, підхідний дріб, ознаки збіжності.

Вступ. Розв'язування задач математичного моделювання щодо цілісних еколого-економічних систем, які охоплюють низку природних, виробничих і біологічних процесів, рівновагу між якими надзвичайно важко зберегти, а ще складніше — керувати нею, є актуальним для екологізації сучасного виробництва [1, 2]. Ця праця є продовженням низки досліджень, які стосуються побудови обчислювальних алгоритмів розв'язування як лінійних, так і нелінійних балансових моделей міжгалузевої еколого-економічної взаємодії (моделей Леонтьєва-Форда) [3, 4]. У праці [3] розглянуто розв'язування нелінійної балансової моделі з використанням матричних гіллястих ланцюгових дробів (МГЛД), але питання збіжності до розв'язку не було розглянуто.

1. Формулювання задачі, основні позначення та початкові відомості

Розглянемо модель міжгалузевого еколого-економічного балансу (модель Леонтьєва-Форда) у випадку використання нелінійних технологій [1, с. 39; 2, с. 258]

$$\begin{cases} x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{(11)}\left(x_j^{(1)}\right) + \sum_{s=1}^{m} \varphi_{is}^{(12)}\left(x_s^{(2)}\right) + y_i^{(1)} \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \\ x_l^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{lj}^{(21)}\left(x_j^{(1)}\right) + \sum_{s=1}^{m} \varphi_{ls}^{(22)}\left(x_s^{(2)}\right) - y_l^{(2)} \quad \left(l = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{1}$$

У роботі [3] запропоновано схему зведення нелінійної моделі (1) до поліноміального матричного рівняння порядку l

$$\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} p_{11k} & p_{12k} & \cdots & p_{1nk} & \cdots & p_{1,n+m,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1k} & p_{n2k} & \cdots & p_{nnk} & \cdots & p_{n,n+m,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n+m,1,k} & p_{n+m,2,k} & \cdots & p_{n+m,n,k} & \cdots & p_{n+m,n+m,k} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\operatorname{diag}\left(u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots,u_{n+m}\right)^{k-1}\left(u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots,u_{n+m}\right)^{\mathrm{T}}=0\,.$$

Розглянемо методику побудови алгоритмів розв'язування алгебраїчних рівнянь із використанням матричних гіллястих ланцюгових дробів (МГЛД) [3, 5, 6].

Нехай X — банаховий простір квадратних матриць розміру $p{\times}p$, над полем $\mathbb{C}$. Введемо до розгляду позначення

$$\begin{cases} D_1=\sum\limits_{k_1=1}^{N} b_{k_1}^{-1}a_{k_1}=\sum\limits_{k_1=1}^{N}\dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}}, \\ \ldots \\ D_i=\sum\limits_{k_1=1}^{N}\dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}}+\sum\limits_{k_2=1}^{N}\dfrac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}}+\cdots+\sum\limits_{k_i=1}^{N}\dfrac{a_{k(i)}\,|}{|\,b_{k(i)}}, \\ \ldots \\ D=\sum\limits_{k_1=1}^{N}\dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}}+\sum\limits_{k_2=1}^{N}\dfrac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}}+\cdots+\sum\limits_{k_i=1}^{N}\dfrac{a_{k(i)}\,|}{|\,b_{k(i)}}+\cdots\ , \end{cases}$$

де $k(i)=k_1k_2...k_i$ — скорочене позначення для мультиіндексів; $a_{k(i)},b_{k(i)}\in X$ — квадратні невироджені матриці розміру $p{\times}p$.

Означення 1. Скінченний дріб

$$D_m=\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}}+\sum_{k_2=1}^{N}\frac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}}+\cdots+\sum_{k_m=1}^{N}\frac{a_{k(m)}\,|}{|\,b_{k(m)}} \qquad (2)$$

будемо називати *m-им підхідним дробом* нескінченного МГЛД.

Надалі МГЛД будемо записувати також у вигляді $D=\mathop{D}\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k_i=1}^{N}\dfrac{a_{k(i)}}{b_{k(i)}}$, а також використовуватимемо позначення:

$$D_{k(m),m}=b_{k(m)},\quad D_{k(i),m}=b_{k(i)}+\sum_{k_{s+1}=1}^{N}\frac{a_{k(s+1)}\,|}{|\,b_{k(s+1)}}+\ldots+\sum_{k_m=1}^{N}\frac{a_{k(m)}\,|}{|\,b_{k(m)}}\quad (i<m)\,.$$

У роботі [3] для розв'язку X матричного поліноміального рівняння n-ого

$$X^n + A_{n-1}X^{n-1} + A_{n-2}X^{n-2} + \ldots + A_1X + A_0 = 0\,. \tag{3}$$

Тут матриці $A_i \in \mathbb{R}^{p\times p}$ $(i = 0,\ldots,n-1)$, $X \in R^{p\times q}$, а $n \geq 2$ ціле число.

Для розв'язку X рівняння (3) одержано такий розклад у МГЛД [3]

$$X = B_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i|}{|-B_i + X} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i|}{|-B_i + X} + \ldots + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i|}{|-B_i + X} + \ldots\ . \tag{4}$$

Причому матричні елементи дробу $B_0,\ B_i,\ Y_i\ \left(i = \overline{1,\ n-1}\right)$ визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases}
(-1)^{n-1}B_1B_2\ldots B_{n-1} + B_0 = A_1, \\
(-1)^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}B_i\prod\limits_{i=k+1}^{n-1}B_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1}Y_i + (-1)^{n-1}B_1B_2\ldots B_{n-1}B_0 = A_2, \\
(-1)^{n-3}\sum\limits_{k=1}^{n-2}\sum\limits_{l=k+1}^{n-2}(1-\delta_{kl})\prod\limits_{i=1}^{k-1}B_i\prod\limits_{i=k+1}^{l-1}B_i\prod\limits_{i=l+1}^{n-2}B_i + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}B_i\prod\limits_{i=k+1}^{n-1}B_iY_k + \\
+(-1)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}B_iB_0 = A_3, \\
\ldots \\
\sum\limits_{i=1}^{n-1}B_i + \sum\limits_{k=2}^{n-1}\sum\limits_{l=k+1}^{n-1}B_kB_lY_1 + \ldots + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{l=k+1}^{n-1}\left(1-\delta_{ij}\right)B_kB_lY_j + \ldots + \\
+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\sum\limits_{l=k+1}^{n-2}B_iB_lY_{n-1} = A_{n-1}, \\
\sum\limits_{i=1}^{n-1}B_iY_1 + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(1-\delta_{ij}\right)B_jY_j + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{n-2}B_iY_{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}B_iB_0 = A_n,
\end{cases} \tag{5}$$

де $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = l, \\ 0, & \text{якщо} \quad k \neq l. \end{cases}$

Якщо всі матриці B_i є попарно різні, то систему (5) можна звести до системи з $n - 1$ лінійних рівнянь щодо n невідомих $Y_i\ \left(i = \overline{1, n-1}\right)$, яка матиме єдиний розв'язок.

Обчислення дробу (4) здійснюється за алгоритмом знизу-вгору відповідно з рекурентним співвідношенням

$$X = B_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i}{-B_i + X}\,. \tag{6}$$

2. Збіжність МГЛД до розв'язку рівняння

Неформальне застосування співвідношень (4) та (6) у системах комп'ютерної алгебри неможливе без ретельного аналізу збіжності, обчислювальної стійкості та інших характеристик. Особливе місце серед них займає проблема збіжності МГЛД до розв'язку відповідного матричного рівняння, що розв'язується; адже збіжність самого гіллястого дробу ще не є гарантією збіжності до розв'язку відповідного рівняння (3). Зупинимося більш детально саме на цьому питанні.

Означення 2. Відображення A простору самого в себе $M \to M$ називається *стискуючим*, якщо $\exists\, \alpha \;\; 0<\alpha<1$ такі, що для довільних двох точок $x, y \in R$ виконується нерівність $\rho\left(Ax, Ay\right) < \alpha\rho(x,y)$. Точка x називається *нерухомою* точкою відображення A, якщо $Ax = x$. Інакше кажучи, нерухомі точки — це розв'язки рівняння $Ax = x$.

Теорема (Принцип стискуючих відображень) [7, с.75]. Всяке стискуюче відображення, визначене у повному метричному просторі R, має одну і тільки одну нерухому точку.

Твердження 1. Якщо для МГЛД виконуються співвідношення $\det D_{k(j),s} \neq 0$, то для $k = \overline{1,n}$; $s = \overline{0,m-1}$; $l = 1,2,3,...$ справджується

$$D_{k(s),m+l} - D_{k(s),m} = (-1)^{m-s} \sum_{k(m+s+1)=1}^{n} \prod_{j=s+1}^{m} D_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=s}^{m} D_{k(m+s+1-j),m+l}^{-1} a_{k(m+s+1-j)}\,, \quad (7)$$

де $k(m+s+1) = k_{s+1}k_{s+2}...k_m k_{m+1}$ [8-10].

Наслідок 1. Якщо в (7) $s = 0$, то для різниці між його підхідними дробами одержуємо

$$D_{m+l} - D_m = (-1)^m \sum_{k(m+1)=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} D_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=0}^{m} D_{k(m+1-j),m+l}^{-1} a_{k(m+1-j)}\,.$$

Означення 3. МГЛД називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \left\| D_{m+1} - D_m \right\|$, складений із підхідних дробів (де під нормою $\|A\|$ розглядається довільна з матричних норм — результат не зміниться від зміни норми).

Означення 4. Будемо говорити, що один МГЛД G *мажорує* інший МГЛД D, якщо існує таке невід'ємне ціле число n_0 і деяка додатна стала M, що для всіх цілих n та m таких, що $n \geq n_0$ і $m \geq n_0$ виконується співвідношення $\left\| D_n - D_m \right\| \leq M \left\| G_n - G_m \right\|$.

Лема 1 [11, с. 25]. Якщо $\|F\| \leq 1$, то матриця $A = E - F$ має обернену та при цьому $(E-F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$; $\left\| (E-F)^{-1} \right\| \leq \|E\| / \left(1 - \|F\|\right)$.

Наслідок 2 [11, с. 25-26]. Якщо A — невироджена і матриця H — її збурення, таке що $\left\|A^{-1}H\right\|<1$, то матриця $A+H$ невироджена і при цьому

$$\left(A+H\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-A^{-1}H\right)^{k}A^{-1}=A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-EH^{-1}\right)^{k}\leq\frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|E\right\|}{1-\left\|A^{-1}H\right\|}. \qquad (8)$$

Твердження 2 (*Ознака мажорації*). Якщо для МГЛД D існує такий абсолютно збіжний числовий гіллястий дріб $\hat{D}=\hat{b}_0+\underset{s=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{k_s=1}^{n}\frac{\hat{a}_{k(s)}}{\hat{b}_{k(s)}}$ із знакосталими елементами $\hat{a}_{k(s)}$ і додатними $\widehat{D}_{k(s),m}$, що $\begin{cases}\hat{D}_{k(s),m}^{-1}\geq\left\|D_{k(s),m}^{-1}\right\|>0,\\ \left\|a_{k(s)}\right\|\leq\left|\hat{a}_{k(s)}\right|;\end{cases}$ і для всіх $s=1,2,3,...;\ \det D_{k(s),m}\neq 0$, то даний МГЛД також абсолютно збіжний.

Означення 5. Нехай M — деяка підмножина лінійного простору. Будемо називати *M областю збіжності* ГЛД з матричними елементами $a_{k(s)}$ і $b_{k(s)}$ $(s=1,2,3,...)$, якщо для всіх $a_{k(s)}\in M$ і $b_{k(s)}\in M$ даний МГЛД збігається.

Означення 6. Підмножина лінійного простору, якій належить значення деякого МГЛД, а також значення всіх його підхідних дробів за умови, що всі $a_{k(s)}\in M$ і $b_{k(s)}\in M$, та яку не можна зменшити, називається *областю значень дробу*.

Розглянемо деякі ознаки збіжності МГЛД і покажемо, що за їх виконання формальні розвинення розв'язків матричних рівнянь збігаються до самих розв'язків [8-10].

Твердження 3. МГЛД з елементами, що задовольняють умови

$$\left\|b_{k(s)}^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\left\|a_{k(s)}\right\|+n}\quad(s=1,2,3,...) \qquad (9)$$

абсолютно збігається, а його значення належать області $\left\|z\right\|\leq n$.

Встановимо, що розв'язок матричного рівняння (3), існує і належить інтервалу $[-n,n]$ та обчислюється за відповідною рекурентною формулою. Перевіримо також, чи достатньо виконання умови збіжності цього МГЛД для збіжності його до розв'язку відповідного матричного рівняння.

Введемо до розгляду ГЛД з дійсними елементами:

$$\hat{D}=\hat{b}_0+\underset{s=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{k_s=1}^{n}\frac{\hat{a}_{k(s)}}{\hat{b}_{k(s)}}, \qquad (10)$$

де

$$\begin{cases}\hat{a}_{k(s)}=-\left\|a_{k(s)}\right\|,\\ \hat{b}_{k(s)}=\left\|a_{k(s)}\right\|+n,\end{cases}\qquad \text{для всіх } s=\overline{1,p};\ k_s=\overline{1,n}. \qquad (11)$$

Твердження 4. Якщо в ГЛД (10) компоненти $\hat{a}_{k(s)}$ і $\hat{b}_{k(s)}$ для всіх $s=\overline{1,p};\ k_s=\overline{1,n};\ l=1,2,3,...$ задовольняють співвідношення (11), то

$$\hat{D}_{k(s),s+1} > \hat{D}_{k(s),s+2} > \hat{D}_{k(s),s+3} > ... > \hat{D}_{k(s),s+l} > ... \tag{12}$$

Наслідок 3. Поклавши у співвідношенні (12) $s = 0$ одержимо систему нерівностей для підхідних дробів $\hat{D}_0 > \hat{D}_1 > \hat{D}_2 > \hat{D}_3 > ... > \hat{D}_k > ...$.

Твердження 5. Якщо в ГЛД (10) компоненти $\hat{a}_{k(s)}$ і для всіх $s=\overline{1,p}$; $k_s=\overline{1,n}$ задовольняють співвідношення (11), то $\left|\hat{D}_{m+2}-\hat{D}_{m+1}\right| < \left|\hat{D}_{m+1}-\hat{D}_m\right|$.

Твердження 6. Якщо розв'язок поліноміального матричного рівняння існує і належить інтервалу $[-n, n]$, то розвинення за деякою рекурентною процедурою у МГЛД з елементами, що задовольняють умови $\left\|b_{k(s)}^{-1}\right\| \le 1\Big/\left(\left\|a_{k(s)}\right\|+n\right)$ $\left(1\le k_s\le n;\ s=1,2,3,...\right)$ збігається до цього розв'язку.

Твердження 7 [11]. МГЛД з елементами, що задовольняють умову $\left\|b_{k(s)}^{-1}\right\| \le 1\Bigg/\left(1+\sum\limits_{k_{s+1}=1}^{n}\left\|a_{k(s+1)}\right\|\right)$ $(s=1,2,3,...)$, абсолютно збігається, а його значення належать області $\left\|z-b_0\right\| \le \sum\limits_{k_1=1}^{n}\left\|a_{k_1}\right\|$.

Нехай розв'язок матричного рівняння (8), належить інтервалу $\left[-\sum\limits_{k_1=1}^{n}\left\|a_{k_1}\right\|, \sum\limits_{k_1=1}^{n}\left\|a_{k_1}\right\|\right]$ і шукається за відповідною рекурентною схемою. Перевіримо, чи достатньо виконання умови збіжності цього МГЛД для збіжності його до розв'язку.

Розглянемо ГЛД з дійсними елементами:

$$\hat{D} = \hat{b}_0 + \mathop{D}_{s=1}^{\infty}\sum_{k_s=1}^{n}\frac{\hat{a}_{k(s)}}{\hat{b}_{k(s)}}, \tag{13}$$

де

$$\begin{cases} \hat{a}_{k(s)} = -\left\|a_{k(s)}\right\|, \\ \hat{b}_{k(s)} = \sum\limits_{k_{s+1}=1}^{n}\left\|a_{k(s+1)}\right\| + 1, \end{cases} \tag{14}$$

для всіх $s=\overline{1,p};\ \ k_s=\overline{1,n}$.

Твердження 8. Якщо в ГЛД (13) компоненти $\hat{a}_{k(s)}$ і $\hat{b}_{k(s)}$ для всіх $s=\overline{1,p};\ \ k_s=\overline{1,n}$ задовольняють співвідношення (14), то справджуються нерівності

$$\hat{D}_{k(s),s+1} > \hat{D}_{k(s),s+2} > \hat{D}_{k(s),s+3} > \ldots > \hat{D}_{k(s),s+l} > \ldots \; .$$

Твердження 9. Якщо в ГЛД

$$\hat{D}_{m+2} - \hat{D}_{m+1} = \tilde{D}_{m+1} - \tilde{D}_m = (-1)^m \sum_{k(m+1)=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \tilde{D}_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=0}^{m} \tilde{D}_{k(m+1-j),m+1}^{-1} \hat{a}_{k(m+1-j)}$$

компоненти $\hat{a}_{k(s)}$ і $\hat{b}_{k(s)}$ для всіх $s = \overline{1,p};\ k_s = \overline{1,n}$ задовольняють $\left\| D_{k(s),m}^{-1} \right\| \le \hat{D}_{k(s),m}^{-1} < \left\| a_{k(s)} \right\|^{-1}$, то $\left| \hat{D}_{m+2} - \hat{D}_{m+1} \right| < \left| \hat{D}_{m+1} - \hat{D}_m \right|$.

Твердження 10. Якщо розв'язок поліноміального матричного рівняння існує та належить інтервалу $[-n, n]$, то розвинення за деякою ітераційною процедурою у МГЛД з елементами, що задовольняють умови $\left\| b_{k(s)}^{-1} \right\| \le 1 \Big/ \left(1 + \sum_{k_{s+1}=1}^{n} \left\| a_{k(s+1)} \right\| \right)$ $(s = 1,2,3\ldots)$, збігається до цього розв'язку.

3. Еквівалентні перетворення МГЛД

Розглянемо ГЛД

$$D^* = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}^*}{\left| b_{k_1}^* \right.} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}^*}{\left| b_{k_1k_2}^* \right.} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_i}^*}{\left| b_{k_1k_2\ldots k_i}^* \right.} + \ldots =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}^*}{\left| b_{k_1}^* \right.} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k(2)}^*}{\left| b_{k(2)}^* \right.} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k(i)}^*}{\left| b_{k(i)}^* \right.} + \ldots \; . \tag{15}$$

Твердження 11. Нехай дроби (2) та (15) еквівалентні таким чином, що існує послідовність несингулярних обмежених сталих $\left\{ r_{k_1k_2\ldots k_s} \right\}$, яка для всіх $s = \overline{1,p}$; $k_s = \overline{1,n}$ задовольняє умови $a_{k(s)}^* = r_{k(s)} a_{k(s)} r_{k(s-1)}$, $b_{k(s)}^* = b_{k(s)} r_{k(s)}$. Тоді збіжність дробу (15) до розв'язку відповідного матричного рівняння достатня для збіжності дробу (2) до розв'язку у випадку $\left\| r_0^{-1} \right\| < 1$.

4. Ознаки збіжності для МГЛД спеціального вигляду

Твердження 11 дозволяє отримати низку зручних достатніх ознак збіжності для дробів із матричними елементами спеціального вигляду. Розглянемо МГЛД, еквівалентний нескінченому дробу (2)

$$\sum_{k_1=1}^{N} \frac{\rho_{k_1} a_{k_1}}{\left| b_{k_1} \rho_{k_1} \right.} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{\rho_{k(2)} a_{k(2)} \rho_{k_1}}{\left| b_{k(2)} \rho_{k(2)} \right.} + \ldots + \sum_{k_s=1}^{N} \frac{\rho_{k(s)} a_{k(s)} \rho_{k(s-1)}}{\left| b_{k(s)} \rho_{k(s)} \right.} + \ldots \tag{16}$$

Твердження 12. Якщо існують такі дійсні $\rho_{k(i)} > 0$, що для елементів дробу (2) виконуються нерівності

$$\left\| b_{k(s)}^{-1} a_{k(s)} \right\| \le \frac{\rho_{k_1} - n}{\rho_{k_1}}, \quad \left\| b_{k(s-1)}^{-1} b_{k(s)}^{-1} a_{k(s)} \right\| \le \frac{\rho_{k(s)} - n}{\rho_{k(s-1)} \rho_{k(s)}},$$

де $s = 1, 2, 3, ...; k_s = \overline{1, n}$, то МГЛД (16) є збіжний до розв'язку відповідного матричного рівняння.

Нехай у співвідношенні (2) всі $b_{k(s)} = E$, а у співвідношенні (16) $\rho_{k(s)} = 2n$, тоді для МГЛД

$$\sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}|}{|E} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k(2)}|}{|E} + ... + \sum_{k_s=1}^{N} \frac{a_{k(s)}|}{|E} + ... \tag{17}$$

одержимо таку достатню ознаку збіжності.

Твердження 13. Виконання умови $\left\| a_{k(s)} \right\| \le 1/(4n)$ $\left(s = 1, 2, 3, ...; k_s = \overline{1, n} \right)$ є достатнім для збіжності МГЛД (17) до розв'язку відповідного матричного рівняння.

Нехай у співвідношенні (16) всі $a_{k(s)} = E$ і $\rho_{k(2s)} = \rho_{k(2s-1)} = n \left\| b_{k(2s)} \right\|$. Тоді на основі *твердження 10* для МГЛД

$$\sum_{k_1=1}^{N} \frac{E|}{|b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{E|}{|b_{k(2)}} + ... + \sum_{k_s=1}^{N} \frac{E|}{|b_{k(s)}} + ... \tag{18}$$

отримаємо такі достатні ознаки.

Твердження 14. Виконання однієї з умов

$$\left\| b_{k(2s-1)}^{-1} b_{k(2s)}^{-1} \right\| \le \frac{n \left\| b_{k(2s)} \right\| - n}{\left\| b_{k(2s)}^{2} \right\| n^2}, \quad \left\| b_{k(2s-1)}^{-1} \right\| + \frac{1}{n} \left\| b_{k(2s)}^{-1} \right\| \le \frac{1}{n}, \quad \left\| b_{k(2s-1)}^{-1} \right\| + \left\| b_{k(2s)}^{-1} \right\| \le \frac{1}{n}$$

є достатнім для збіжності МГЛД (18) до розв'язку відповідного матричного рівняння.

Твердження 15. Якщо існують такі дійсні $\rho_{k(s)}$, що для елементів дробу (16) виконуються нерівності

$$\sum_{k_1=1}^{N} \left\| b_{k_1} \rho_{k_1} a_{k_1} \right\| \le \rho_{k_1} - 1, \quad \sum_{k_s=1}^{N} \left\| b_{k(s)}^{-1} b_{k(s-1)}^{-1} \rho_{k(s)} a_{k(s)} \rho_{k(s-1)} \right\| \le \rho_{k(s-1)} - 1, \tag{19}$$

то МГЛД (18) збігається до розв'язку відповідного матричного рівняння.

Покладемо у співвідношенні (16) $b_{k(s)} = E$, $\rho_{k(s)} = 2$, і одержимо достатню ознаку збіжності МГЛД.

Твердження 16. Виконання умови $\sum_{k_s=1}^{n} \left\| a_{k(s)} \right\| \le \frac{1}{4}$ $\left(s = 1, 2, 3, ...; k_s = \overline{1, n} \right)$ є достатнім для збіжності дробів вигляду (17) до розв'язку відповідного рівняння.

Нехай $a_{k(s)} = E$ і $\rho_{k(2s-1)} = \rho_{k(2s)} = \left\| b_{k(2s-1)} \right\| > 1$. Тоді на основі умови збіжності $\hat{D}_{m+1} - \hat{D}_m = (-1)^m \sum_{k(m+1)=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \hat{D}_{k(j),m}^{-1} \prod_{j=0}^{m} \hat{D}_{k(m+1-j),m+1}^{-1} \hat{a}_{k(m+1-j)}$ одержуємо ще одну достатню ознаку збіжності, яку легко можна перевірити.

Твердження 17. Виконання умови $\sum_{k_s=1}^{N} \left\| b_{k(2s)}^{-1} b_{k(2s-1)} \right\| < \left\| b_{k(2s-1)} \right\| - 1$ або $\frac{1}{\left\| b_{k(2s-1)} \right\|} + \sum_{k_s=1}^{N} \left\| b_{k(s)}^{-1} \right\| \le 1 \left(s = 1, 2, \ldots; k_{2s} = \overline{1, N}; k_{2s-1} = \overline{1, N} \right)$ є достатнім для збіжності дробів вигляду (17) до розв'язків відповідних матричних рівнянь.

Висновки. Запропоновані достатні ознаки збіжності є прості та зручні у використанні. Вони можуть знайти практичне застосування, зокрема у системах комп'ютерної алгебри, а також послужити основою для одержання інших достатніх ознак збіжності МГЛД до розв'язків відповідних матричних рівнянь.

Література

[1] *Григорків В. С.* Моделювання еколого-економічної взаємодії: Навч. пос. — Чернівці: Рута, 2007. — 84 с.

[2] *Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М.* Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2006. — 304 с.

[3] *Недашковский Н. А., Крошка Т. И.* О решении одного класса нелинейных балансовых моделей межотраслевого эколого-экономического взаимодействия // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 5. — С. 21-32.

[4] *Крошка Т. И., Недашковский Н. А.* Вычислительные алгоритмы для линейных балансовых моделей эколого-экономического взаимодействия // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 17-28.

[5] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[6] *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — Москва: Наука, 1983. — 311 с.

[7] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: «Наука», 1976. — 543 с.

[8] *Недашковский Н. А.* Достаточные признаки сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей // Математические методы и физико-математические поля. — Киев: Наукова думка, 1984. — Вып. 19. — С. 29-33.

[9] *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Математические методы и физико-математические поля. — Киев: Наукова думка, 1984. — Вып.20. — С. 27-31.

[10] *Недашковський М. О.* Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів // Математичні методи та фізико-механічні поля. — Львів, 2003. — Т. 46, № 4. — С. 50-56.

[11] *Тыртышников Е. Е.* Методы численного анализа. — Москва: Издательский центр «Академия», 2007. — 320 с.

Convergence of approximate solutions of nonlinear problem Leontief-Ford model

Mykola Nedashkovskyy, Tetyana Kroshka

The paper highlights numerical methods for computing solutions of nonlinear problem Leontiev-Ford model using the matrix branched continued fractions. An efficient and convenient algorithms in the development of matrix branched continued fraction solutions to this problem were offered. It was studied the problem convergence of matrix branched continued fractions to solutions to the nonlinear Leontiev-Ford model. Easy to use matrix sufficient evidence series of criteria convergence branched continued fractions to the solutions nonlinear problem Leontiev-Ford model were received.

Сходимость приближенных решений нелинейной задачи для модели Леонтьева-Форда

Николай Недашковский, Татьяна Крошка

Рассмотрены численные методы определения решений нелинейной задачи для модели Леонтьева-Форда с использованием аппарата матричных ветвящихся цепных дробей. Предложены эффективные и удобные алгоритмы разложения в матричную ветвящуюся цепную дробь решений этой задачи. Рассмотрена проблема сходимости матричных ветвящихся цепных дробей к решениям нелинейной модели Леонтьева-Форда. Получен ряд удобных в использовании достаточных признаков сходимости матричных ветвящихся цепных дробей к решениям нелинейной задачи для модели Леонтьева-Форда.

Представлено професором П. Малачівським

Отримано 11.11.13