УДК 519.6:539.3

# Дослідження спектрального методу розв’язування рівнянь у дробових похідних за часом у базисі многочленів Лагерра

Ярослав П’янило[1], Марія Васюник[2], Іван Васюник[3]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
[2] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: m.vasiunyk@gmail.com
[3] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 50, e-mail: i.vasiunyk@gmail.com

*Досліджено застосування спектрального методу до розв’язування диференціальних рівнянь у дробових похідних за часом із використанням многочленів Лагерра. Розв’язок визначено з системи диференціальних рівнянь у частинних похідних за координатами. Досліджено вплив порядку дробової похідної на результати обчислень. Отримані теоретичні результати апробовані на модельній задачі.*

**Ключові слова:** диференціальні рівняння, дробові похідні, многочлени Лаггера.

**Вступ.** Під час моделювання багатьох фізичних процесів, зокрема, фільтрації речовини у складному пористому середовищі, необхідно враховувати історію процесу. Математичне моделювання фізичних процесів зводиться, зазвичай, до побудови диференціальних рівнянь (або їх систем) у частинних похідних і формулювання відповідних задач математичної фізики. Моделі такого роду не враховують історії процесу. Тому для дослідження таких процесів все частіше використовується дробове (диференціальне й інтегральне) числення [1-5]. Аналітичні методи розв’язування задач, які виникають, зазвичай, будуються на базі операційного перетворення Лапласа. Наявні таблиці відповідності між оригіналами та зображеннями або використання контурного інтегрування не завжди призводить до необхідного результату. Використання наближених методів обернення не може гарантувати необхідної точності відновлення оригіналу. Одним із підходів для уникнення цієї проблеми є застосування спектрального методу в базисі многочленів Лагерра до розв’язування задач дробового числення [3, 5, 6].

Пропонована робота має за мету дослідження способу розв’язування диференціальних рівнянь у дробових похідних із використанням спектрального методу в базисі многочленів Лагерра.

## 1. Визначення дробових похідних

У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Найвживанішими є дробові похідні у термінах Капуто та Рімана-Ліувіля. Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [3-6]:

$$ {}^{c}D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_{0}^{\tau}\left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)\right)\Big/(\tau-\xi)^{\alpha-m}\,d\xi, \tag{1}$$

де $m=[\alpha]$, ..., $[\cdot]$ — ціла частина дійсного числа, а в термінах Ріммана-Ліувіля —

$$D_{t}^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_{0}^{t}\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}}d\xi .$$

Однією із задач, де застосування дробових похідних є ефективне, виступає моделювання процесу роботи складних газотранспортних систем, зокрема, фільтрація газу в пористому середовищі. Остання у термінах дробової похідної Ріммана-Ліувіля за часовою змінною описується рівнянням [7]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial z}\right)=2mh\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left(\frac{p}{\chi}\right)+2qp_{at}\right). \tag{2}$$

Тут $\alpha$ — степінь дробової похідної; $k=k(x,y,z,t)$, $m=m(x,y,z)$, $h=h(x,y,z)$ — коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; $\mu$ — динамічна в'язкість речовини; $p_{at}$ — атмосферний тиск; $q$ — густина відбору; $\chi$ — коефіцієнт стисливості газу, для обчислення якого побудовано значну кількість емпіричних формул на основі експериментальних даних, зокрема,

$$\chi = 1/(1+fp) .$$

Тут $f=\left(24-0{,}21t\,^{\circ}\mathrm{C}\right)\cdot 10^{4}$, а $p(x,y,z,t)$ вимірюється в атмосферах.

*Задача полягає* у знаходженні розв'язку $p(x,y,z,t)$ рівняння (2) за відомими значеннями тиску $p(x_i,y_i,z_i,t_0)$ у заданих точках середовища й умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M=\int_{V}\rho dv .$$

Інтегрування проводиться по об'єму сховища $V$; $M$ — маса газу в сховищі; $\rho$ — густина газу, яка пов'язана з тиском рівнянням стану $p=\rho\chi RT$ . Тут $R$ — газова стала, $T$ — абсолютна температура газу.

Апробація спектрального методу в базисі многочленів Лагерра проводилася на такій модельній задачі. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} D_t^{\alpha} f(t) = 0$$

за нульової початкової умови та $f(0,t) = \sqrt{\pi} \big/ a\sqrt{t}$ , $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,t) = 0$ .

Тут $D_t^{\alpha}$ — дробова похідна в термінах Рімана-Ліувіля [1, 2];

$$k(t) = t^{-\alpha} . \tag{3}$$

У разі $\alpha = 1$ дробова похідна Рімана-Ліувіля переходить у звичайну похідну за часом, а рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

За вказаних крайових умов розв’язком останнього рівняння є функція

$$f(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right).$$

## 2. Аналітичний розв’язок

Аналітичний розв’язок задачі у термінах дробових похідних Рімана-Ліувіля знайдено у роботі [6] і має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-t\rho} e^{-\frac{x}{a}\rho^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \cos\left[ \frac{x}{a}\rho^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] d\rho . \tag{4}$$

Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то

$$f(t) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-t\rho} \cos\left( \frac{x}{a}\sqrt{\rho} \right) d\rho .$$

Знаходження інтегралу у співвідношенні (4) для довільного значення $\alpha$ в аналітичному вигляді пов’язано зі значними труднощами. Числові методи обчислення є нестійкі внаслідок наявності осцилюючих множників. Відомо, що на практиці параметр $\alpha$ є близький до одиниці. Для більш стійкого обчислення його доцільно записати таким чином

$$f(t) = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-tz^2} \cos\left( \frac{x}{a} y \right) dz +$$
$$+\frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-tz^2} \left\{ e^{-\frac{x}{a}z^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \cos\left[ \frac{x}{a} z^{\alpha} \sin\left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] - \cos\left( \frac{x}{a} y \right) \right\} dz$$

або

$$f(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)+$$
$$+\frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tz^2}\left[e^{-\frac{x}{a}z^\alpha\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\cos\left(\frac{x}{a}z^\alpha\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{a}y\right)\right]dz\,.$$

## 3. Спектральний метод розв’язування задачі в термінах дробових похідних

Застосування дробового числення в математичному моделювання зводиться до необхідності розв’язування інтегродиференціального рівняння типу згортки. Відомо, що в базисі многочленів Лагерра інтегральна згортка точно переходить у згортку рядів. Приймемо, що функції, які входять у розв’язок задачі, можна подати у вигляді ряду Фур’є-Лагерра. Функцію $f(t)$, $t\in[0,\infty)$ розвинемо у ряд за многочленами Лагерра $L_m(t)$

$$f(t)=\sum_{m=0}^{\infty}f_m(x)L_m(t)\,,$$

де коефіцієнти визначаємо інтегральними співвідношеннями

$$f_m=\int_0^\infty e^{-t}L_m(t)f(t)dt\,.$$

Функцію $k(t)$ (3) також розвинемо у ряд Фур’є за многочленами $L_m(t)$. З огляду на те, що

$$\int_0^t L_n(t-\tau)\,L_m(\tau)\,d\tau=\int_0^t L_{n+m}(\tau)\,d\tau\,,$$

матимемо

$$\frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}k_n\,L_n(t-\tau)\sum_{m=0}^{\infty}f_m\,L_m(\tau)\,d\tau=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}k_n\sum_{m=0}^{\infty}f_m\,L_{n+m}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,L_n(t)\,,$$

де $k_n$ та $f_m$ — коефіцієнти Фур’є-Лагерра функцій $k(t)$ й $f(t)$,

$$c_n=\sum_{m=0}^{n}k_m\,f_{n-m}=\sum_{m=0}^{n}k_{n-m}\,f_m\,, \tag{5}$$

Підставивши у вихідне рівняння подання функцій рядами за многочленами Лагерра, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m''(x) L_m(t) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) L_n(t) .$$

Звідси одержимо таке рекурентне співвідношення для визначення коефіцієнтів Фур'є-Лагерра

$$f_m''(x) = \frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} c_m(x) . \tag{6}$$

Для $m = 0$ маємо $c_0 = k_0 f_0$ і для визначення коефіцієнта $f_0(x)$ із співвідношення (6) отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$f_0''(x) = \frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} c_0(x) = \frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} k_0 f_0(x) .$$

Коефіцієнти Фур'є-Лагерра функції $k(t)$ обчислюються за формулою

$$k_m = \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{m!} \Gamma(\alpha) . \tag{7}$$

Враховуючи співвідношення (5)-(7), перших п'ять коефіцієнтів Фур'є-Лагерра мають вигляд

$$f_0 = \frac{\pi}{a} e^{-\frac{x}{a}} ,$$

$$f_1 = \frac{\pi}{2a} \left( 1 - \frac{\alpha x}{a} \right) e^{-\frac{x}{a}} ,$$

$$f_2 = \frac{\pi}{4a} \left[ \frac{3}{2} - \frac{\alpha(\alpha+2)x}{a} \right] e^{-\frac{x}{a}} ,$$

$$f_3 = \frac{\pi}{4a} \left\{ \frac{15}{12} - \frac{\alpha x}{a} \left[ \frac{3}{4} + \frac{\alpha+1}{2} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} \right] \right\} e^{-\frac{x}{a}} ,$$

$$f_4 = \frac{\pi}{8a} \left\{ \frac{35}{16} - \frac{\alpha x}{a} \left[ \frac{5}{4} + \frac{3(\alpha+1)}{4} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{3} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6} \right] \right\} e^{-\frac{x}{a}} .$$

Очевидно, що в цьому випадку знаходження подальших коефіцієнтів ряду та їх врахування у точний шуканий розв'язок не викликає труднощів. Отримані результати підтверджують ефективність застосування пропонованого спектрального методу до розв'язування диференціальних рівнянь у дробових похідних.

Зауважимо, що оскільки відомий аналітичний розв'язок модельної задачі, то для визначення невідомих коефіцієнтів справджується інтегральне подання

$$f_m = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\frac{x}{a} \rho^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \cos\left[ \frac{x}{a} \rho^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \int_0^{\infty} e^{-t(1+\rho)} L_m(t) dt d\rho . \tag{8}$$

*Таблиця*

Значення розв’язку поставленої задачі для різних значень порядку дробової похідної від безрозмірних координати та часу

| $t$ | $t = 0{,}001$ | | | | $t = 0{,}01$ | | | | $t = 0{,}1$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ / $\alpha$ | 1,00 | 0,80 | 0,90 | 0,99 | 1,00 | 0,80 | 0,90 | 0,99 | 1,00 | 0,80 | 0,90 | 0,99 |
| 0,001 | 1230,08 | 2692,70 | 754,77 | 1019,02 | 1057,37 | 1995,54 | 943,19 | 954,30 | 369,54 | 475,12 | 434,64 | 377,35 |
| 0,002 | 43,88 | 75,55 | 238,33 | – 161,79 | 757,64 | 778,89 | 850,72 | 676,83 | 357,42 | 503,27 | 430,20 | 363,75 |
| 0,003 | 0,17 | 111,54 | – 118,47 | – 159,65 | 434,70 | 568,96 | 459,45 | 375,76 | 338,11 | 455,35 | 384,77 | 341,04 |
| 0,004 | 0,00 | – 63,76 | – 98,40 | – 110,12 | 199,71 | 298,88 | 226,18 | 158,08 | 312,81 | 395,37 | 339,94 | 314,01 |
| 0,005 | 0,00 | – 72,54 | – 46,30 | – 65,34 | 73,47 | 147,66 | 93,29 | 46,30 | 283,04 | 340,41 | 299,42 | 283,54 |

Для певних значень параметра α подвійний інтеграл знаходиться в аналітичному вигляді. Зокрема, якщо $\alpha = 1$, тобто у випадку частинних похідних, коефіцієнти $f_m$ визначають за формулою (8).

Значення функції $f(x,t)$, обчислені для різних значень дробової похідної, подані у таблиці.

**Висновки.** У пропонованій праці многочлени Лагерра застосовано для розв’язування диференціальних рівнянь у дробових похідних. Перевагою такого підходу є те, що інтегрування згортки двох функцій зводиться до сумування згортки рядів. Тому уникається використання процедури дискретизації, яка вносить значну похибку в процес обчислень. Аналіз результатів, поданих у таблиці, показує, що порядок дробової похідної має значний вплив на розв’язок вихідної задачі. Звідси випливає необхідність апріорної інформації для визначення порядку дробової похідної під час моделювання фізичних процесів. Разом із тим, як випливає з обчислювального експерименту модельної задачі, застосування спектрального методу для задач такого типу дозволяє знаходити параметричні подання інтегральних перетворень, ядрами яких є многочлени Лагерра.

## Література

[1] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[2] *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 — 256 с.

[3] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — Москва: Наука, 2005. — 199 с.

[4] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. — 272 с.

[5] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — Москва: Физматлит, 2005. — 480 с.

[6] *П’янило Я., Васюник М., Васюник І.* Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв’язування рівнянь у дробових похідних за часом // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 17. — С. 163-167.

[7] *Чарный И. А.* Основы газовой динамики. — Москва: Гостехиздат, 1961. — 200 с.

**ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології**
**2013, вип. 18, 173-179**

## Investigation of the spectral method for solving of the equations with fractional time derivatives in the basis of the Laguerre polynomials

Yaroslav Pjanylo, Mariya Vasyunyk, Ivan Vasyunyk

*The usage of the spectral method for solving of differential equations with fractional time derivatives using the Laguerre polynomials was investigated. The solution was found from the system of differential equations in partial derivatives of the coordinates. The influence of the order of the fractional derivative on the results of calculations was investigated. The received theoretical results were approved on a model problem.*

## Исследование спектрального метода решения уравнений в дробных производных по времени в базисе многочленов Лагерра

Ярослав Пьянило, Мария Васюнык, Иван Васюнык

*Исследовано применение спектрального метода к решению дифференциальных уравнений в дробных производных по времени с использованием многочленов Лагерра. Решение найдено из системы дифференциальных уравнений в частных производных по координатам. Исследовано влияние порядка дробной производной на результаты вычислений. Полученные теоретические результаты апробированы на модельной задаче.*

Отримано 07.11.13