УДК 539.3

Побудова розв'язків базових крайових задач просторової теорії пружності з використанням голоморфних функцій

Віктор Пабирівський[1], Неля Пабирівська[1], Володимир Гладун[1]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: pabvic@ukr.net, nelyapab@gmail.com, v_hladun@yahoo.com

Ця робота стосується розробки методики побудови базових розв'язків задач просторової теорії пружності. В основі цієї методики є подання комплексного вектора переміщень і тензора напружень через скалярну та векторну голоморфні функції двох комплексних змінних та формулювання комплексно-спряжених крайових задач на вище згадані функції. Розроблено алгоритм побудови базових станів для комплексного тензора напружень порядку n шляхом подання скалярної та векторної голоморфних функцій у формі многочленів порядку n за степенями комплексних змінних z_1 і z_2.

Ключові слова: тензор напружень, вектор переміщень, базові розв'язки, умови Коші-Рімана, крайові задачі, голоморфна функція.

Вступ. У роботі [1] розроблено методику формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних. В основі такої методики лежить подання вектора переміщень у формі Папковича-Нейбера через скалярну та векторну гармонічні функції [2, 3], а також шляхом узагальнення умов Коші-Рімана вектор переміщень і тензор напружень подаються через скалярну $\Phi_0(z_1, z_2)$ та векторну $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ голоморфні функції двох комплексних змінних.

У цій праці запропоновано методику побудови базових розв'язків просторових задач теорії пружності на основі подання вищезгаданих голоморфних функцій у формі многочленів порядку n за степенями комплексних змінних z_1 і z_2. Сформульовано відповідні граничні умови для базових розв'язків і сконкретизовано додатково інтегральні умови рівності нулеві головного моменту вектора напружень на бічній поверхні тіла.

1. Вихідні співвідношення та формулювання крайових задач у голоморфних функціях від двох комплексних змінних

Розглядається деформівне пружне тверде тіло $K \bigcup \partial K$, яке в початковому ненавантаженому стані бієктивно відображається на область $X \bigcup \partial X$ евклідового простору. Тіло знаходиться під дією стаціонарного силового навантаження, прикладеного до його бокової поверхні ∂X.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2013, вип. 18, 146-156

У роботі [1] на основі зображення вектора переміщень у формі Папковича-Нейбера через скалярну та векторну гармонічні функції [2, 3] та шляхом узагальнення умов Коші-Рімана комплексний вектор переміщень $\vec{w}(z_1, z_2, z_3)$ та комплексний тензор напружень $\hat{P}(z_1, z_2, z_3)$ подано через голоморфні функції $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ двох комплексних змінних (z_1, z_2) [4]:

$$\begin{aligned}
&\vec{w}(z_1, z_2, z_3) = \vec{\nabla}^*\Phi_0(z_1, z_2) + \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1, z_2)\right)\times \\
&\times\vec{r}(z_1, z_2, z_3) - (3 - 4\nu)\vec{\Phi}(z_1, z_2),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{P}(z_1, z_2, z_3) = 2\mu\Big[\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^*\Phi_0(z_1, z_2) + \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1, z_2)\right)\times \\
&\times\vec{r}(z_1, z_2, z_3) - (1 - 2\nu)\left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1, z_2) + \vec{\Phi}(z_1, z_2) \otimes \vec{\nabla}^*\right) - \\
&-2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\Phi}(z_1, z_2)\right)\hat{I}\Big],
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\vec{\nabla}^* \equiv \vec{e}_i\nabla_i^* = \vec{e}_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \vec{e}_2\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \dfrac{\partial}{\partial z_2}\right) + \vec{e}_3\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)$; $\Delta \equiv \vec{\nabla}^* \cdot \vec{\nabla}^* = 2i\dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}$ — оператор Лапласа;

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(z_1, z_2, z_3) = \frac{(1+i)}{2}\Big[(z_1 - iz_2 - z_3)\vec{e}_1 + (z_2 - iz_3 - z_1)\vec{e}_2 + \\
&+(z_3 - iz_1 - z_2)\vec{e}_3\Big] \equiv r_k\vec{e}_k \quad \left(k = \overline{1,3}\right).
\end{aligned}$$

Сформульовану основну крайову задачу для комплексного тензора напружень $\hat{P}(z_1, z_2, z_3)$ (2) зведено до знаходження голоморфних функцій $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$, які задовольняють рівняння Лапласа:

$$\Delta\Phi_0(z_1, z_2) = 0, \quad \Delta\vec{\Phi}(z_1, z_2) = 0, \tag{3}$$

крайові умови:

$$\begin{aligned}
&\vec{P}_n(z_1, z_2, z_3) \equiv \left(\vec{n} \cdot \hat{P}\right)\Big|_{\partial X} = 2\mu\Big[\vec{n} \cdot \Big(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^*\Phi_0(z_1, z_2) + \\
&\left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1, z_2)\right)\vec{r}(z_1, z_2, z_3) - (1 - 2\nu)\Big(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1, z_2) + \\
&+\vec{\Phi}(z_1, z_2) \otimes \vec{\nabla}^*\Big) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\Phi}(z_1, z_2)\right)\hat{I}\Big)\Big]\Big|_{\partial X} = \vec{P}_n^+(z_1, z_2, z_3),
\end{aligned} \tag{4}$$

а також відповідні інтегральні умови статичної рівноваги пружного тіла:

$$\int\limits_{\partial X}\left(\vec{r} \times \vec{P}_n^+\right)d\Sigma = 0. \tag{5}$$

2. Загальна схема побудови розв'язків методом розвинення за базовими станами

Вихідним для формулювання базових крайових задач просторової теорії пружності є подання голоморфних функцій $\Phi_0(z_1,z_2),\vec{\Phi}(z_1,z_2)$ у формі многочленів порядку n за степенями комплексних змінних z_1 і z_2 [4]:

$$\Phi_0^{(n)}(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{n}Q_0^{(k)}(z_1,z_2),\qquad \vec{\Phi}^{(n)}(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{n}\vec{Q}^{(k)}(z_1,z_2),\tag{6}$$

де

$$Q_0^{(k)}(z_1,z_2)=\sum_{j=0}^{k}a^{((k-j)j)}z_1^{k-j}z_2^{j},$$

$$\vec{Q}^{(k)}(z_1,z_2)=\sum_{j=0}^{k}\vec{b}^{((k-j)j)}z_1^{k-j}z_2^{j}\tag{7}$$

— однорідні многочлени степеня k за комплексними змінними z_1 і z_2;

$$a^{((k-j)j)}=\alpha_{(k-j)j}+i\beta_{(k-j)j},\quad \vec{b}^{((k-j)j)}=b_m^{((k-j)j)}\vec{e}_m=\left(\xi_m^{((k-j)j)}+i\eta_m^{((k-j)j)}\right)\vec{e}_m,$$

$\alpha_{(k-j)j},\beta_{(k-j)j},\xi_m^{((k-j)j)},\eta_m^{((k-j)j)}$ — дійсні числа; $m=\overline{1,3}$; $j,k=\overline{0,n}$; $n\in N$.

У межах цього подання однорідні многочлени степеня k $Q_0^{(k)},\vec{Q}^{(k)}$ задовольняють рівняння Лапласа (3)

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(k)}(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}=0,\qquad \frac{\partial^2\vec{Q}^{(k)}(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}=0.\tag{8}$$

Якщо використати подання (7) для однорідних многочленів $Q_0^{(k)}$ та $\vec{Q}^{(k)}$, то співвідношення (8) набувають вигляду «k-арних» (одинарна, бінарна, триарна і т. д.) форм стосовно незалежних комплексних змінних z_1 і z_2

$$\sum_{j=0}^{k}j(k-j)a^{((k-j)j)}z_1^{k-j-1}z_2^{j-1}=0,\tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{k}j(k-j)\vec{b}^{((k-j)j)}z_1^{k-j-1}z_2^{j-1}=0.\tag{10}$$

Для $k=0,1$ співвідношення (9), (10) задовольняються тотожно. Для $k=2$ матимемо

$$a^{(11)}=0,\quad \vec{b}^{(11)}=0.$$

Таким чином, однорідні многочлени степеня $k=2$ $Q_0^{(2)},\vec{Q}^{(2)}$ набувають вигляду

$$Q_0^{(2)}(z_1,z_2)=a^{(20)}z_1^2+a^{(02)}z_2^2,\qquad \vec{Q}^{(2)}(z_1,z_2)=\vec{b}^{(20)}z_1^2+\vec{b}^{(02)}z_2^2.$$

Для $k=3$ зі співвідношень (9), (10) отримаємо

$$2a^{(21)}z_1 + 2a^{(12)}z_2 = 0\,, \qquad 2\vec{b}^{(21)}z_1 + 2\vec{b}^{(12)}z_2 = 0\,.$$

Із властивостей рівності нулю лінійних форм випливає, що

$$a^{(21)}, a^{(12)} = 0\,, \quad \vec{b}^{(21)}, \vec{b}^{(12)} = 0\,.$$

Тоді однорідні многочлени степеня $k = 3$ $Q_0^{(3)}, \vec{Q}^{(3)}$ виглядатимуть

$$Q_0^{(3)}\left(z_1, z_2\right) = a^{(30)}z_1^3 + a^{(03)}z_2^3\,, \qquad \vec{Q}^{(3)}\left(z_1, z_2\right) = \vec{b}^{(30)}z_1^3 + \vec{b}^{(03)}z_2^3\,.$$

Отже, враховуючи співвідношення (9), (10), однорідні многочлени степеня k $Q_0^{(k)}$ і $\vec{Q}^{(k)}$ матимуть таку структуру

$$Q_0^{(k)}\left(z_1, z_2\right) = a^{(k0)}z_1^k + a^{(0k)}z_2^k\,, \tag{11}$$

$$\vec{Q}^{(k)}\left(z_1, z_2\right) = \vec{b}^{(k0)}z_1^k + \vec{b}^{(0k)}z_2^k\,, \qquad k = \overline{0, n}\,. \tag{12}$$

Для побудови розв'язку задачі (3)-(5), для якого тензор напружень $\hat{P}$ є *сталий*, приймаємо, що початковим степенем для однорідного многочлена скалярної голоморфної функції $\Phi_0\left(z_1, z_2\right)$ є степінь $n = 2$:

$$\Phi_0^{(2)}\left(z_1, z_2\right) = a^{(20)}z_1^2 + a^{(02)}z_2^2 \equiv Q_0^{(2)}\left(z_1, z_2\right),$$

а для однорідного многочлена голоморфної векторної функції $\vec{\Phi}\left(z_1, z_2\right)$ $n = 1$:

$$\vec{\Phi}^{(1)}\left(z_1, z_2\right) = \vec{b}^{(10)}z_1 + \vec{b}^{(01)}z_2 \equiv \vec{Q}^{(1)}\left(z_1, z_2\right).$$

Тоді комплексний тензор напружень $\hat{P}\left(z_1, z_2, z_3\right)$

$$\hat{P} = 2\mu\left[\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* Q_0^{(2)} - (1-2\nu)\left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{Q}^{(1)} + \vec{Q}^{(1)} \otimes \vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{Q}^{(1)}\right)\hat{I}\right] \equiv \hat{P}^{(0)}$$

у розгорнутій формі набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\hat{P}^{(0)} = 2\mu\Big\{ & \left[2a^{(20)} - 2(1-\nu)b_1^{(10)} - 2\nu\left(ib_2^{(10)} + b_2^{(01)} + ib_3^{(01)}\right)\right]\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \\
& + \left[-2a^{(20)} + 2a^{(02)} - 2(1-\nu)\left(ib_2^{(10)} + b_2^{(01)}\right) - 2\nu\left(b_1^{(10)} + ib_3^{(01)}\right)\right]\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \\
& + \left[-2a^{(02)} - 2i(1-\nu)b_3^{(01)} - 2\nu\left(b_1^{(10)} + ib_2^{(10)} + b_2^{(01)}\right)\right]\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 + \\
& + \left[2ia^{(20)} - (1-2\nu)\left(ib_1^{(10)} + b_1^{(01)} + b_2^{(10)}\right)\right]\left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1\right) + \\
& + \left[2ia^{(02)} - (1-2\nu)\left(ib_2^{(01)} + ib_3^{(10)} + b_3^{(01)}\right)\right]\left(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2\right) + \\
& + \left[-(1-2\nu)\left(ib_1^{(01)} + b_3^{(10)}\right)\right]\left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1\right)\Big\}.
\end{aligned}$$

Щоб побудувати розв'язок задачі (3)-(5), для якої тензор напружень $\hat{P}$ є *лінійною* функцією за змінними z_1, z_2 і z_3, використаємо однорідний многочлен скалярної голоморфної функції $\Phi_0(z_1,z_2)$ третього степеня

$$\Phi_0^3(z_1,z_2)=a^{(30)}z_1^3+a^{(03)}z_2^3\equiv Q_0^{(3)}(z_1,z_2),$$

і відповідно для однорідного многочлена векторної голоморфної функції $\vec{\Phi}(z_1,z_2)$ — другого степеня

$$\vec{\Phi}^2(z_1,z_2)=\vec{b}^{(20)}z_1^2+\vec{b}^{(02)}z_2^2\equiv\vec{Q}^{(2)}(z_1,z_2) .$$

Тоді комплексний тензор напружень $\hat{P}(z_1,z_2,z_3)$ набуде вигляду

$$\hat{P}=2\mu\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*Q_0^{(3)}+\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(2)}\right)\cdot\vec{r}-$$
$$-(1-2\nu)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(2)}+\vec{Q}^{(2)}\otimes\vec{\nabla}^*\right)-2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(2)}\right)\hat{I}\Big]\equiv\hat{P}^{(1)}.$$

У цьому випадку компоненти тензора напружень у прийнятому декартовому базисі $\{\vec{e}_i\}\left(i=\overline{1,3}\right)$ будуть

$$P_{11}^{(1)}=2\mu\Big\{\Big[6a^{(30)}+\big((4\nu-3)+i\big)b_1^{(20)}-\big(1+i(1+4\nu)\big)b_2^{(20)}+(1-i)b_3^{(20)}\Big]z_1+$$
$$+\Big[(1-i)b_1^{(20)}+(1+i)b_2^{(20)}-(1+i)b_3^{(20)}-4\nu\left(b_2^{(02)}+ib_3^{(02)}\right)\Big]z_2+$$
$$+\Big[-(1+i)b_1^{(20)}+(1-i)b_2^{(20)}+(1+i)b_3^{(20)}\Big]z_3\Big\},$$

$$P_{22}^{(1)}=2\mu\Big\{\Big[-6a^{(30)}-\big((1+4\nu)+i\big)b_1^{(20)}+(1+i)b_1^{(02)}+\big(1-(3-4\nu)i\big)b_2^{(20)}-$$
$$-(1+i)b_2^{(02)}-(1-i)b_3^{(20)}+(1-i)b_3^{(02)}\Big]z_1+\Big[6a^{(03)}-(1-i)b_1^{(20)}+(1-i)b_1^{(02)}-$$
$$-(1+i)b_2^{(20)}+\big((4\nu-3)+i\big)b_2^{(02)}+(1+i)b_3^{(20)}-\big(1+(1+4\nu)i\big)b_3^{(02)}\Big]z_2+$$
$$+(1+i)\Big[b_2^{(20)}-b_1^{(02)}+ib_2^{(20)}-ib_2^{(02)}-b_3^{(20)}+b_3^{(02)}\Big]z_3\Big\},$$

$$P_{33}^{(1)}=2\mu\Big\{\Big[-4\nu b_1^{(20)}-(1+i)b_1^{(02)}-4\nu ib_2^{(20)}+(1+i)b_2^{(02)}-(1-i)b_3^{(02)}\Big]z_1+$$
$$+\Big[-6a^{(03)}-(1-i)b_1^{(02)}-\big((1+4\nu)+i\big)b_2^{(02)}+\big(1-(3-4\nu)i\big)b_3^{(02)}\Big]z_2+$$
$$+(1+i)\Big[b_1^{(02)}+ib_2^{(02)}-b_3^{(02)}\Big]z_3\Big\},$$

$$P_{12}^{(1)}=P_{21}^{(1)}=2\mu\Big\{\Big[6ia^{(30)}-\big(1+i(1-4\nu)\big)b_1^{(20)}+\big((4\nu-1)-i\big)b_2^{(20)}+(1+i)b_3^{(20)}\Big]z_1+$$
$$+\Big[(1+i)b_1^{(20)}-2(1-2\nu)b_1^{(02)}-(1-i)b_2^{(20)}+(1-i)b_3^{(20)}\Big]+$$
$$+(1+i)\Big[-ib_1^{(20)}+b_2^{(20)}+ib_3^{(20)}\Big]z_3\Big\},$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2013, вип. 18, 146-156

$$P_{23}^{(1)} = P_{32}^{(1)} = 2\mu\Big\{\Big[-(1-i)b_1^{(02)} + (1-i)b_2^{(02)} - 2i(1-2\nu)b_3^{(20)} + (1+i)b_3^{(02)}\Big]z_1 +$$
$$+\Big[6ia^{(03)} + (1+i)b_1^{(02)} - \big(1+i(1-4\nu)\big)b_2^{(02)} - \big((1-4\nu)+i\big)b_3^{(02)}\Big]z_2 +$$
$$+(1+i)\Big[-ib_1^{(02)} + b_2^{(02)} + ib_3^{(02)}\Big]z_3\Big\},$$
$$P_{31}^{(1)} = P_{13}^{(1)} = -4\mu\,(1-2\nu)\Big[b_3^{(20)}z_1 + ib_1^{(02)}z_2\Big].$$

Для комплексного тензора напружень *2-го порядку* розв'язок крайової задачі будується на основі однорідного многочлена скалярної голоморфної функції $\Phi_0\left(z_1, z_2\right)$ четвертого степеня

$$\Phi_0^4\left(z_1, z_2\right) = a^{(40)}z_1^4 + a^{(04)}z_2^4 \equiv Q_0^{(4)}\left(z_1, z_2\right).$$

та однорідного многочлена векторної голоморфної функції $\vec{\Phi}\left(z_1, z_2\right)$ третього степеня

$$\vec{\Phi}^3\left(z_1, z_2\right) = \vec{b}^{(30)}z_1^3 + \vec{b}^{(03)}z_2^3 \equiv \vec{Q}^{(3)}\left(z_1, z_2\right).$$

Відповідно компоненти тензора напружень матимуть вигляд

$$P_{11}^{(2)} = 6\mu\Big\{\Big[4a^{(40)} + (2\nu-1+i)b_1^{(30)} - \big(1+i(1+2\nu)\big)b_2^{(30)} + (1-i)b_3^{(30)}\Big]z_1^2 +$$
$$+\Big[(1-i)b_1^{(30)} + (1+i)b_2^{(30)} - (1+i)b_3^{(30)}\Big]z_1z_2 + \Big[-(1+i)b_1^{(30)} +$$
$$+(1-i)b_2^{(30)} + (1+i)b_3^{(30)}\Big]z_3z_1 - 2\nu\Big[b_2^{(03)} + ib_3^{(03)}\Big]\,z_2^2\,\Big\},$$
$$P_{22}^{(2)} = 6\mu\Big\{\Big[-4a^{(40)} - (1+2\nu+i)b_1^{(30)} + \big(1-i(1-2\nu)\big)b_2^{(30)} - (1-i)b_3^{(30)}\Big]z_1^2 +$$
$$+\Big[-(1-i)b_1^{(30)} + (1+i)b_1^{(03)} - (1+i)b_2^{(30)} - (1+i)b_2^{(03)} + (1+i)b_3^{(30)} + (1-i)b_3^{(03)}\Big]z_1z_2 +$$
$$+\Big[-(1+i)b_1^{(03)} + (1-i)b_2^{(03)} + (1+i)b_3^{(03)}\Big]z_2z_3 + \Big[(1+i)b_1^{(30)} - (1-i)b_2^{(30)} -$$
$$-(1+i)b_3^{(30)}\Big]z_3z_1 + \Big[4a^{(04)} + (1-i)b_1^{(03)} + (2\nu-1+i)b_2^{(03)} - \big(1+i(1+2\nu)\big)b_3^{(03)}\Big]z_2^2\Big\},$$
$$P_{33}^{(2)} = 6\mu\Big\{(-2\nu)\Big[b_1^{(30)} + ib_2^{(30)}\Big]z_1^2 + \Big[-(1+i)b_1^{(03)} + (1+i)b_2^{(03)} - (1-i)b_3^{(03)}\Big]z_1z_2 +$$
$$+\Big[(1+i)b_1^{(03)} - (1-i)b_2^{(03)} - (1+i)b_3^{(03)}\Big]z_2z_3 +$$
$$+\Big[-4a^{(04)} - (1-i)b_1^{(03)} - (1+2\nu+i)b_2^{(03)} + \big(1-i(1-2\nu)\big)b_3^{(03)}\Big]z_2^2\Big\},$$
$$P_{12}^{(2)} = 6\mu\Big\{\Big[4a^{(40)} + (2\nu i-1)b_1^{(30)} + (2\nu-i)b_2^{(30)} + (1+i)b_3^{(30)}\Big]z_1^2 -$$
$$-(1-2\nu)b_1^{(03)}z_2^2 + (1+i)b_1^{(30)} - (1-i)b_2^{(30)} + (1-i)b_3^{(30)}\Big]z_1z_2 +$$
$$+\Big[(1-i)b_1^{(30)} + (1+i)b_2^{(30)} - (1-i)b_3^{(30)}\Big]z_3z_1\Big\},$$

$$P_{23}^{(2)} = 6\mu\left\{\left[-i(1-2\nu)b_3^{(30)}\right]z_1^2 + \left[-(1-i)b_1^{(03)} + (1-i)b_2^{(03)} + \right.\right.$$
$$\left. +(1+i)b_3^{(03)}\right]z_1 z_2 + \left[(1-i)b_1^{(03)} + (1+i)b_2^{(03)} - (1-i)b_3^{(03)}\right]z_2 z_3 +$$
$$\left. +\left[4ia^{(04)} + (1+i)b_1^{(03)} - (1-2\nu i)b_2^{(03)} - (i-2\nu)b_3^{(03)}\right]z_2^2\right\},$$
$$P_{31}^{(2)} = -6\mu(1-2\nu)\left[b_3^{(30)}z_1^2 + ib_1^{(03)}z_2^2\right].$$

У загальному випадку для побудови комплексного тензора напружень $\hat{P}^{(n)}$ *порядку n* у межах прийнятого підходу, вихідними є скалярна голоморфна функція $\Phi_0(z_1,z_2)$ у формі однорідного многочлена $Q_0^{(n)}(z_1,z_2)$ степеня $n+2$ та голоморфна векторна функція $\vec{\Phi}(z_1,z_2)$ у формі векторного однорідного многочлена $\vec{Q}^{(n)}(z_1,z_2)$ степеня $n+1$ відповідно

$$\Phi_0^{(n+2)}(z_1,z_2) \equiv Q_0^{(n+2)}(z_1,z_2) = a^{((n+2)0)}\, z_1^{n+2} + a^{(0(n+2))}\, z_2^{n+2},$$
$$\vec{\Phi}^{(n+1)}(z_1,z_2) \equiv \vec{Q}^{(n+1)}(z_1,z_2) = \vec{b}^{((n+1)0)}\, z_1^{n+1} + \vec{b}^{(0(n+1))}\, z_2^{n+1}. \tag{13}$$

Тоді комплексний тензор напружень порядку n подається таким чином

$$\hat{P}^{(n)} = 2\mu\left[\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* Q_0^{(n+2)} + \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \otimes \vec{Q}^{(n+1)}\right)\cdot \vec{r} - \right.$$
$$\left. -(1-2\nu)\left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{Q}^{(n+1)} + \vec{Q}^{(n+1)} \otimes \vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{Q}^{(n+1)}\right)\hat{I}\right].$$

У компонентній формі в базисі декартової системи координат $\left\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right\}$ тензор напружень $\hat{P}^{(n)}$ порядку n набуває вигляду

$$P_{11}^{(n)} = 2\mu\,(n+1)\left\{\left[(n+2)a^{((n+2)0)} - \left(2(1-\nu) - \frac{n}{2}(1+i)\right)b_1^{((n+1)0)} - \right.\right.$$
$$\left. -\left(2i\nu\frac{n}{2}(1+i)\right)b_2^{((n+1)0)} + \frac{n}{2}(1-i)b_3^{((n+1)0)}\right]z_1^n - 2\nu\left[b_2^{(0(n+1))} + \right.$$
$$\left. +ib_3^{(0(n+1))}\right]z_2^n + \frac{n}{2}(1+i)\left[-ib_1^{((n+1)0)} + b_2^{((n+1)0)} - b_3^{((n+1)0)}\right] +$$
$$\left. +\frac{n}{2}(1+i)\left[-ib_2^{((n+1)0)} + b_3^{((n+1)0)} - b_1^{((n+1)0)}\right]z_1^{n-1}z_3\right\},$$
$$P_{22}^{(n)} = 2\mu\,(n+1)\left\{\left[-(n+2)a^{((n+2)0)} - \left(2\nu + \frac{n}{2}(1+i)\right)b_1^{((n+1)0)} - \right.\right.$$
$$\left. -\left(2i(1-\nu) - \frac{n}{2}(1+i)\right)b_2^{((n+1)0)} - \frac{n}{2}(1-i)b_3^{((n+1)0)}\right]z_1^n + \left[(n+2)a^{((n+2)0)} + \right.$$

$$+\frac{n}{2}(1-i)b_1^{(0(n+1))}-\left(2(1-\nu)-\frac{n}{2}(1+i)\right)b_2^{(0(n+1))}-\left(2i\nu+\frac{n}{2}(1+i)\right)b_3^{(0(n+1))}\Bigg]z_2^n+$$

$$+\frac{n}{2}(1+i)\Bigg(\Big[ib_1^{((n+1)0)}-b_2^{((n+1)0)}+b_3^{((n+1)0)}\Big]z_1^{n-1}z_2+$$

$$+\ \Big[b_1^{(0(n+1))}-b_2^{(0(n+1))}-ib_3^{(0(n+1))}\Big]\ z_2^{n-1}z_1+$$

$$+\ \Big[b_1^{((n+1)0)}+ib_2^{((n+1)0)}-b_3^{((n+1)0)}\Big]\ z_1^{n-1}z_3-$$

$$-\ \Big[b_1^{(0(n+1))}+ib_2^{(0(n+1))}-b_3^{(0(n+1))}\Big]\ z_2^{n-1}z_3\Bigg)\Bigg\},$$

$$P_{33}^{(n)}=2\mu\,(n+1)\Bigg\{\Bigg[-2\nu\Big[b_1^{((n+1)0)}+ib_2^{((n+1)0)}\Big]z_1^n+\Big[-(n+2)a^{(0(n+2))}-$$

$$-\frac{n}{2}(1-i)b_1^{(0(n+1))}-\left(2\nu+\frac{n}{2}(1+i)\right)b_2^{(0(n+1))}+\left(2i(1-\nu)-\frac{n}{2}(1+i)\right)b_3^{(0(n+1))}\Bigg]\ z_2^n-$$

$$-\frac{n}{2}(1+i)\Big[b_1^{(0(n+1))}-b_2^{(0(n+1))}-ib_3^{(0(n+1))}\Big]z_2^{n-1}z_1+$$

$$+\frac{n}{2}(1+i)\Big[b_1^{(0(n+1))}+ib_2^{(0(n+1))}-b_3^{(0(n+1))}\Big]z_2^{n-1}z_3\Bigg\},$$

$$P_{12}^{(n)}=2\mu\,(n+1)\Bigg\{\Bigg[i\big(n+2\big)a^{((n+2)0)}-\left(i(1-2\nu)-\frac{n}{2}(1-i)\right)b_1^{((n+1)0)}-$$

$$-\left((1-2\nu)+\frac{n}{2}(1-i)\right)b_2^{((n+1)0)}-\frac{n}{2}(1+i)b_3^{((n+1)0)}\Bigg]z_1^n-(1-2\nu)\,b_1^{(0(n+1))}z_2^n-$$

$$-\frac{n}{2}(1-i)\Big[ib_1^{((n+1)0)}-b_2^{((n+1)0)}+b_3^{((n+1)0)}\Big]\ z_1^{n-1}z_2-$$

$$-\frac{n}{2}(1-i)\Big[b_1^{((n+1)0)}+ib_2^{((n+1)0)}-b_3^{((n+1)0)}\Big]z_1^{n-1}z_3\Bigg\},$$

$$P_{23}^{(n)}=2\mu\,(n+1)\Bigg\{-(1-2\nu)ib_3^{((n+1)0)}\,z_1^n+\Bigg[i(n+2)a^{(0(n+2))}-\frac{n}{2}(1+i)b_1^{(0(n+1))}-$$

$$-\left(i(1-2\nu)-\frac{n}{2}(1-i)\right)b_2^{(0(n+1))}-\left((1-2\nu)+\frac{n}{2}(1-i)\right)b_3^{(0(n+1))}\Bigg]\ z_2^n+$$

$$+\frac{n}{2}(1-i)\Big[b_1^{(0(n+1))}-b_2^{(0(n+1))}-ib_3^{(0(n+1))}\Big]\ z_2^{n-1}z_1-$$

$$-\frac{n}{2}(1-i)\Big[b_1^{(0(n+1))}+ib_2^{(0(n+1))}-b_3^{(0(n+1))}\Big]\ z_2^{n-1}z_3\Bigg\},$$

$$P_{31}^{(n)}=-2\mu\,(1-2\nu)(n+1)\Big(b_3^{((n+1)0)}\,z_1^n+ib_1^{(0(n+1))}z_2^n\Big).\qquad(14)$$

Вихідним для формулювання відповідної структури граничних умов на бічній поверхні тіла ∂X з нормаллю $\vec{n} = n_i\left(x_1, x_2, x_3\right)\vec{e}_i$ для кожного напруженого стану $\hat{P}^{(k)}$ порядку k (*базового стану порядку k*) є такий вираз вектора напружень

$$\vec{P}_n^{(k)} \equiv \left(\vec{n}\cdot\hat{P}^{(k)}\right)\Big|_{\partial X} = 2\mu\Big\{\, \vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^* Q_0^{(k+2)} + \left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(k+1)}\right)\cdot\vec{r} +$$

$$+\left(2\nu-1\right)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(k+1)} + \vec{Q}^{(k+1)}\otimes\vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(k+1)}\right)\hat{I}\,\Big\}\Big|_{\partial X}. \qquad (15)$$

Зокрема, для $k = 0$ отримаємо

$$\vec{P}_n^{(0)} \equiv \left(\vec{n}\cdot\hat{P}^{(0)}\right)\Big|_{\partial X} = 2\mu\Big\{\vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^* Q_0^{(2)} - \left(1-2\nu\right)\times$$

$$\times\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(1)} + \vec{Q}^{(1)}\otimes\vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(1)}\right)\hat{I}\Big]\Big\}\Big|_{\partial X};$$

для $k = 1$

$$\vec{P}_n^{(1)} \equiv \left(\vec{n}\cdot\hat{P}^{(1)}\right)\Big|_{\partial X} = 2\mu\Big\{\, \vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^* Q_0^{(3)} + \left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(2)}\right)\cdot\vec{r} +$$

$$+\left(1-2\nu\right)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(2)} + \vec{Q}^{(2)}\otimes\vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(2)}\right)\hat{I}\Big]\Big\}\Big|_{\partial X};$$

для $k = 2$

$$\vec{P}_n^{(2)} \equiv \left(\vec{n}\cdot\hat{P}^{(2)}\right)\Big|_{\partial X} = 2\mu\Big\{\, \vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^* Q_0^{(4)} + \left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(3)}\right)\cdot\vec{r} +$$

$$+\left(1-2\nu\right)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(3)} + \vec{Q}^{(3)}\otimes\vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(3)}\right)\hat{I}\Big]\Big\}\Big|_{\partial X};$$

Для комплексного тензора напружень $\hat{P}^{(k)}$ порядку k на бічній поверхні тіла ∂X вектор комплексного зовнішнього навантаження $\vec{P}_n^{(k)(+)}$ повинен дорівнювати вектору напружень $\vec{P}_n^{(k)}$

$$\vec{P}_n^{(k)(+)} = \vec{P}_n^{(k)} \qquad (16)$$

та мають виконуватися додатково інтегральні умови рівності нулеві головного момента зовнішнього навантаження, а саме,

$$\int\limits_{\partial X}\left(\vec{r}\times\vec{P}_n^{(k)}\right)d\Sigma = 2\mu\int\limits_{\partial X}\Big(\vec{r}\times\Big\{\,\vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^* Q_0^{(k+2)} + \left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(k+1)}\right)\cdot\vec{r} -$$

$$-\left(1-2\nu\right)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(k+1)} + \vec{Q}^{(k+1)}\otimes\vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(k+1)}\right)\hat{I}\Big]\Big)\Big|_{\partial X}\Big\}\Big)d\Sigma = 0. \qquad (17)$$

Відзначимо, що подання шуканого розв'язку вихідної крайової задачі теорії пружності через вектор переміщення $\vec{u}$ у формі Папковича-Нейбера забезпечує виконання інтегральної умови рівності нулеві головного вектора зовнішнього навантаження.

Граничні умови, які накладаються на голоморфні функції $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ і забезпечують виконання умови (17) рівності нулеві головного момента зовнішнього навантаження, для кожного базового стану в розгорнутій формі набувають вигляду

$$\int_{\partial X} \left(\vec{r} \times \vec{P}_n^{(k)}\right) d\Sigma = \int_{\partial X} \left(\left(P_{n(3)}^{(k)} x_2 - P_{n(2)}^{(k)} x_3\right) \vec{e}_1 + \left(P_{n(1)}^{(k)} x_3 - P_{n(3)}^{(k)} x_1\right) \vec{e}_2 + \right.$$
$$\left. + \left(P_{n(2)}^{(k)} x_1 - P_{n(1)}^{(k)} x_2\right) \vec{e}_3 \right) d\Sigma \equiv M_{(n)j}^{(k)} \vec{e}_j = 0 \qquad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{18}$$

Звідси $M_{(n)j}^{(k)} = 0$ для кожного $j = \overline{1,3}$.

Умови (18) накладають додатково в'язі на коефіцієнти вихідного подання (13) скалярної $\Phi_0(z_1, z_2)$ та векторної $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ голоморфних функцій у формі однорідних многочленів.

Надалі побудований розв'язок крайової задачі (8), (16), (17) для комплексного тензора напружень $\hat{P}^{(k)}$ *порядку k* (15), який породжений однорідними многочленами

$$\Phi_0^{(k+2)}(z_1, z_2) \equiv Q_0^{(k+2)}(z_1, z_2) = a^{((k+2)0)} z_1^{k+2} + a^{(0(k+2))} z_2^{k+2},$$
$$\vec{\Phi}^{(k+1)}(z_1, z_2) \equiv \vec{Q}^{(k+1)}(z_1, z_2) = \vec{b}^{((k+1)0)} z_1^{k+1} + \vec{b}^{(0(k+1))} z_2^{k+1},$$

будемо трактувати як *розв'язок порядку k базової крайової задачі*.

Висновки. На основі подання комплексного вектора переміщень $\vec{w}(z_1, z_2)$ та комплексного тензора напружень $\hat{P}(z_1, z_2)$ через скалярну $\Phi_0(z_1, z_2)$ та векторну $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ голоморфні функції двох комплексних змінних z_1, z_2 у формі многочленів порядку n за степенями комплексних змінних z_1 і z_2 запропоновано методику побудови базових розв'язків просторових задач теорії пружності. Отримані базові стани $\hat{P}^{(k)}$ порядку k за запропонованою принциповою схемою побудови розв'язків базових крайових задач можна покласти в основу послідовнісного підходу конструктивної побудови розв'язків конкретних крайових задач просторової теорії пружності.

Література

[1] *Пабирівський В. В., Пабирівська Н. В.* Про формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функцій двох комплексних змінних // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 100-107.

[2] *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. — Москва: Гостехиздат, 1955. — 492 с.

[3] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — Москва: Наука, 1975. — 575 с.

[4] *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих переменных. — Москва: Физматгиз, 1962. — 420 с.

Construction of solutions of boundary value problems of space elastic theory using holomorphic functions

Viktor Pabyrivskyi, Nelya Pabyrivska, Volodymyr Hladun

The technique of construction of basic solutions for boundary value problems of spatial elastic theory has been developed. The technique is based on the representation of a complex displacement vector and stress tensor through the scalar and vector holomorphic functions of two complex variables and on formulating complex conjugate boundary value problems on the above-mentioned functions. An algorithm for constructing the basic conditions for the stress tensor of order n by scalar and vector representations of holomorphic functions in the form of polynomials of degree n in a series of complex variables z_1 *and* z_2.

Построение решений базовых граничных задач пространственной теории упругости с использованием голоморфных функций

Виктор Пабыривский, Неля Пабыривска, Владимир Гладун

Работа посвящена разработке методики построения базовых решений краевых задач пространственной теории упругости. Методика базируется на представлении комплексного вектора перемещений и тензора напряжений через скалярную и векторную голоморфные функции двух комплексных переменных и на формулировании комплексно-сопряженных краевых задач на выше упомянутые функции. Разработан алгоритм построения базовых состояний для тензора напряжений порядка n путем представления скалярной и векторной голоморфных функции в виде многочленов порядка n по степеням комплексных переменных z_1 *и* z_2.

Представлено професором Р. Мусієм

Отримано 14.11.13