

## Ідентифікація зовнішніх навантажень, рівень значень яких наближається до критичних

Наталія Ободан<sup>1</sup>, Наталія Гук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. т. н., професор, Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, e-mail: vobodan@mail.ru

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, e-mail: nataly-guk@gambler.ru

*Розглядається задача ідентифікації функції зовнішнього навантаження, рівень значень якої наближається до критичного. Обернена задача формулюється у варіаційному формулюванні, пропонується спосіб формування функціонала-нев'язки, який забезпечує можливість використання методів локальної оптимізації. Підхід дозволяє відновити функцію навантаження у всьому діапазоні її зміни.*

**Ключові слова:** ідентифікація, тонкостінна оболонка, нелінійний напружено-деформований стан, обернена задача, функціонал.

**Вступ.** Технічний аналіз поточного стану тонкостінних систем у процесі експлуатації вимагає ідентифікації параметрів цих систем на основі результатів спостереження за ними за допомогою результатів вимірювань значень параметрів стану, характерних для поведінки системи в процесі експлуатації. Особливістю цієї проблеми є той факт, що в процесі експлуатації рівень навантажень, що діють у системі, досить високий, при цьому система знаходиться в стані, близькому до критичного. Це означає, що математична модель тонкостінної системи повинна враховувати геометричну та (або) фізичну нелінійність. Зазвичай, сформульовані таким чином задачі ідентифікації параметрів системи розв'язуються методом обернених задач, істотним складником якого є застосування методів оптимізації [1]. Можливість використання цих методів потребує виконання спеціальних умов, що накладаються на властивості функціонала-нев'язки, який підлягає мінімізації, зокрема його коерцитивність.

Отже, особливістю математичної моделі нелінійної тонкостінної системи є те, що забезпечити наявність цієї властивості у разі навантажень у системі, близьких до критичних значень, неможливо. Під час розв'язання прямої задачі про визначення напружено-деформованого стану тонкостінної системи особливою точкою розв'язку можна обійти, розв'язок прямої задачі можна однозначно побудувати з використанням методу продовження за параметром [2]. Проте під час розв'язування оберненої задачі спостерігається необмеженість градієнта функціонала-нев'язки в околі особливої точки розв'язку прямої задачі.

У той же час для сформульованої задачі ідентифікації необхідно отримати розв'язок саме у такому випадку. Далі розглядається формулювання та метод розв'язування оберненої задачі ідентифікації функції зовнішнього навантаження у випадку, якщо рівень її значень наближається до критичного.

### 1. Формулювання задачі

Розглядається тонкостінна циліндрична оболонка, яка займає просторову область  $\Omega$ , знаходиться під дією експлуатаційного навантаження та спостерігається в процесі експлуатації за допомогою вимірювань характерних параметрів напружено-деформованого стану — тангенціального  $\varepsilon_{ij}$  і вигинистого  $\chi_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) складників деформацій у заданих точках її поверхні [3]. Вимірювання значень вказаних параметрів стану формують вектор-функцію  $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}$  і здійснюється за допомогою тензодатчиків, розташованих на верхній і нижній поверхнях оболонки.

Оболонка знаходиться під дією переважаючих стискаючих навантажень, пропорційних деякому параметру  $\lambda$ , значення параметра навантаження є близьким до критичного значення  $\lambda_{кр}$ , у разі досягнення цього значення у системі спостерігається втрата стійкості.

Необхідно ідентифікувати навантаження, що діє на оболонку, за результатами спостереження за характеристиками її напружено-деформованого стану.

### 2. Математична модель задачі

Для розв'язання сформульованої задачі використовуватимемо такі математичні моделі:

1. Деформація тонкостінної циліндричної оболонки, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження у вигляді поверхневих або(і) зосереджених сил  $q$ , описується системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \nabla^4 \tilde{w} - L(\tilde{w}, \tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}_{,xx} = \lambda q, \\ \nabla^4 \tilde{\varphi} + L(\tilde{w}, \tilde{w})/2 + \tilde{w}_{,xx} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

для

$$\mathbf{G}(\tilde{w}, \tilde{\varphi}, \lambda q)|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де  $\tilde{w}$  — функція прогину точок серединної поверхні оболонки;  $\tilde{\varphi}$  — функція

зусиль;  $L(\theta, \psi) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ ;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$ ;

$x, y$  — координатні осі, які співпадають з осями симетрії оболонки;  $z$  — нормаль до поверхні оболонки;  $\mathbf{q}$  — вектор-функція дійсного навантаження  $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ ,

прикладеного в напрямках  $x, y, z$ ;  $\lambda$  — параметр навантаження;  $\mathbf{G}(\tilde{w}, \tilde{\varphi}, \lambda q)|_{\Gamma}$  — заданий диференціальний оператор граничних умов на контурі  $\Gamma$ .

Під час формулювання співвідношень (1), (2) введені безрозмірні змінні —  $x = \bar{x}/L$ ,  $y = \bar{y}/R$ , функції —  $w = \bar{w}/h$ ,  $\varphi = \bar{\varphi}/(Eh^3)$ ,  $q = \bar{q}(1 - \nu^2)/(Eh)$  і параметр  $\varepsilon = h^2/(12R^2)$ , де  $h, R, L$  — товщина, радіус кривизни та довжина оболонки;  $E, \nu$  — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона.

2. Невідома вектор-функція зовнішнього навантаження, визначається з розв'язку задачі мінімізації функціонала, що характеризує середньоквадратичне відхилення між розрахунковими функціями деформацій  $\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}$ , отриманими з використанням співвідношень (1), (2) в точках поверхні оболонки за заданої функції навантаження  $\mathbf{q}$ , і відомими функціями  $\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*$ :

$$\mathbf{q} = \arg \min_{\lambda \mathbf{q} \in \bar{Q}} J, \quad \lambda \mathbf{q} \in \bar{Q}, \quad (3)$$

де

$$J = \int_{\Omega} \left( \varepsilon_{ij}(q) - \varepsilon_{ij}^* \right)^2 + \left( \chi_{ij}(q) - \chi_{ij}^* \right)^2 d\Omega; \quad (4)$$

$\bar{Q}$  — область зміни компонент невідомої вектор-функції навантаження.

Розрахункові значення деформацій  $\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}$  можна отримати з геометричних співвідношень теорії оболонок [4] шляхом підстановки в них розв'язків відповідної прямої крайової задачі (1), (2).

Виходячи з вигляду співвідношення (3), що описує розв'язок оберненої задачі, основними етапами його побудови є розв'язання прямої задачі (1), (2) для заданої функції  $\lambda \mathbf{q}$ , формування функціонала (4) та розв'язання задачі оптимізації (3). Оскільки крайова задача (1), (2) є нелінійна, то у разі наближення значень параметра  $\lambda$  до критичного значення  $\lambda_{кр}$  виникає неєдиність розв'язку прямої задачі, а, отже, розв'язок оберненої задачі (3) не можна побудувати. Ітераційний процес мінімізації функціонала (4) є розбіжний, оскільки градієнт функціонала-нев'язки (4), який визначається чисельно, в цьому випадку необмежений.

### 3. Метод розв'язання

Для усунення вищезазначених труднощів перетворимо систему рівнянь (1), (2), що описує напружено-деформований стан оболонки, до вигляду:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \nabla^4 \tilde{w} - \tilde{\varphi}_{,xx} - L(\tilde{w}, \tilde{\varphi}) = \lambda_{кр} (\tilde{q} - \delta q), \\ \nabla^4 \tilde{\varphi} + \tilde{w}_{,xx} + \frac{1}{2} L(\tilde{w}, \tilde{w}) = 0, \end{cases} \quad \text{для } \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{U}}, \lambda_{кр} \Delta \mathbf{q}) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

де  $\tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{w}, \tilde{\varphi}\}$  — вектор-функція невідомих прямої задачі теорії оболонок (1), (2);  $\tilde{q}$  — задана функція навантаження,  $\max \tilde{q} = 1$ ;  $\delta q$  — невідомий приріст до значення

функції навантаження, такий, що величина  $q = \tilde{q} - \delta q$  характеризує дійсне навантаження;  $\lambda_{кр}$  — параметр, що відповідає власному значенню крайової задачі (1), (2).

За дії на оболонку навантаження  $\lambda_{кр} \tilde{q}$  напружено-деформований стан  $\mathbf{U}^0 = \{w^0, \varphi^0\}$  визначається з використанням методу продовження за параметром [2] з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \nabla^4 w^0 - \varphi^0{}_{,xx} - L(w^0, \varphi^0) = \lambda_{кр} \tilde{q}, \\ \nabla^4 \varphi^0 + w^0{}_{,xx} + \frac{1}{2} L(w^0, w^0) = 0, \end{cases} \quad \text{для } \mathbf{G}(\mathbf{U}^0, \lambda_{кр} \mathbf{q}) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Значення параметра  $\lambda_{кр}$  визначається з умови неєдиності розв'язку системи (5), тобто нетривіального розв'язку системи рівнянь [4]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \nabla^4 \bar{w} - \bar{\varphi}{}_{,xx} - L(w^0(\lambda_{кр}), \bar{\varphi}) - L(\varphi^0(\lambda_{кр}), \bar{w}) = 0, \\ \nabla^4 \bar{\varphi} + \bar{w}{}_{,xx} + \frac{1}{2} L(w^0(\lambda_{кр}), \bar{w}) = 0, \end{cases} \quad \text{для } \mathbf{G}(\bar{\mathbf{U}}, \lambda_{кр} \mathbf{q}) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Тут  $\bar{w}, \bar{\varphi}$  — варіації функцій  $w^0, \varphi^0$ .

Введемо нові змінні  $w = \tilde{w} - w^0, \varphi = \tilde{\varphi} - \varphi^0$ , тоді зі співвідношення (5) отримаємо систему для визначення додаткового стану  $\mathbf{U} = \{w, \varphi\}$  у вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \nabla^4 w - \varphi{}_{,xx} - L(w^0, \varphi) - L(\varphi^0, w) - L(w, \varphi) = \lambda_{кр} \delta q, \\ \nabla^4 \varphi + w{}_{,xx} + L(w^0, w) + L(w, w) = 0, \end{cases} \quad \text{для } \mathbf{G}(w^0, \varphi^0) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Лінійна частина рівнянь системи (8) співпадає з умовою неєдиності [4], тобто розв'язок  $\mathbf{U} = \{w, \varphi\} \in$  необмежений. Оскільки  $\lambda_{кр} \ll 1$ , покладемо  $\mu = \lambda_{кр}$  та подамо компоненти вектор-функції  $\mathbf{U} = \{w, \varphi\}$  у вигляді розкладання за степенями малого параметра

$$w = w_0 + \mu w_1 + o(\mu^2), \quad \varphi = \mu \sqrt{\mu} (\varphi_0 + \mu \varphi_1) + o(\mu^3).$$

Введемо порядки відповідних похідних  $\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt[4]{\mu} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} = \sqrt[4]{\mu} \frac{\partial}{\partial y}$ , а також

порядки  $\max \varphi_0 = \mu^{-\alpha}, \max w_0 = \mu^{-\beta}$ , де  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Підставляючи розкладання функцій  $w, \varphi$  за степенями параметра  $\mu$  у співвідношенні (8) з урахуванням порядків похідних і виділяючи доданки при однакових значеннях степеня параметра  $\mu$ , отримаємо послідовність рівнянь для визначення функцій  $w_0$  для  $\mu^0, w_1$  для  $\mu^1$  і так далі у вигляді:

$$\begin{aligned} \mu^0: & \varepsilon^2 \nabla^4 w_0 - L(\varphi^0, w_0) - L(w^0, \varphi_0) - L(w_0, \varphi_0) = \delta q; \\ \mu^1: & \varepsilon^2 \nabla^4 w_1 - \varphi_{1,xx} - L(\varphi_1, w^0) - L(\varphi_0, w_1) - L(\varphi_1, w_0) - L(\varphi^0, w_1) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Додаткові значення функції  $\varphi_0, \varphi_1$  визначаються зі співвідношень:

$$\nabla^4 \varphi_0 + \frac{1}{\mu^2} w_{0,xx} + \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} \left[ L(w_0, w^0) + L(w_0, w_0) \right] = 0;$$

$$\nabla^4 \varphi_1 + \frac{1}{\mu^2} w_{1,xx} + \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} \left[ L(w_1, w^0) + L(w_0, w_1) \right] = 0.$$

Так можна послідовно отримати обмежені розв'язки  $\{w_0, \varphi_0\}, \{w_1, \varphi_1\}$  після попереднього розв'язання системи рівнянь (7) із метою визначення значення параметра  $\lambda_{кр}$ . Розв'язок вказаних рівнянь можна знайти із використанням методу скінченних елементів [5], для визначення  $\lambda_{кр}$  обирається метод продовження за параметром [2]. Отриманий таким чином додатковий розв'язок  $w = \tilde{w} - w^0$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi^0$  є обмежений і визначається порядком величин  $\delta q$  і  $\mu$ .

Оскільки розв'язок  $\mathbf{U}^0 = \{w^0, \varphi^0\}$  не залежить від зовнішнього навантаження, то умова мінімуму функціонала  $J$  набуває вигляду:

$$\min J = \min_{\delta q \in \bar{Q}} \int (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Delta})^2 d\Omega, \quad (10)$$

де  $\boldsymbol{\sigma} = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}$  — вектор-функція, компонентами якої є значення деформацій  $\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}$ , отримані за допомогою співвідношень (1), (2);  $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0$ ;  $\boldsymbol{\sigma}^0 = \{\varepsilon_{ij}^0, \chi_{ij}^0\}$  — вектор-функція деформацій, що характеризує стан  $\mathbf{U}^0 = \{w^0, \varphi^0\}$ ;  $\boldsymbol{\sigma}^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}$  — визначена вектор-функція деформацій. Такий функціонал є обмежений, а, отже, його мінімум можна визначити чисельно із застосуванням методу локальної оптимізації, наприклад, методу Ньютонa [6].

Для побудови чисельного розв'язку оберненої задачі виконується дискретизація невідомих функцій прямої та оберненої задач на області, зайнятій оболонкою, з використанням методу скінченних елементів (МСЕ).

Вводимо сітки: сітка  $X_k, k = \overline{1, K}$ , у вузлах якої задаються значення вектор-функцій  $\mathbf{U}(X_k) = \{w_k, \varphi_k\}$  і навантаження  $\mathbf{q}(X_k) = \{q_{xk}, q_{yk}, q_{zk}\}$ , де  $\mathbf{U}(X_k), \mathbf{q}(X_k)$  — вектори значень відповідних вектор-функцій у вузлах сітки  $X_k$ ; сітка  $X_n, n = \overline{1, N}$ , у вузлах якої спостерігаються або задаються значення вектор-функції  $\boldsymbol{\sigma}^*(X_n) = \{\varepsilon_{ijn}^*, \chi_{ijn}^*\}$ ; сітка  $X_p, p = \overline{1, P}$  (може бути нерівномірною), у вузлах якої визначаються значення невідомої функції оберненої задачі  $\delta \mathbf{q}(X_p) = \{\delta q_p\}$ .

Після виконання процедури дискретизації функціонал (4) набуває вигляду:

$$J = \sum_{n=1}^N \left( \varepsilon_{ijn}(q) - \varepsilon_{ijn}^* - \varepsilon_{ijn}^0 \right)^2 + \left( \chi_{ijn}(q) - \chi_{ijn}^* - \chi_{ijn}^0 \right)^2.$$

Невідомі функції прямої й оберненої задачі на елементі задаються за допомогою апроксимацій через їх вузлові значення. Після виконання відповідної процедури інтегрування та підсумовування матриць елементів отримаємо систему алгебраїчних рівнянь [5]:

$$\mathbf{KW} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

де  $\mathbf{W} = \{u_{xk}, u_{yk}, w_k\}^T$ ,  $k = \overline{1, K}$  — вектор вузлових переміщень у напрямках  $x, y, z$ ;

$\mathbf{K} = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]$  — матриця жорсткості;  $\mathbf{B}$  — матриця функцій форми;  $\mathbf{D}$  — матриця пружності;  $\mathbf{F}$  — вектор правих частин.

Тангенційні деформації  $\varepsilon_{ij}$  і зміни кривизни поверхні  $\chi_{ij}$  можна отримати шляхом підстановки розв'язку системи (11) у геометричні співвідношення теорії тонкостінних оболонок [2]. Це дає можливість побудувати вектор значень  $\sigma(X_k)$  у вузлах сітки  $X_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , у вигляді  $\sigma(X_k) = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$ . Спільно із заданим вектором результатів вимірювань  $\sigma^*$  та відомим розв'язком  $\sigma^0$  це дозволяє побудувати дискретний аналог функціонала-нев'язки у співвідношенні (10).

Для уточнення компонент невідомого вектора  $\{\delta q_p\}$ , який відповідає розв'язку оберненої задачі, організовується ітераційний процес визначення приростів до компонент вектора початкового наближення у вигляді:

$$\Delta \delta \mathbf{q}^{(d)} = -\mathbf{Q}|_{\delta \mathbf{q}^{(d-1)}} \Psi(\delta \mathbf{q}^{(d-1)}). \quad (12)$$

Тут  $\mathbf{Q} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$ ;  $d$  — номер кроку ітераційного процесу методу Ньютона. Компоненти матриці градієнта  $\mathbf{G}$  визначаються чисельно з використанням різницевого аналога, така заміна не порушує збіжності ітераційного процесу методу Ньютона:

$$\mathbf{G} = \left\| \frac{\partial \Psi(X_n, \delta \mathbf{q})}{\partial \delta q_p} \right\| = \frac{\sigma(X_n, \delta q_p + \Delta \delta q_p) - \sigma(X_n, \delta q_p)}{\Delta \delta q_p},$$

де  $\Psi(X_n, \delta \mathbf{q}) = (\sigma(X_n, \delta \mathbf{q}) - \Lambda(X_n))$  — лінеаризована функція нев'язки;  $\Lambda(X_n) = (\sigma^*(X_n) - \sigma^0(X_n, \lambda_{кр} \tilde{q}))$ ;  $\Delta \delta q_p$  — приріст до  $p$ -ої компоненти вектора невідомих оберненої задачі  $\{\delta q_p\}$ .

#### 4. Алгоритм розв'язування оберненої задачі

Запропонований метод розв'язування оберненої задачі було реалізовано у вигляді такого алгоритму:

*Крок 1.* Задати значення компонент початкового наближення до вектора навантаження  $\lambda \tilde{q}$ .

*Крок 2.* Визначити значення параметра  $\lambda_{кр}$  і стан оболонки  $\mathbf{U}^0 = \{w^0, \phi^0\}$ , що відповідає навантаженню  $\lambda_{кр} \tilde{q}$ , з розв'язку прямої задачі (1), (2) з використанням системи рівнянь МСЕ (11).

*Крок 3.* Визначити додатковий розв'язок  $\mathbf{U} = \{w, \phi\}$ , де  $w = \tilde{w} - w^0$ ,  $\phi = \tilde{\phi} - \phi^0$ , шляхом послідовного розв'язування системи рівнянь (9).

*Крок 4.* Сформувати функціонал оберненої задачі у вигляді (10).

*Крок 5.* Побудувати матрицю Фреше  $\mathbf{G} = \|\partial \Psi(X_n, \delta \mathbf{q}) / \partial \delta q_z\|$ .

*Крок 6.* Визначити компоненти вектора приростів  $\{\Delta \delta q_z\}$  в ітераційній процедурі (12) і вектор  $\{\delta q_z\}$ .

*Крок 7.* Перевірити виконання умови  $\|\delta \mathbf{q}^{(d+1)} - \delta \mathbf{q}^{(d)}\| \leq \gamma$ , якщо виконується, то кінець ітераційного процесу, інакше — перейти до кроку 2.

## 5. Аналіз результатів

Запропонований підхід до розв'язування оберненої задачі було застосовано для відновлення близьких до рівномірного та локалізованих навантажень, що діють на тонкостінну оболонку. Аналіз було проведено для граничних умов, які відповідають шарнірному опираючому контуру Г. Геометричні параметри оболонки такі:  $L/R = 4$ ,  $R/h = 200$ . Розподіл нерівномірного поперечного зовнішнього тиску відповідає законам:

$$q = \lambda(a + b \cos y)^g; \quad (13)$$

$$q = \lambda e^{-\eta y^2}. \quad (14)$$

Для вказаних видів розподілу величини  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\eta$ ,  $g$  є параметрами та визначають характер розподілу навантаження, при цьому вважається, що навантаження зростає пропорційно параметру  $\lambda$ , який відповідає рівню навантаження. Ідентифікація нерівномірно розподіленого зовнішнього тиску, що відповідає розподілу (13) з параметрами  $a = b = 0,5$ ;  $g = 4$ , виконувалася для різних рівнів діючого навантаження, значення параметра навантаження дорівнювали  $\lambda = 0,4 \lambda_{кр}$  і  $\lambda = 0,9 \lambda_{кр}$ .

Значення  $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}$  для кожної з розглянутих обернених задач були отримані з розв'язку прямої задачі (1), (2) за заданого розподілу навантаження та відомих значень параметрів цього розподілу.

Для розглянутого розподілу функції навантаження у разі низького рівня навантаження використання функціонала (4) дозволяє отримати задовільний результат ідентифікації за умови належного вибору початкового наближення. На рис. 1 наведено результати виконання ітераційної процедури для випадку, якщо значення параметра навантаження  $\lambda = 0,4 \lambda_{кр}$ , тут початкове наближення позначене пунктирною лінією, дійсний розподіл функції навантаження — тонкою суцільною, результат виконання трьох ітерацій — штрих-пунктирною, результат ідентифікації — суцільною жирною лінією.

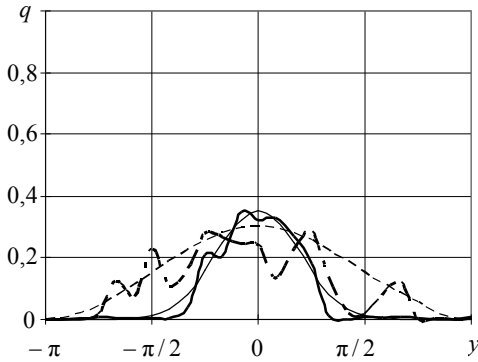


Рис. 1. Результат ідентифікації неоднорідного зовнішнього стисання (розподіл (13) з параметрами  $a = b = 0,5$ ;  $\lambda = 0,35$ ;  $g = 4$ ) з використанням функціонала (4)

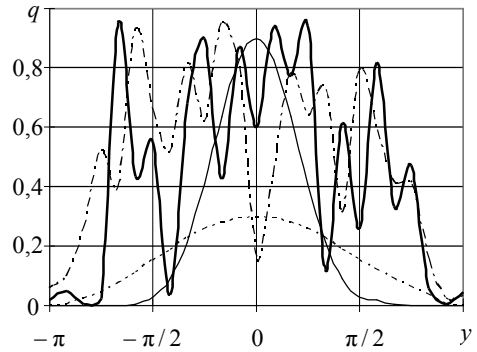


Рис. 2. Результат ідентифікації неоднорідного зовнішнього стисання (розподіл (13) з параметрами  $a = b = 0,5$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $g = 4$ ) з використанням функціонала (4)

Під час відновлення цієї ж функції навантаження  $y$  разі наближення її значень до рівня критичних ( $\lambda = 0,9 \lambda_{кр}$ ) виконання ітераційної процедури з використанням функціонала (4) не призводить до позитивних результатів, збіжності результатів, отриманих на ітераціях, до дійсних значень функції навантаження не спостерігається. Зі збільшенням номера ітерації отримані наближення до розв'язку продовжують носити сильно осцилюючий характер (на рис. 2 результат виконання семи ітерації позначено суцільною жирною лінією).

Далі відновлення цього ж навантаження для значень параметра  $\lambda = 0,9 \lambda_{кр}$  виконувалося з використанням в ітераційній процедурі мінімізації функціонала (10). Результат ідентифікації наведено на рис. 3, тут дійсний розподіл функції навантаження позначено тонкою суцільною лінією, результат виконання двох ітерацій — штрих-пунктирною, результат ідентифікації — суцільною жирною лінією. Спостерігається збіжність результатів виконання ітераційного процесу до дійсних значень функції навантаження, результат ідентифікації, отриманий після виконання п'яти ітерацій процедури (12), добре відображає характер дійсної функції, максимальна похибка відновлення компонент вектора невідомих параметрів оберненої задачі не перевищує 6 %.

На рис. 4 для розглянутих ітераційних процедур відновлення функції навантаження (13) з параметрами  $a = b = 0,5$ ;  $g = 4$  показано поведінку середньоквадратичної норми різниці точного та наближеного розв'язків на ітераціях, пунктирна лінія характеризує ітераційну процедуру відновлення функції навантаження для значень параметра навантаження  $\lambda = 0,4 \lambda_{кр}$ , яка виконується з використанням функціонала (4), штрих-пунктирна крива — аналогічну процедуру для  $\lambda = 0,9 \lambda_{кр}$ , суцільна жирна лінія відповідає ітераційній процедурі відновлення функції навантаження для значень параметра навантаження  $\lambda = 0,9 \lambda_{кр}$ , яка виконується з використанням функціонала (10).

Аналогічні особливості ітераційного процесу спостерігалися і для випадку, коли відновлювалося локалізоване зовнішнє навантаження, що відповідає розподілу (14), із параметрами  $\lambda = 0,9$ ;  $\eta = 7$ .



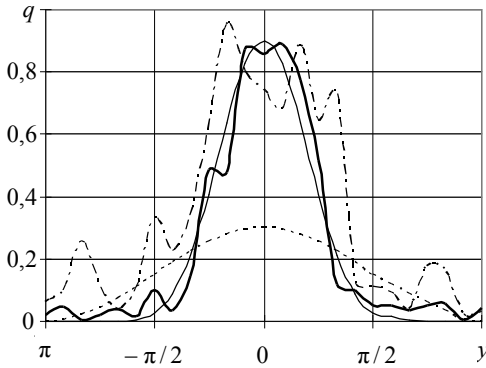


Рис. 3. Результат ідентифікації неоднорідного зовнішнього стискання  $q$  (розподіл (13) з параметрами  $a = b = 0,5$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $g = 4$ ) з використанням функціонала (10)

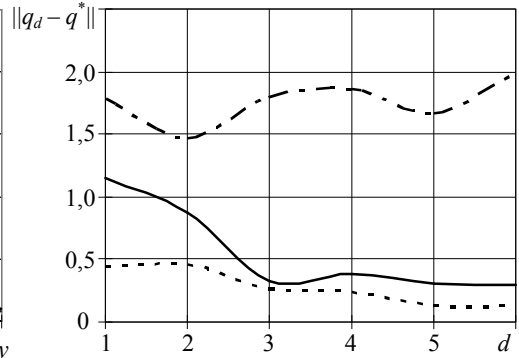


Рис. 4. Залежність середньоквадратичної норми різниці розв'язків, отриманих на ітераціях, і дійсного розв'язку від номера ітерації

У разі дії навантаження, рівень якого наближався до критичних значень, ідентифікація вектора невідомих в ітераційному процесі (12) виявилася можливою тільки за використання функціонала (10).

**Висновки.** Запропонований підхід дозволяє ідентифікувати функцію зовнішнього навантаження, рівень значень якої наближається до критичного. Врахування особливостей нелінійного напружено-деформованого стану оболонки та відповідний вид функціонала, сформульованого для визначення приростів до функції навантаження, забезпечує збіжність процедури ідентифікації. Порівняльний аналіз результатів обчислювального експерименту показав, що з використанням запропонованого підходу можливе відновлення функції зовнішнього навантаження в усьому діапазоні її зміни.

## Література

- [1] Карчевский А. Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 139-149.
- [2] Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования. — Москва: Наука, 1988. — 230 с.
- [3] Ободан Н. І., Гук Н. А. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2011. — Вип. № 1. — С. 47-50.
- [4] Ворovich И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — Москва: Наука, 1989. — 373 с.
- [5] Bathe K., Wilson E. L. Numerical method in finite element analysis. — Москва: Наука, 1985. — 648 с.
- [6] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — Москва: Наука. — 1988. — 549 с.

## **Identification of external loads, the level values of which is approaching to critical**

Natalia Obodan, Natalia Guk

*The problem of the identification of external load function, the level of its values being approaching to critical, is considered. The inverse problem is formulated in the variation formulation, method of forming of the functional-discrepancy, which provides an opportunity of application of methods of local optimization, is offered. The approach allows identifying the external load function over the whole of range of its alteration.*

## **Идентификация внешних нагрузок, уровень значений которых приближается к критическим**

Наталия Ободан, Наталия Гук

*Рассматривается задача идентификации функции внешней нагрузки, уровень значений которой приближается к критическому. Обратная задача формулируется в вариационной постановке, предложен способ формирования функционала-невязки, обеспечивающий возможность применения методов локальной оптимизации. Подход позволяет восстанавливать функцию нагрузки во всем диапазоне изменения.*

Представлено професором Б. Герою

Отримано 14.05.13