

Концентрація динамічних напружень біля тонких пружних включень за умов антиплоскої деформації

Ярослав Пастернак¹, Георгій Сулим², Роман Пастернак³

¹ к. ф.-м. н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

³ к. ф.-м. н., доцент, Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

У роботі на основі використання інтегрального та дискретного перетворень Фур'є побудовано числовий підхід вивчення концентрації динамічних напружень на тонких включеннях за дії імпульсних навантажень. Висока точність останнього забезпечується застосуванням дискретних перетворень лише на кінцевій стадії реконструкції часового сигналу за отриманими значеннями інтегральних зображень. При цьому для розв'язування задачі в області Фур'є-зображень використано розроблену авторами раніше схему граничноелементного методу функцій стрибка. Вивчено коефіцієнти інтенсивності напружень за дії на тонке включення слабої ударної хвилі. Побудовано часові зрізи хвильових полів у тілі з тонким пружним включенням.

Ключові слова: тонке включення, нестационарна задача, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. Тонкі концентратори напружень, зокрема, тріщини, міжфазні прошарки та тонкі пружні включення, чинять істотний вплив на інтенсивність полів напружень поблизу своїх вершин [1]. Очевидно, що за динамічних, а особливо імпульсних навантажень, концентрація та інтенсивність напружень істотно відрізняться від відповідних за умов квазістатичного деформування тіл. Дослідження динамічних задач для тіл із тонкими неоднорідностями стосувалося, в основному, дефектів типу тріщин [2], тонких абсолютно жорстких включень [3] і пружних включень низької [4] або високої [5] жорсткості. У праці [6] на основі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності було побудовано модель усталених коливань поздовжнього зсуву тонкого пружного включення довільної жорсткості, що може описувати усі ці типи дефектів у межах єдиного підходу.

У цій роботі на основі запропонованої у роботі [6] моделі у поєднанні з методами інтегральних і дискретних перетворень Фур'є за часовою змінною побудовано числово-аналітичний підхід вивчення динамічної концентрації напружень на тонких включеннях довільної жорсткості й апробовано його на низці числових прикладів.

1. Формулювання задачі в області Фур'є-зображень

Розглянемо однорідне ізотропне середовище з модулем зсуву G та густиною ρ , що містить тонке пружне тунельне включення завтовшки $2h$ з модулем зсуву G^1

та густиною ρ^i (рис. 1а). Відповідно до роботи [7] рівняння динамічної рівноваги і конститутивні співвідношення для тіла та включення за умов антиплоского деформування мають такий вигляд:

$$\sigma_{3j,j}(\mathbf{x},t) - \rho \frac{\partial^2 u_3(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{3j}(\mathbf{x},t) = G u_{3,j}(\mathbf{x},t). \quad (1)$$

Тут $\sigma_{3j}(\mathbf{x},t)$ — ненульові компоненти тензора напружень; $u_3(\mathbf{x},t)$ — переміщення точки \mathbf{x} тіла. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в нижніх індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми. У разі використання співвідношення (1) для вивчення включення слід замінити ρ та G на ρ^i і G^i відповідно.

Застосовуючи до формули (1) перетворення Фур'є

$$\hat{f}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

за часовою змінною t , отримаємо співвідношення

$$\hat{\sigma}_{3j,j}(\mathbf{x}, \omega) + \rho \omega^2 \hat{u}_3(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \hat{\sigma}_{3j}(\mathbf{x}, \omega) = G \hat{u}_{3,j}(\mathbf{x}, \omega), \quad (3)$$

які еквівалентні рівнянням усталених коливань поздовжнього зсуву з циклічною частотою ω .

З урахуванням концепції принципу спряження [1] створимо лінійчатую модель тонкої неоднорідності. Для цього вилучимо із розгляду саме включення як геометричний об'єкт, а контактні переміщення та напруження перенесемо на його серединну поверхню Γ_C (відповідно на її береги Γ_C^+ та Γ_C^- — рис. 1б). Якщо довжина пружних хвиль набагато більша від товщини включення, то таке наближення є цілком прийнятне. У цей спосіб зведемо задачу до визначення напружено-деформованого стану середовища з лінією стрибків переміщень і напружень.

Відповідно до праць [6, 7] зовнішня стосовно включення задача (3) для тіла з лінією стрибків зводиться в області зображень до такої системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

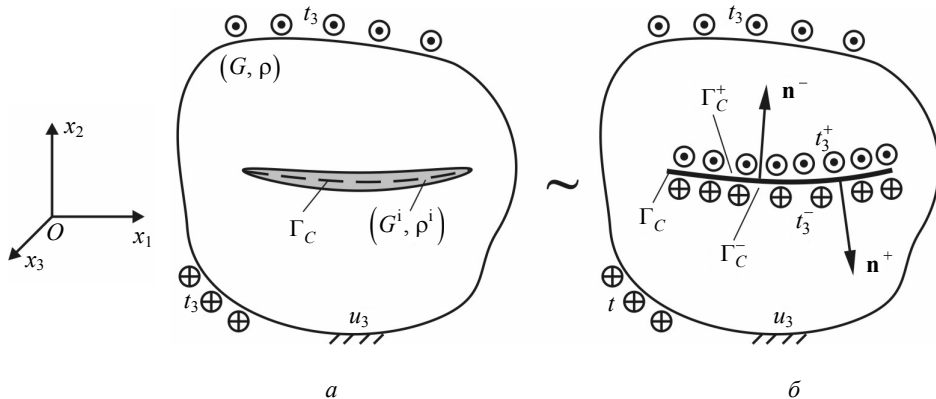


Рис. 1. Схема моделювання задачі на основі принципу спряження

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma\hat{u}_3(\mathbf{y}, \omega) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Sigma\hat{t}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) - \\ &- \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Delta\hat{u}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + \hat{u}_3^{in}(\mathbf{y}, \omega), \\ \frac{1}{2}\Delta\hat{t}_3(\mathbf{y}, \omega) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Sigma\hat{t}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) - \right. \\ &\left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Delta\hat{u}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + G\hat{u}_{3,j}^{in}(\mathbf{y}, \omega) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$; n_j^\pm — компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_C^\pm ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених математичним розрізом Γ_C з дуговою координатою s ; \mathbf{y} — точка колокації, що лежить на математичному розрізі Γ_C ; \hat{u}_3, \hat{t}_3 — комплексні амплітуди переміщень і напружень; \hat{u}_3^{in} — поле переміщень, зумовлене падаючою хвилею; символами RPV позначено величину невластивого інтеграла (за Ріманом), CPV — головне значення інтеграла (за Коші), HPV — скінченну частину гіперсингулярного інтеграла (за Адамаром). Розгорнуті вирази для ядер рівнянь подані в роботах [6, 7].

Побудовані у праці [6] співвідношення моделі тонкого включення (внутрішня задача) в області Фур'є-зображень мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\hat{t}_3(\mathbf{y}, \omega) &= -\frac{G^i}{2h}\Delta\hat{u}_3(\mathbf{y}, \omega), \\ \frac{1}{2}\Sigma\hat{u}_3(\mathbf{y}, \omega) &= \hat{u}_3^0(\omega) \cos(\lambda s(\mathbf{y})) + \\ &+ \frac{1}{2hG^i} \left[-\hat{P}_3^0(\omega) \varphi(s(\mathbf{y})) + \int_{y_0}^{\mathbf{y}} \varphi(s(\mathbf{y}) - s(\mathbf{x})) \Sigma\hat{t}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) \right], \\ P_3^0(\omega) \cos(\lambda s_n) &+ P_3^n(\omega) + 2hG^i \lambda u_3^0 \sin(\lambda s_n) - \\ - \int_{\Gamma_C^+} \cos[\lambda(s_n - s(\mathbf{x}))] \Sigma\hat{t}_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\lambda = \omega \sqrt{\rho^i / G^i}$ — хвильове число; $\hat{u}_3^0(\omega)$ — середнє значення комплексної амплітуди переміщення лівого торця y_0 включення; $\hat{P}_3^0(\omega), P_3^n(\omega)$ — комплексні амплітуди зусиль, прикладених відповідно до лівого та правого торців включення; $\varphi(s) = \lambda^{-1} \sin(\lambda s)$; s_n — довжина дуги серединної лінії неоднорідності.

2. Реконструкція динамічних полів за Фур'є-зображеннями

Нехай на включення набігає плоска хвиля

$$u_3^{in}(\mathbf{x}, t) = A_0^{in} f\left(\frac{c_2}{a}t + \frac{x_i m_i}{a}\right) \quad (f(\tau) = 0 \quad \forall \tau < 0), \quad (6)$$

де $c_2 = \sqrt{G/\rho}$; a — деякий характерний розмір; A_0^{in} — амплітуда падаючої хвилі, а \mathbf{m} — її напрямний одиничний ($m_i m_i = 1$) вектор.

Застосовуючи до співвідношення (6) перетворення (2), отримаємо

$$\hat{u}_3^{in}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{A_0^{in} a}{c_2} \hat{f}\left(\frac{\omega a}{c_2}\right) \exp\left(\frac{i\omega}{c_2} x_i m_i\right) = A^{in}(\omega) \exp\left(\frac{i\omega}{c_2} x_i m_i\right). \quad (7)$$

Тут

$$A^{in}(\omega) = \frac{A_0^{in} a}{c_2} \hat{f}\left(\frac{\omega a}{c_2}\right); \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8)$$

Зокрема, для імпульсу у вигляді слабкої ударної хвилі [4]:

$$f_1(\tau) = p_* \tau^{n_*} \exp(-\alpha_* \tau) \quad \forall \tau > 0 \quad (9)$$

співвідношення (8) набудуть вигляду

$$A^{in}(\omega) = \frac{A_0^{in} a}{c_2} \hat{f}_1\left(\frac{\omega a}{c_2}\right); \quad \hat{f}_1(\omega) = p_* (n_*!) (\alpha_* + i\omega)^{-(n_*+1)}. \quad (10)$$

Розв'язуючи рівняння (4), (5), (7), отримаємо зображення стрибків переміщень $\Delta \hat{u}_3$ та напружень $\Sigma \hat{t}_3$, за значеннями яких можна обчислити Фур'є-зображення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) [1, 6]:

$$\hat{K}_{31}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} G \Delta \hat{u}_3(s, \omega), \quad \hat{K}_{32}(\omega) = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \hat{t}_3(s, \omega), \quad (11)$$

де s — відстань до вершини лінії Γ_C ; K_{3j} — узагальнені КІН, причому у випадку тріщини $K_{31} = K_{III}$, $K_{32} = 0$.

Оскільки узагальнені КІН (як і переміщення та напруження) є дійсними функціями, то їхні оригінали (2) можна обчислити за формулою [8]:

$$K_{3j}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \hat{K}_{3j}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}. \quad (12)$$

Для обчислення виразу (12) скористаємося дискретним перетворенням Фур'є. При цьому розглядатимемо узагальнені КІН лише на певному скінченному інтервалі $0 \leq t \leq T$, причому згідно із формулою (6) обмежимося умовою $K_{3j}(t)|_{t=0} = 0$. Годі на основі праці [8] формулу (12) можна наблизити виразом

$$K_{3j}\left(\frac{kT}{N}\right) = \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \hat{K}_{3j}(\omega_n) \exp\left(\frac{i2\pi nk}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N-1} \hat{K}_{3j}(\omega_n) \right\}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (13)$$

Тут N — кількість елементів дискретної вибірки; $\omega_n = 2\pi n/T$ — фіксовані частоти вибірки. Найзручніше обчислювати співвідношення (13) за допомогою алгоритму швидкого дискретного перетворення Фур'є [8].

Отже, відповідно до співвідношення (13) для визначення динамічних значень узагальнених КІН у вершинах тонкого пружного включення для фіксованих моментів часу kT/N ($k = \overline{0, N-1}$) необхідно розв'язати систему інтегральних рівнянь (4), (5), (7) стосовно зображень (11) для N значень частот ω_n ($n = \overline{0, N-1}$).

Для цього зручно використовувати розроблену у праці [6] схему граничноелементного методу функцій стрибка.

Перевагою запропонованого алгоритму є задання падаючої хвилі безпосередньо у формі (7) для області зображень, а не використання аналогічних подань виразів (6), отриманих на основі дискретних перетворень Фур'є. Це дає можливість обчислити на основі співвідношення (13) достовірні значення узагальнених КІН для всіх моментів часу kT/N ($k = \overline{0, N-1}$), а не лише для першої половини з них, як це є, згідно монографії [8], у випадку дискретного перетворення вхідної функції (6) системи.

Аналогічні до формули (13) дискретні часові подання можна побудувати й для переміщень і напружень у довільній точці включення та середовища, що дає можливість аналізувати повну картину перебігу нестационарних хвильових процесів у неоднорідному деформівному тілі.

3. Числові приклади

Розглянемо безмежне пружне середовище, що містить тонке пружне включення завдовжки $2a$ та завтовшки $2h$, причому $h = 0,01a$ (див. візку до рис. 2). На включення падає слаба ударна хвиля, задана рівняннями (6), (9). У розрахунках вважалося, що як і в роботі [4], $p_* = 185$, $n_* = 2$, $\alpha_* = 10$. Фронт хвилі паралельний до серединної поверхні включення. Розглядався інтервал часу $T = 8a/c_2$ с, причому вважалося, що плоска ударна хвиля досягає поверхні тонкої неоднорідності за $2,5a/c_2$ с, для чого остання зміщувалася вниз по вертикалі на відповідну відстань. Це дає можливість додатково верифікувати розроблений числовий підхід, адже до моменту досягнення хвилею включення розраховані узагальнені КІН повинні бути нульовими.

У дискретному перетворенні (13) вважалося, що $N = 512$. Під час розв'язування системи (4), (5), (7) для фіксованих значень частот за граничноелементним методом функцій стрибка [6] серединна поверхня тонкого включення розбивалася всього на 10 тривузлових граничних елементів, включаючи два спеціальні, що моделюють кореневу особливість поля напружень у вершинах включення та дають можливість високоточного обчислення узагальнених КІН. Збільшення кількості граничних елементів удвічі (до 20) практично не впливає на розраховані значення узагальнених КІН, що свідчить про збіжність запропонованого підходу навіть за невеликої кількості елементів дискретизації.

На рис. 2 зображено часові залежності узагальнених КІН тонкого пружного включення для різних значень його відносної жорсткості $k = G^i/G$. При цьому в обчисленнях для зменшення кількості незалежних параметрів (це жодним чином не зменшувало загальності використаного підходу) вважалося, що відносна жорсткість дорівнює також і відносній густині включення: $G^i/G = \rho^i/\rho = k$.

Отримані для дуже податного невагомого включення ($k \rightarrow 0$) значення КІН добре узгоджуються з даними праці [4] для тріщини в півпросторі до моменту часу, коли відбита від його межі хвиля досягає поверхні дефекту, тобто до того моменту, коли отриманий у роботі [4] розв'язок відповідає розв'язку для необмеженого простору. Достовірність отриманих даних також підтверджується і тим, що до моменту часу $2,5a/c_2$ з узагальнені КІН є практично нульові, характеризуючи фактичну міру абсолютної похибки застосованої числової схеми обернення.

Для доволі податних включень ($k = 0,1$) пікові значення узагальнених КІН дещо менші за відповідні для тріщини. Натомість для достатньо жорстких і масивних пружних включень ($k = 10$) максимальні величини узагальненого КІН K_{32} більш як удвічі менші за відповідні значення для нерухомого масивного абсолютно жорсткого включення. Для дуже податних включень і тріщин спостерігається знакозмінна осциляція КІН унаслідок коливань берегів математичного розрізу, що моделює дефект, після дії ударного імпульсу.

На рис. 3 для фіксованих моментів часу зображено поля переміщень у середовищі з тонким масивним абсолютно жорстким включенням, на яке набігає плоска ударна хвиля, фронт якої перпендикулярний до серединної лінії неоднорідності. Після досягнення хвилею торця включення, останній, як і можна було передбачити на основі принципу Гюйгенса-Френеля, сам стає випромінювачем хвиль. Розсічена неоднорідністю хвиля поширюється далі уздовж включення, а від його торця концентричним колом розповсюджується відбита частина хвилі.

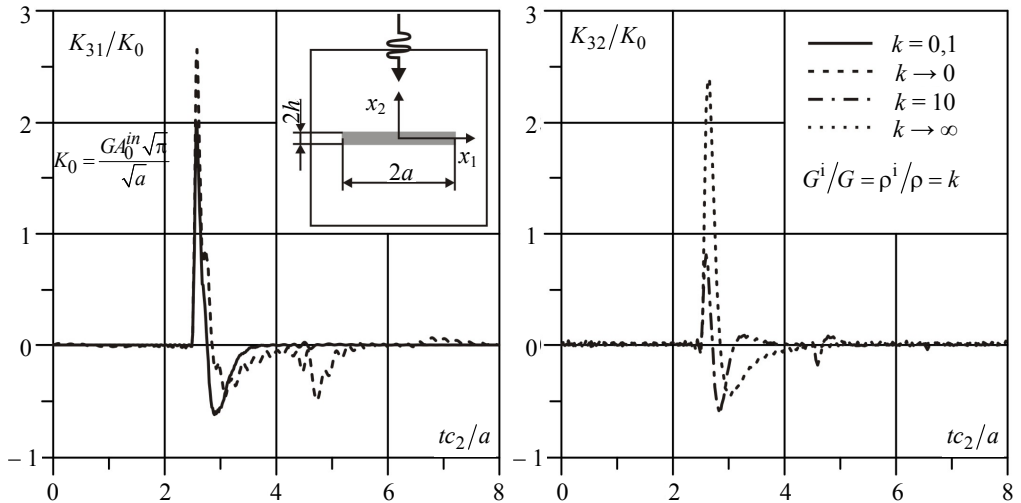


Рис. 2. Узагальнені КІН тонкого пружного включення за дії слабкої ударної хвилі

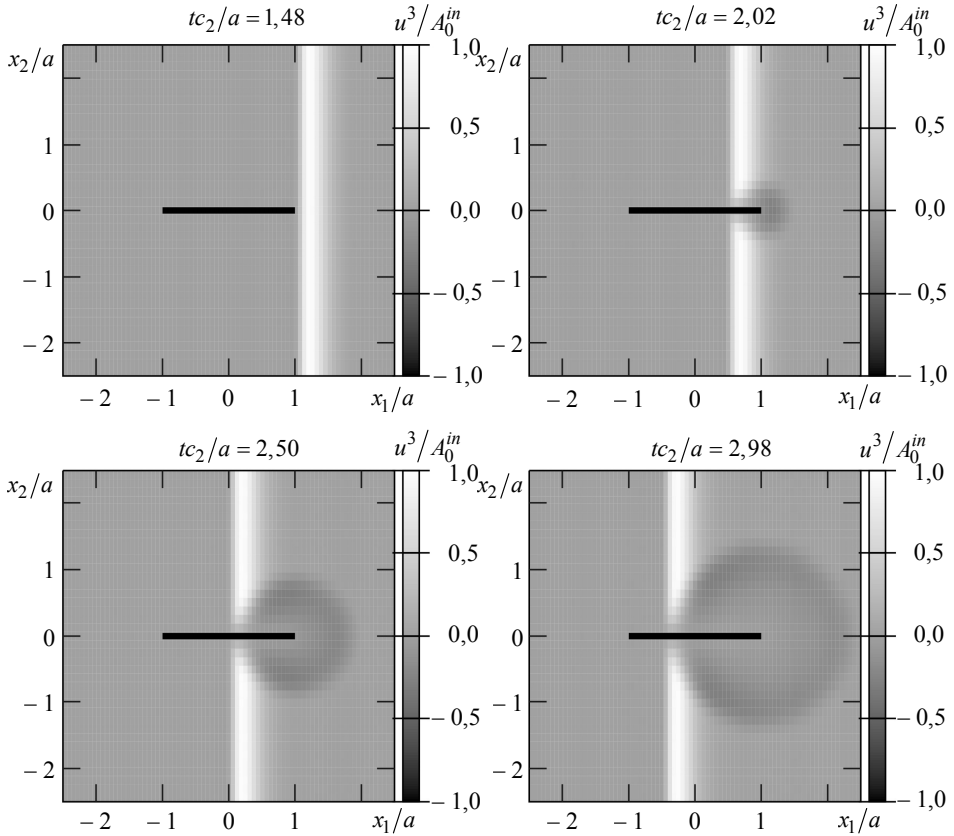


Рис. 3. Розподіл поля переміщень поблизу включення для фіксованих моментів часу

Якісна узгодженість розсіяних хвильових полів із відомими принципами хвильової механіки додатково верифікує розроблений підхід під час його застосування не тільки до визначення КІН, а й полів напружень і переміщень.

Висновки. Використання перетворення Фур'є за часовою змінною та дискретного зворотного перетворення Фур'є дає можливість звести динамічну задачу антиплоского деформування тіла до розв'язування скінченної кількості задач на установлені коливання для фіксованих значень циклічних частот. При цьому застосування дискретного перетворення лише на стадії пошуку оригіналів невідомих функцій дає можливість отримати їхні достовірні значення для всіх наперед фіксованих значень часу, а не лише половини з них, як у випадку використання виключно дискретних перетворень. Таким чином розроблений підхід на основі гранично-елементного методу функцій стрибка дав можливість визначати часові залежності узагальнених КІН, переміщень і напружень у тілах із тонкими включеннями довільної жорсткості та густини за дії імпульсних динамічних навантажень.

Література

- [1] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [2] Войтко М. В., Назарчук З. Т., Куриляк Д. Б. Взаємодія поля плоскої SH-хвилі з вершинами міжфазної тріщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 92-98.
- [3] Tadeu A., Mendes P. A., Antonio J. The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method // Computers and Structures. — 2006. — Vol. 84. — P. 2244-2253.
- [4] Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Динамічна концентрація напружень в околі заглибленого тонкого прямолінійного включення низької жорсткості в умовах антиплоскої деформації // Мат.-методи. та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 136-139.
- [5] Литвин О. В., Попов В. Г. Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення / Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 58-64.
- [6] Пастернак Я., Сулим Г., Пастернак Р. Взаємодія гармонічних SH-хвиль із тріщинами та тонкими пружними включеннями // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 112-121.
- [7] Dominguez J. Boundary elements in dynamics. — Boston: Computational Mechanics Publications, 1993. — 700 p.
- [8] Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. — Москва: Мир, 1974. — 464 с.

Dynamic stress concentration at thin elastic inclusions under the antiplane deformation

Iaroslav Pasternak, Heorhiy Sulym, Roman Pasternak

The paper uses the integral and discrete Fourier transforms to develop a numerical approach for studying the dynamic stress concentration at thin inclusions under the impulse loads. High accuracy of the approach is achieved by using the discrete transformation only at the final stage of reconstruction of a time signal based on the obtained values of unknown functions in the transformed domain. Thus the solution of the problem in the transformed Fourier domain uses previously developed numerical algorithm of the boundary element method of discontinuity functions. The stress intensity factors are studied for the inclusion under the action of weak shock waves. Fixed time snapshots of wave fields in the body with a thin elastic inclusion are also plotted.

Концентрация динамических напряжений в окрестности тонких упругих включений в условиях антиплоской деформации

Ярослав Пастернак, Георгий Сулим, Роман Пастернак

В работе на основе использования интегрального и дискретного преобразований Фурье построен численный подход к изучению концентрации динамических напряжений на тонких включениях при действии импульсных нагрузок. Высокая точность последнего обеспечивается применением дискретных преобразований лишь на конечной стадии реконструкции временного сигнала по полученным значениям интегральных образов. При этом для решения задачи в области Фурье-образов использовано разработанную авторами ранее схему граничноэлементного метода функций скачка. Изучены коэффициенты интенсивности напряжений при действии на тонкое включение слабой ударной волны. Построены временные срезы волновых полей в теле с тонким упругим включением.

Отримано 12.09.13