УДК 517.958:519.6

Аналіз методом скінченних елементів початково-крайових задач гетеродифузії

Ярема Савула[1], Адріан Торський[2], Марія Федак[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua
[2] к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ імені Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: adrian@cmm.lviv.ua
[3] Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000

Розглянуто одновимірну за просторовими змінними нестаціонарну задачу гетеродифузії, яка є початково-крайовою задачею для системи двох диференціальних рівнянь. Подано її слабке формулювання та досліджено властивості його білінійних форм, які забезпечують існування та єдиність слабкого розв'язку. Для числового розв'язання задачі гетеродифузії використано напівдискретний метод скінченних елементів у формі методу Гальоркіна. Проведено числові експерименти з використанням програмного забезпечення, розробленого авторами на основі апроксимації розв'язку базисними функціями лагранжевого типу першого порядку. Наведено результати дослідження точності числового розв'язку.

Ключові слова: гетеродифузія, слабкий розв'язок, метод скінченних елементів.

Вступ. У роботі [1] та інших роботах цих же авторів побудовано математичну модель гетеродифузії та показано, що вона є ефективною основою для побудови програмних засобів прогнозування поширення забруднень у ґрунтовому середовищі. Для автоматизації проведення обчислювальних робіт вигідно використовувати числові методи. Це знімає багато обмежень, зокрема, на вид області просторових змінних і сприяє алгоритмізації обчислювального процесу. Проте використання числових методів пов'язане з проблемами достовірності, збіжності та точності результатів [2, 3]. Вирішити ці проблеми можна шляхом теоретичних досліджень варіаційного формулювання задачі та доведенням того факту, що відповідні білінійні форми є неперервні та V-еліптичні [3, 4], а також шляхом проведення відповідних обчислювальних експериментів.

1. Формулювання задачі

Розглянемо одновимірну за просторовими змінними задачу гетеродифузії, записану у безрозмірних координатах [1],

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d_1 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} - a c_1 + c_2 + f_1 ,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \tau} = d_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + a c_1 - c_2 + f_1 , \qquad (1)$$

де $\xi \in \left[\xi^b, \xi^e\right] \times \left(0, T\right]$; a, d, d_1, d_2 — сталі, що характеризують середовище, для яких відомо, що $a \gg 1$, $d, d_1, d_2 \ll 1$, $a\left(d + d_1\right) \sim 1$; f_1, f_2 — функції джерел.

З метою проведення теоретичного дослідження задачі розглянемо випадок однорідних граничних умов

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0 \text{ у точках } \xi = \xi^b,\ \xi = \xi^e \text{ для } t \in \left(0, T\right]. \tag{2}$$

Початкові умови візьмемо у вигляді

$$c_1\left(\xi, \tau\right) = c_1^{(0)},\ c_2\left(\xi, \tau\right) = c_2^{(0)} \text{ для } \tau = 0,\ \xi \in \left[\xi^b, \xi^e\right]. \tag{3}$$

Уведемо вектор-стовпець шуканих функцій c_1, c_2

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо початково-крайову задачу (1)-(3) у матричному формулюванні

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} + \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f} \text{ в } \Omega \times \left(0, T\right], \tag{4}$$

$$\mathbf{\Omega} = \left[\xi^b, \xi^e\right], \quad \mathbf{\Gamma} = \left\{\xi^b, \xi^e\right\}, \quad \mathbf{c}\left(\xi, \tau\right) = 0 \text{ на } \Gamma \times \left(0, T\right],$$

$$\mathbf{c}\left(\xi, \tau\right) = \mathbf{c}^{(0)} \text{ для } \tau = 0,\ \xi \in \Omega. \tag{5}$$

Тут

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a & -d_1 \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \\ -d_2 \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a & -d \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^{(0)} = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

2. Варіаційне формулювання задачі

Уведемо деякий простір V. Для запису варіаційного рівняння домножимо рівняння (4) та початкову умову (5) на довільну функцію $\tilde{\mathbf{c}} \in V$ і зінтегруємо в області Ω

$$\int_{\xi_0}^{\xi_e} \left[\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau}\right]^T \tilde{\mathbf{c}} d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left(\mathbf{A}\mathbf{c}\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{c}} d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{c}} d\xi,$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_e} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\xi, 0\right) \tilde{\mathbf{c}} d\xi = 0.$$

Нехай

$$m(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = \int_\Omega \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{c}}\,d\Omega, \quad a(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = \int_\Omega (\mathbf{Ac})^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{c}}\,d\Omega, \quad l(\tilde{\mathbf{c}}) = \int_\Omega \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{c}}\,d\Omega, \quad \dot{\mathbf{c}} = \partial\mathbf{c}/\partial\tau .$$

Запишемо варіаційне формулювання задачі гетеродифузії у вигляді. Знайти функцію $\mathbf{c}(\xi,\tau) \in L_2(0,T;V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(\dot{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{c}}) + a(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = l(\tilde{\mathbf{c}}) \quad \forall\tilde{\mathbf{c}} \in V, \quad m(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = m(\mathbf{c}^{(0)},\tilde{\mathbf{c}}), \quad \tau = 0,\ \xi \in \Omega .$$

Розглянемо білінійну форму $a(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}})$. Перепишемо її так

$$a(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \Bigg[\left(-\frac{\partial^2 c_1}{\partial\xi^2} + ac_1 \right)\tilde{c}_1 + \left(-d_1\frac{\partial^2 c_2}{\partial\xi^2} - c_2 \right)\tilde{c}_1 -$$

$$-\left(-d_2\frac{\partial^2 c_{21}}{\partial\xi^2} + ac_1 \right)\tilde{c}_2 + \left(-d\frac{\partial^2 c_2}{\partial\xi^2} + c_2 \right)\tilde{c}_2 \Bigg] d\xi .$$

Перетворимо інтеграли у правій частині попередньої формули, використовуючи формулу інтегрування частинами та беручи до уваги однорідні граничні умови:

$$c_1(\xi_0) = 0, \quad c_2(\xi_0) = 0, \quad c_1(\xi_e) = 0, \quad c_2(\xi_e) = 0 .$$

Отримаємо

$$a(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \Bigg[\frac{\partial c_1}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{c}_1}{\partial\xi} + ac_1\tilde{c}_1 + d_1\frac{\partial\tilde{c}_1}{\partial\xi}\frac{\partial c_2}{\partial\xi} - \tilde{c}_1 c_2 - ac_1\tilde{c}_2 +$$

$$+d_2\frac{\partial c_1}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{c}_2}{\partial\xi} + d\frac{\partial c_2}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{c}_2}{\partial\xi} + c_2\tilde{c}_2 \Bigg] d\xi . \tag{6}$$

Зауважимо, що, маючи запис білінійної форми (6), простір V можна охарактеризувати так:

$$V = \left\{ c_i :\ c_i \in W_2^1,\ c_i(a) = 0,\ c_i(b) = 0,\ i = 1,2 \right\} .$$

Доведемо теореми.
Теорема 1. Білінійна форма (6) є неперервна за своїми аргументами.
Доведення. Для доведення теореми потрібно довести нерівність

$$(\mathbf{Ac},\tilde{\mathbf{c}})^2 \le M \|\, \mathbf{c} \,\|_{W_2^1}^2 \|\, \tilde{\mathbf{c}} \,\|_{W_2^1}^2 ,$$

де $M = const,\ \ M > 0$;

$$\|\, \mathbf{c} \,\|_{W_2^1}^2 = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left[c_1'^2 + c_2'^2 + c_1^2 + c_2^2 \right] d\xi .$$

Тут для спрощення запису вживатимемо позначення $\partial \mathbf{c} / \partial \xi = d\mathbf{c} / d\xi = \mathbf{c}'$.

З огляду на громіздкість простих перетворень наведемо тільки основні кроки, які потрібно виконати для доведення.

Крок 1. Підносимо до квадрату суму у правій частині формули (6).

Крок 2. Оцінюємо зверху доданки зі знаком мінус, використовуючи елементарну нерівність, наприклад

$$-2a\int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1\tilde{c}_1 d\xi \int_{\xi_0}^{\xi_e} \tilde{c}_1 c_2 d\xi \le a\left[\int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1\tilde{c}_1 d\xi\right]^2 + a\left[\int_{\xi_0}^{\xi_e} \tilde{c}_1 c_2 d\xi\right]^2.$$

Крок 3. Інтеграл від кожного з доданків, які містять добутки функцій c_1, c_2, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ та їх похідних, оцінюємо зверху, використовуючи нерівність Шварца, наприклад

$$\left[\int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1\tilde{c}_1 d\xi\right]^2 \le \int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1^2 d\xi \int_{\xi_0}^{\xi_e} \tilde{c}_1^2 d\xi.$$

В результаті отримаємо потрібну нерівність.

Теорема 2. Білінійна форма (6) є V-еліптична.

Доведення. Для доведення потрібно довести нерівність

$$(\mathbf{Ac}, \mathbf{c}) \ge \alpha \| \mathbf{c} \|_V^2.$$

Згрупуємо доданки у формулі (6) з однаковими добутками шуканих функцій c_1, c_2 та їх похідних. Матимемо

$$(\mathbf{Ac}, \mathbf{c}) = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left[\left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 + ac_1^2 + d_1\left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 - (1+a)c_1c_2 - \right.$$
$$\left. + (d_1 + d_2)\frac{dc_1}{d\xi}\frac{dc_2}{d\xi} + d\left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 + c_2^2 \right] d\xi. \tag{7}$$

Перепишемо формулу (7) у вигляді

$$(\mathbf{Ac}, \mathbf{c}) = \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left[\frac{p_1 - 1}{p_1}\left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{p_1}\left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 + ac_1^2 + c_2^2 + \frac{p_2 - 1}{p_2} d\left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p_2} d\left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 - (1+a)c_1c_2 + (d_1 + d_2)\frac{dc_1}{d\xi}\frac{dc_2}{d\xi} \right] d\xi. \tag{8}$$

Оцінимо знизу білінійну форму (8). Для цього використаємо елементарні нерівності

$$2ab \geq -\varepsilon_1 a^2 - \frac{1}{\varepsilon_1} b^2 \qquad \forall \varepsilon_1, a, b \in R, \quad \varepsilon_1 > 0\,, \tag{9}$$

$$-2ab \geq -\varepsilon_2 a^2 - \frac{1}{\varepsilon_2} b^2 \qquad \forall \varepsilon_2, a, b \in R, \quad \varepsilon_2 > 0\,, \tag{10}$$

які випливають із нерівностей

$$\left(\sqrt{\varepsilon_1}\, a + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} b\right)^2 \geq 0, \qquad \left(\sqrt{\varepsilon_2}\, a + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} b\right)^2 \geq 0\,.$$

Використаємо далі для оцінки знизу похідних нерівності

$$\frac{p_1 - 1}{p_1} \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 d\xi \geq \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{2}{\left(\xi_e - \xi_0\right)^2} \int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1^2 d\xi\,,$$

$$\frac{p_2 - 1}{p_2} d \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 d\xi \geq \frac{p_2 - 1}{p_2} \frac{2}{\left(\xi_e - \xi_0\right)^2} d \int_{\xi_0}^{\xi_e} c_1^2 d\xi\,,$$

які є наслідком нерівності Фрідріхса [3]. Два останні доданки у формулі (8) оцінимо з використанням нерівностей (9), (10). Остаточно отримаємо

$$\left(\mathbf{Ac}, \mathbf{c}\right) \geq \int_{\xi_0}^{\xi_e} \left\{ \left(\frac{1}{p_1} - \frac{d_1 + d_2}{2} \varepsilon_1\right) \left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{d_1 + d_2}{2\varepsilon_1}\right) \left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[a - \frac{\varepsilon_2}{2}\left(1 + a\right) + \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{2}{\left(\xi_e - \xi_0\right)^2}\right] c_1^2 + \left[1 + \frac{2d\left(p_2 - 1\right)}{p_2 \left(\xi_e - \xi_0\right)^2} - \frac{1 + a}{2\varepsilon_2}\right] c_2^2 \right\} d\xi\,.$$

Запишемо умови додатності коефіцієнтів при квадратах шуканих функцій та їх похідних

$$\frac{1}{p_1} - \frac{d_1 + d_2}{2} \varepsilon_1 > 0, \qquad \frac{1}{p_2} - \frac{d_1 + d_2}{2\varepsilon_1} > 0,$$

$$a - \frac{\varepsilon_2}{2}(1 + a) + \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{2}{\left(\xi_e - \xi_0\right)^2} > 0\,, \quad 1 + \frac{2d\left(p_2 - 1\right)}{p_2 \left(\xi_e - \xi_0\right)^2} - \frac{1 + a}{2\varepsilon_2} > 0. \tag{11}$$

Отримаємо з них двосторонні оцінки для чисел ε_1, ε_2. Для того, щоб множина додатних чисел ε_1, ε_2 не була порожньою, потрібно вимагати, щоб нижня межа для кожного з них була менша за верхню межу. Звідси випливає

$$0 < \frac{p_2\left(d_1 + d_2\right)}{2} < \frac{2}{p_1\left(d_1 + d_2\right)},$$

$$0 < \frac{1 + a}{2} \left[\frac{p_2}{p_2 + d\left(p_2 - 1\right)}\right] < \frac{2}{1 + a} \left[a + \frac{\left(p_1 - 1\right)}{p_1} \beta\right]. \tag{12}$$

Очевидно, що для вибраних значень чисел p_1, p_2 та відомих значень коефіцієнтів рівнянь гетеродифузії ліві частини подвійних нерівностей (12) виконуються.

Перетворимо першу нерівність із системи (12). Отримаємо

$$p_1 p_2 < \frac{4}{\left(d_1 + d_2\right)^2}.$$

Враховуючи обмеження на коефіцієнти рівнянь гетеродифузії, а, саме, $a_1 \ll 1,\ a_2 \ll 1$ можемо зробити висновок, що множина чисел p_1, p_2, що задовольняє першу нерівність із системи (12), не є порожня.

Із другої нерівності системи (12) одержимо

$$\frac{p_1 p_2}{\left[p_2 + d\left(p_2 - 1\right)\beta\right]\left[a p_1 + \left(p_1 - 1\right)\beta\right]} < \frac{4}{(1+a)^2}.$$

З умов (11) маємо

$$\varepsilon_1 < \frac{2}{p_1\left(d_1 + d_2\right)}, \quad \varepsilon_1 > \frac{p_2\left(d_1 + d_2\right)}{2},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{2}{1+a}\left[a + \frac{2\left(p_1 - 1\right)}{p_1 l^2}\right], \quad \varepsilon_2 > \frac{1+a}{2}\left[\frac{p_2 l^2}{1 + 2d\left(p_2 - 1\right)}\right],$$

де $l = \xi_e - \xi_0$. З попередніх нерівностей для меж параметрів $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ матимемо

$$\frac{p_2 p_1}{\left(p_1 - 1\right)\left(p_2 - 1\right)} < \frac{4}{\left(d_1 + d_2\right)^2}, \quad \frac{p_2 l^2}{p_2 l^2 + 2d\left(p_2 - 1\right)} < \frac{4}{(1+a)^2}\frac{p_1 l^2 + 2\left(p_1 - 1\right)}{p_1 l^2}.$$

Отже, якщо для заданих коефіцієнтів оператора **A** існують такі числа $p_1, p_2 \in N,\ p_1 > 1,\ p_2 > 1$, то оператор **A** — V-еліптичний, тобто

$$\left(\mathbf{Ac}, \tilde{\mathbf{c}}\right) \geq \alpha \| \mathbf{c} \|^2_{W_2^1}.$$

Тут $\| \mathbf{c} \|^2_{W_2^1} = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_e}\left[\left(\frac{dc_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{d\xi}\right)^2 + c_1^2 + c_2^2\right]d\xi$, $\alpha = const,\ \alpha > 0,$

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{d_1 + d_2}{2}\varepsilon_1,\ \frac{1}{p_2} - \frac{d_1 + d_2}{2\varepsilon_1},\ a - \frac{\varepsilon_2}{2}(1+a) + \frac{p_1 - 1}{p_1}\frac{2}{\left(\xi_e + \xi_0\right)^2},\right.$$

$$\left. 1 + \frac{2d\left(p_2 - 1\right)}{p_2\left(\xi_e + \xi_0\right)^2} - \frac{1+a}{2\varepsilon_2}\right\}.$$

3. Результати обчислювальних експериментів

Наведемо результати обчислювальних експериментів, проведених із використанням програмного забезпечення, розробленого авторами в середовищі Microsoft Visual Studio 2008 на платформі .NET Framework 3 на мові програмування C# [6]. Для обчислень використано напівдискретну схему методу Гальоркіна [3-5] з лінійною одновимірною скінченно-елементною апроксимацією розв'язку за просторовою змінною та кусково-лінійною апроксимацією за часом. На рис. 1 подано зображення екрану з кривими розподілу концентрацій c_1, c_2, $c = c_1 + c_2$ для значень $d_1 = d_2 = 0$; $a = 10$; $d = 0,8$ у момент часу $t = 10$. Зауважимо, що для вибраних даних оператор **A** — V-еліптичний, тобто напівдискретна схема методу Гальоркіна є збіжна та стійка.

Наведемо (рис. 1) графік залежності відносної похибки $\left(\delta = = \max\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}_a\right| / \max\left|\mathbf{c}_a\right|\right)$ наближеного розв'язку в момент часу $t = 10$ від кількості скінченних елементів n, де $\mathbf{c}_a$ відповідний аналітичний розв'язок з роботи [1], оцифрований за допомогою програмного забезпечення, створеного в рамках іноваційного проекту НАН України «Розробка та впровадження пакету програм для прогнозування забруднення ґрунтових вод токсичними речовинами за даними наземних вимірювань їхніх концентрацій на поверхні ґрунту».

Як видно (рис. 2), відносна похибка досить швидко спадає з ростом числа скінченних елементів. Загалом результати, отримані із використанням методу скінченних елементів (рис. 1) добре узгоджуються з результатами, отриманими з використанням підходів, запропонованих у роботі [1].

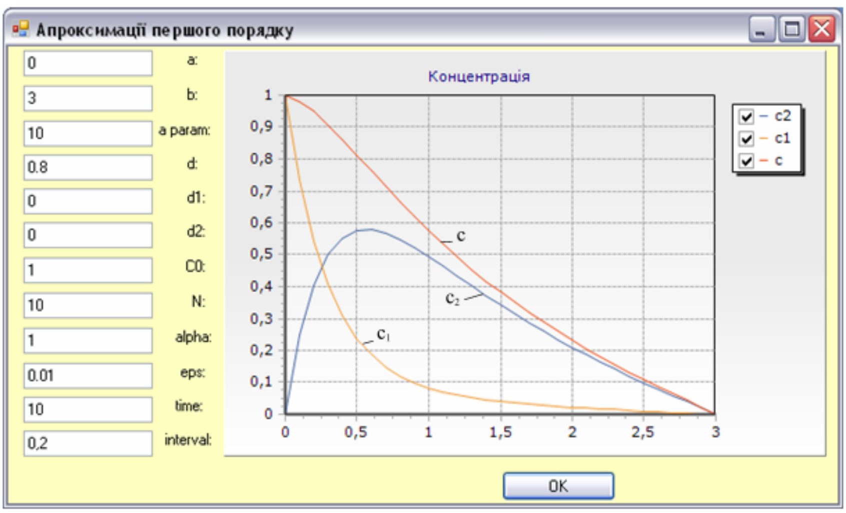

Рис. 1. Результати обчислень

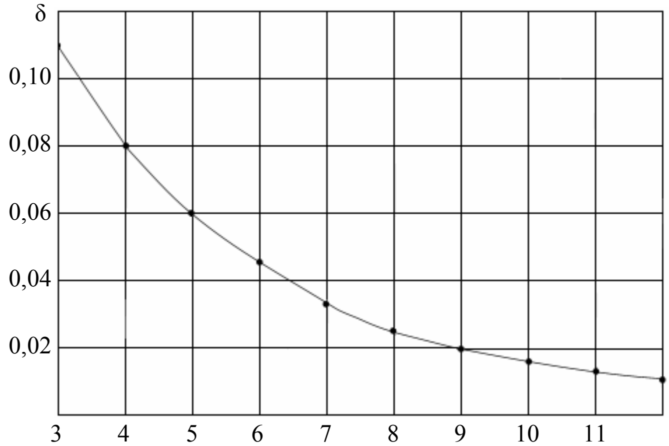

Рис. 2. Відносна похибка

Висновок. Отже, на основі дослідження властивостей білінійних форм слабкого формулювання початково-крайової задачі нестаціонарної гетеродифузії для системи двох диференціальних рівнянь доведено існування та єдиність її слабкого розв'язку. Шляхом проведення обчислювального експерименту на основі застосування напівдискретного методу скінченних елементів показано, що для задачі, яка розглядалася, досягається швидко спадна з ростом числа скінченних елементів відносна похибка наближеного числового розв'язку порівняно з аналітичним розв'язком роботи [1].

Література

[1] *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 128 с.

[2] *Щербата Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. —2010. — Вип. 12. — С. 206-215.

[3] *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.

[4] *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. — Москва: Мир, 1974. — 126 с.

[5] *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — Москва: Мир, 1981. — 216 с.

[6] *Петцольд Ч.* Программирование для Microsoft Windows на C#. — «Русская редакция», 2002. — 576 с.

Finite element analysis for initial-boundary value problems of heterodiffusion

Yarema Savula, Adrian Torskyj, Maria Fedak

One-dimensional with respect to spatial variables nonstationary problem of heterodiffution is considered. It proved to be the initial-boundary value problem for system of two differential equations. Its weak formulation is presented and the properties of its bilinear forms which ensure *the existence and uniqueness of weak solution are studied. The semidiscrete finite-element method is used in the form of Galerkin's method to solve the heterodiffution problem. Numerical experiments with usage of software developed by the authors, which is based on an approximation of the solution with Lagrangian-type basis functions of the first order, are carried out. The results of study of obtained numerical solution regarding the accuracy are presented.*

Анализ методом конечных элементов начально-краевых задач гетеродиффузии

Ярема Савула, Адриан Торский, Мария Федак

Рассмотрена одномерная по пространственным переменным нестационарная задача гетеродиффузии, которая представляет начально-краевую задачу для системы двух дифференциальных уравнений. Записана слабая формулировка задачи и исследованы свойства её билинейных форм, которые обеспечивают существование и единственность слабого решения. Для численного решения задачи гетеродиффузии применяется полудискретный метод конечных элементов в форме метода Галеркина. Выполнены вычислительные эксперименты с использованием программного обеспечения, разработанного авторами об аппроксимации решения базисными функциями лагранжевого типа первого порядка. Приведены результаты исследования точности численного решения.

Отримано 24.10.13