

Дослідження нелінійних ефектів взаємодії відокремлених хвиль деформації з областями змінної густини в анізотропному твердому тілі

Юрій Турбал

К. ф.-м. н., доцент, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, e-mail: turbaly@gmail.com

У роботі розглядаються відокремлені хвилі деформації типу δ -солітонів в анізотропних пружних матеріалах, що задовольняють узагальненому закону Гука. Для дослідження таких хвиль використано підхід, суть якого полягає у знаходженні збурень у вигляді обмежених неперервно-диференційованих функцій спеціального типу, які містять амплітудні параметри та компоненти, що відповідають за форму і локалізацію хвилі. В роботі розглядається рух локалізованої хвилі деформації в області змінної густини у напрямку її зростання. При цьому розглядається випадок руху хвилі у площині, перпендикулярній до осі Oz декартової системи координат. Числовим методом досліджено процес зміни амплітуди хвилі деформації під час її руху в напрямку зростання густини, а також виявлено низку ефектів виникнення цугів нелінійних відокремлених хвиль.

Ключові слова: анізотропія, рівняння руху, солітон, закон Гука, рівняння в частинних похідних.

Вступ. Дослідження відокремлених хвиль деформації у твердих тілах останнім часом стосується велика кількість робіт. Це зумовлено тим, що відокремлені хвилі, зокрема солітони, мають низка специфічних властивостей, які пов'язані зі здатністю зберігати форму та локалізовану природу під час проходження на значні відстані, специфічною взаємодією між собою та з перешкодами. Останнім часом відокремлені хвилі досліджуються у сейсмології, яку цікавлять аномально високі сейсмічні хвилі деформації. У низці робіт солітони розглядають як спускові механізми землетрусів, що особливо підкреслює актуальність і важливість їх дослідження.

У межах структурно-феноменологічного підходу були запропоновані та досліджені різні моделі, зокрема, пошкоджене середовище з мікроструктурою, континуум Коссера з обмеженим рухом, середовище з деформаціями [5], зернисте середовище, які допускають солітонні розв'язки рівнянь руху.

Зазначимо, що в межах багатьох класичних підходів моделі деталізуються, зазвичай, до одновимірного (добре вивчені задачі поширення відокремлених хвиль у стержнях) чи двовимірного випадків (розглядають двовимірну хвилю деформації у пластині [3]). Існують теж роботи, у яких досліджується специфіка руху

локалізованої тривимірної хвилі деформації у анізотропних тілах [1], зокрема, знайдені умови, за яких можуть існувати відповідні локалізовані хвилі деформації.

Ця стаття є продовженням згаданого вище дослідження тривимірних відокремлених хвиль деформації у анізотропних пружних тілах, які розглядалися у роботах [1, 2]. Метою є дослідження руху її тривимірного збурення, що має характер відокремленої хвилі типу δ -солітона в області змінної густини для анізотропного пружного тіла. При цьому використовується запропонований у роботах [1, 2] підхід, суть якого полягає у знаходженні відокремлених хвиль деформації у вигляді функцій спеціального виду, для ідентифікації яких використано термін — δ -солітон. Аналогічні відокремлені хвилі були знайдені як часткові розв'язки низки лінійних і нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних (рівняння типу мілкої води, Кортевега да-Вріза, рівняння газової динаміки гравітуючого газового диску галактик, рівнянь руху анізотропного пружного тіла).

1. Загальне формулювання задачі

Розглядаємо анізотропні пружні тіла, що відповідають моделі узагальненого закону Гука. Розглянемо анізотропне середовище, властивості якого споріднені із властивостями групи кристалів S, C_2, C^h [4, с. 171], для якої в законі Гука є 13 вільних коефіцієнтів, коли рівняння руху мають вигляд [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ((c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 0, 0), \Theta u) + ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, 0, 0), \Theta v) + ((0, 0, 0, 0, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \Theta w); \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{66} + c_{12}, 0, 0), \Theta u) + ((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 0, 0), \Theta v) + ((0, 0, 0, 0, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta w); \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ((0, 0, 0, 0, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \Theta u) + ((0, 0, 0, 0, c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \Theta v) + ((c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 0, 0), \Theta w), \quad (3)$$

де u, v, w — зміщення вздовж відповідних осей у декартовій системі координат;

$\Theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right)$; $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1,6}$ — матриця пружних сталей;

$\rho(x, y, z)$ — густина. Зауважимо, що розглядаємо тут декартову систему координат.

Розв'язки системи (1)-(3) шукаємо у вигляді:

$$u(x, y, z, t) = \psi_u(x, y, z, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(x,y,z,t))}{\varepsilon_1} + \frac{g(y-\tilde{y}(x,y,z,t))}{\varepsilon_2} + \frac{g(z-\tilde{z}(x,y,z,t))}{\varepsilon_3}}; \quad (4)$$

$$v(x, y, z, t) = \psi_v(x, y, z, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(x,y,z,t))}{\varepsilon_1} + \frac{g(y-\tilde{y}(x,y,z,t))}{\varepsilon_2} + \frac{g(z-\tilde{z}(x,y,z,t))}{\varepsilon_3}}; \quad (5)$$

$$w(x, y, z, t) = \psi_w(x, y, z, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} - \frac{g(y-\tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} - \frac{g(z-\tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3}}. \quad (6)$$

Тут $g(\cdot) \in G$; G — клас додатно-визначених, унімодальних, двічі неперервно-диференційовних функцій, які мають мінімум у початку координат, рівний 0 та для яких другі похідні відмінні від констант; $\psi_u(x, y, z, t)$, $\psi_v(x, y, z, t)$, $\psi_w(x, y, z, t)$ — деякі функції, що визначають амплітуду відповідних збурень; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — константи, що визначають локалізацію збурень; $\tilde{x}(x, y, z, t)$, $\tilde{y}(x, y, z, t)$, $\tilde{z}(x, y, z, t)$ — функції, що задають траєкторію відокремлених хвиль.

2. Знаходження загальних розв'язків

Досліджуватимемо рух відокремленої хвилі в області змінної густини $\rho(x, y, z) = \rho(x)$, причому $\psi_u = \psi_u(x, y, t)$, $\psi_v = \psi_v(x, y, t)$, $\psi_w = \psi_w(x, y, t)$, $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(x, y, t)$, $\tilde{y}(\cdot) = \tilde{y}(x, y, t)$, $\tilde{z}(\cdot) = \text{const}$.

Здиференціювавши функції (4)-(6) для цього випадку та підставивши в рівняння (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \rho \psi_u''(t) W(x, y, z, t) + 2\rho \psi_u'(t) W(x, y, z, t) G(x, y, z, t) + \\ & + \rho \psi_u(t) W(x, y, z, t) G^2(x, y, z, t) + \rho \psi_u(t) W(x, y, z, t) \left[\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}''(t) - \right. \\ & - \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}'^2(t) + \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}''(t) - \frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}'^2(t) + \\ & \left. + \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}''(t) - \frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}'^2(t) \right] = \\ & = c_{11} \left\{ \frac{\partial \psi_u}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right] + \right. \\ & + \psi_u(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right]^2 + \\ & + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(x, y, z, t) \right) \right] + \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right] \right\} + \\ & + c_{66} \left\{ \frac{\partial \psi_u}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\Psi_u(\rho, t)W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(x, y, z, t) \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] \Bigg\} + \\
 & + c_{55} \left\{ \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] + \right. \\
 & + \Psi_u(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right]^2 + \\
 & + \Psi_u(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{z}(t, \rho) \right) \right] \Bigg\} + \\
 & + \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] \Bigg\} + \\
 & + (c_{12} + c_{66}) \left\{ \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right] + \right. \\
 & + \Psi_v(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] \left[\Phi_x(t, x, y, z) - \right. \\
 & - \left. \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right] + \Psi_v(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z)}{\partial y} + \right. \\
 & + \left. \frac{g''(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(x, y, z, t) \right] \Bigg\} + \\
 & + \frac{\partial^2 \Psi_v}{\partial y \partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] \Bigg\} + \\
 & + \Psi_u(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z)}{\partial z} + \frac{g''(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{x}(x, y, z, t) \right] + \\
 & + \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial z \partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] \Bigg\} + \\
 & + c_{15} \left\{ \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right] + \right. \\
 & + \Psi_w(x, y, z, t) W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right]^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Psi_w(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(x, y, z, t) \right) \right] + \\
& + \frac{\partial^2 \Psi_w}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} W(x, y, z, t) \left[\Phi_x(t, x, y, z) - \frac{g'(x - \tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \right] + \\
& + c_{26} \left\{ \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] + \right. \\
& + \Psi_v(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right]^2 + \\
& + \Psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z)}{\partial y} - \frac{g''y - \tilde{y}(x, y, z, t)}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(x, y, z, t) \right) \right] + \\
& + \left. \frac{\partial^2 \Psi_v}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] \right\} + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left\{ \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} W(x, y, z, t) \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] + \right. \\
& + \Psi_w(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] \left[\Phi_y(t, x, y, z) - \right. \\
& - \left. \left. \frac{g'(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \right] + \Psi_w(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z)}{\partial z} + \right. \\
& + \left. \frac{g''(y - \tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{y}(x, y, z, t) \right] + \frac{\partial^2 \Psi_w}{\partial z \partial y} W(x, y, z, t) + \\
& + \left. \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] \right\} + \\
& + c_{45} \left\{ \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] + \right. \\
& + \Psi_v(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right]^2 + \\
& + \Psi_v(x, y, z, t)W(x, y, z, t) \left[\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{z}(t, \rho) \right) \right] + \\
& + \left. \frac{\partial^2 \Psi_v}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} W(x, y, z, t) \left[\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \right] \right\},
\end{aligned}$$

де штрихом позначена похідна за часом, а

$$\begin{aligned}
 W(x, y, z, t) &= e^{-\frac{g(x-\tilde{x}(t,\rho))}{\varepsilon_1} - \frac{g(y-\tilde{y}(t,\rho))}{\varepsilon_2} - \frac{g(z-\tilde{z}(t,\rho))}{\varepsilon_3}}, \\
 \Phi_x(t, x, \rho) &= \frac{g'(x-\tilde{x}(t,\rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t,\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\
 G(x, y, z, t) &= \frac{g'(x-\tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}'(x, y, z, t) + \frac{g'(y-\tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}'(x, y, z, t) + \\
 &+ \frac{g'(z-\tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}'(x, y, z, t), \\
 \Phi_x(t, x, y, z) &= \frac{g'(x-\tilde{x}(x, y, z, t))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(x, y, z, t) + \\
 &+ \frac{g'(y-\tilde{y}(x, y, z, t))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(x, y, z, t) + \frac{g'(z-\tilde{z}(x, y, z, t))}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{z}(x, y, z, t).
 \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що розв'язок шукається для певного класу функцій, в останньому співвідношенні прирівнюємо до нуля всі коефіцієнти, які стоять при відповідних виразах, що містять функцію $g()$. Аналогічний підхід застосовувався в роботах [1, 2]. Надалі, для спрощення розрахунків будемо розглядати одновимірний випадок, коли $\psi_v = 0$, $\psi_w = 0$, $\psi_u = \psi_u(x, t)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(x, t)$. У цьому разі щодо функцій ψ_u зі співвідношення (1) отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial t^2} &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y \partial x}, \\
 -\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
 -\rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right)^2, \quad 0 = -c_{55} \psi_u(\cdot), \\
 2\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) &= 2c_{11} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + 2c_{66} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1\right), \\
 0 &= -2c_{15} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right), \quad 0 = -2c_{15} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot), \\
 2\rho \psi_u'(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) &= c_{11} \left[2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1\right) + \right. \\
 &+ \left. \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot) \right] + c_{66} \left[2 \frac{\partial \psi_u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\rho\Psi'_u(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\Psi_u(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\Psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \right. \\
&+ \left.\Psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right) + c_{66}\left[2\frac{\partial\Psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right) + \Psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right], \\
0 &= -c_{66}2\frac{\partial\Psi_u}{\partial y} - 2c_{15}\frac{\partial\Psi_u}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Аналогічно для рівняння (2):

$$\begin{aligned}
0 &= (c_{12} + c_{66})\frac{\partial^2\Psi_u}{\partial y\partial x} + c_{26}\frac{\partial^2\Psi_u}{\partial y^2}, \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\Psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right) - c_{26}\Psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\Psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - c_{26}\Psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= -c_{45}\Psi_u(\cdot), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\Psi_u(\rho,t)\left[\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right] + \\
&+ 2c_{26}\Psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\left[\frac{\partial\Psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right) + \Psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\Psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right] + \\
&+ c_{26}\left(2\frac{\partial\Psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \Psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot)\right), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\left[\frac{\partial\Psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \Psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \frac{\partial\Psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho)-1\right)\right] + \\
&+ c_{26}\left[2\frac{\partial\Psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho)-1\right) + \Psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right]
\end{aligned} \tag{8}$$

і для рівняння (3) —

$$\begin{aligned}
0 &= c_{15}\frac{\partial^2\Psi_u}{\partial x^2}, \quad 0 = -c_{15}\Psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \quad 0 = -c_{15}\Psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= 2c_{15}\Psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= -(c_{13} + c_{55})\Psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) - (c_{36} + c_{45})\Psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) - \\
 &- (c_{45} + c_{36})\Psi_v(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) - (c_{23} + c_{44})\Psi_v(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot), \\
 0 &= -(c_{13} + c_{55})\Psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) - (c_{36} + c_{45})\Psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1 \right), \\
 0 &= c_{15} \left[2 \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1 \right) + \Psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial x^2} \right] + (c_{36} + c_{45})\Psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial y^2}, \\
 0 &= -(c_{13} + c_{55}) \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \Psi_u}{\partial y}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Якщо виконуються умови

$$\begin{aligned}
 c_{15} = c_{55} = c_{45} = 0, \quad (c_{36} + c_{45}) = (c_{13} + c_{55}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} = 0, \\
 c_{26} = 0, \quad c_{12} = c_{66} = 0,
 \end{aligned}$$

які визначають характер анізотропії, то з системи (7)-(9) буде отримано:

$$\begin{aligned}
 \rho \tilde{x}'^2(\cdot) &= c_{11} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) \right)^2, \quad \rho \tilde{y}'^2(\cdot) = c_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) \right)^2, \\
 \rho \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) &= c_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot), \\
 2\rho \Psi'_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \Psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) &= c_{11} \left[2 \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1 \right) + \Psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial x^2} \right], \tag{10} \\
 2\rho \Psi'_u(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) + \rho \Psi_u(\cdot) \tilde{y}''(\cdot) &= c_{11} \left(2 \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, \rho) + \Psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{y}(\cdot)}{\partial x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Для спрощення запису загального розв'язку будемо додатково вважати, що $\tilde{x}(\cdot) - x = \tilde{y}(\cdot)$. При виконанні останньої умови друге рівняння системи (10) стає тотожним третьому, четверте-п'ятому. Тоді з попередньої системи

$$\begin{aligned}
 \rho \Psi''_u(t) = c_{11} \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial x^2}, \quad \rho \tilde{x}'^2(\cdot) &= c_{11} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) \right)^2, \\
 2\rho \Psi'_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \Psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) &= c_{11} \left[2 \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1 \right) + \Psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial x^2} \right]. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Із використанням другого рівняння ця система зводиться до сукупності незалежних рівнянь:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t, x) &= \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) \right), \\ \psi'_u(t, x) &= -\chi(c_{11})^{1/2} \psi_u(t, x) \frac{1}{4} \rho^{-3/2} \rho' - \chi(c_{11})^{1/2} \rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x}, \\ 4\rho'' - 5\rho^{-1}(\rho')^2 &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

яка має загальний розв'язок:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{(cx+a)^4}, \quad \tilde{x}(t, x) = t + \Phi \left[x + \frac{\chi}{(c_{11})^{1/2} c(cx+a)} \right], \\ \psi_u(t, x) &= (cx+a) H \left(t + \frac{1}{\chi(c_{11})^{1/2} c} \right), \end{aligned}$$

де Φ, H — довільні функції; c, a — сталі інтегрування.

3. Приклад моделювання відокремленої хвилі деформації

Для того, щоб проілюструвати поведінку солітона, розв'яжемо систему (12) для конкретного випадку властивостей матеріалу $c_{11} = 1$, $\rho(x) = 10/(x-6)^4$, $\chi = 1$, $g(x) = x^2$ та крайових умов: $\tilde{x}(x, 0) = 0, 1$; $\tilde{x}(0, t) = 0, 1$; $\psi_u(x, 0) = 0, 5$; $\psi_u(0, t) = 0, 5$. Також для спрощення вважатимемо, що хвиля рухається у площині, перпендикулярній до осі Oz . Тоді матимемо функцію, що описує характер хвилі деформації:

$$u(x, y, z, t) = \psi_u(x, t) e^{-\frac{g(x-\tilde{x}(x,t))}{\varepsilon_1} - \frac{g(y-x+\tilde{x}(x,t))}{\varepsilon_2} - \frac{g(z-\tilde{z})}{\varepsilon_3}}, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Наближені розв'язки рівнянь (13) будемо знаходити в системі Mathcad 15.0 (Trial version). Графіки функції $u(x, y, 0, t)$ за чотирьох різних моментів часу зображені на рис. 1-4.

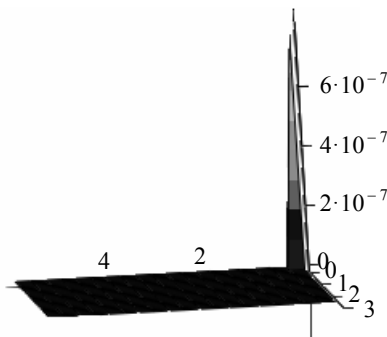


Рис. 1. $t = 0$

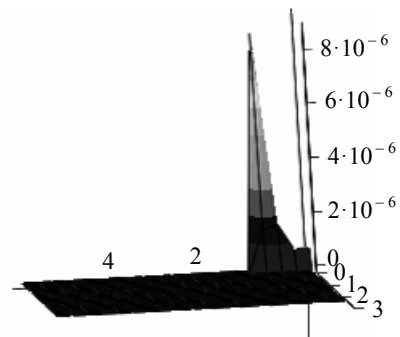


Рис. 2. $t = 0,1$

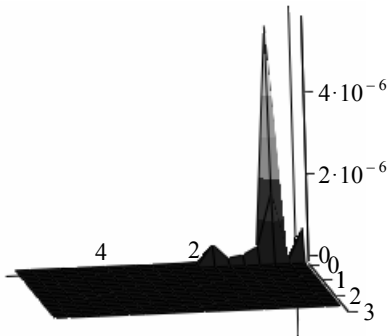


Рис. 3. $t = 0,29$

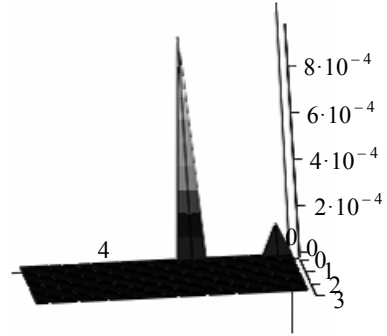


Рис. 4. $t = 0,31$

Висновки. Таким чином, у статті продемонстровано мінливість існування локалізованих структурно-стійких хвиль деформації для анізотропного пружного тіла у випадку нелінійного закону зміни густини. Як показали числові розрахунки, відокремлена хвиля рухається в напрямку області зростання густини (на рис. 1- 4 справа-наліво) з певною швидкістю, при цьому спостерігається зменшення її амплітуди. Після досягнення хвилею певної величини густини (для останнього прикладу для $t = 0,1$), спостерігались нелінійні ефекти виникнення нових збурень в області, яку пройшла початкова відокремлена хвиля (рис. 4, 5). Таким чином, солітон проходячи в області змінної густини, породжує серію нових хвиль, виникає цуг нелінійних коливань (рис. 5), які рухаються за початковою відокремленою хвилею. При цьому нові збурення характеризуються істотною зміною амплітуди в часі, спостерігались ефекти зростання амплітуди окремих коливань до величин, значно більших, ніж амплітуда хвилі-генератора. У процесі подальшого зростання густини амплітуда усіх збурень прямує до 0. Така властивість справджується і для інших нелінійних законів зміни густини та зумовлена лише нелінійністю закону зростання густини. Якщо густина не змінюється, ефектів виникнення додаткових збурень після проходження відокремленої хвилі не спостерігалось.

Зазначимо, що низка обмежень, які виникли під час цього дослідження, зокрема, рівняння для густини (12), рівність нулю окремих пружних сталей,

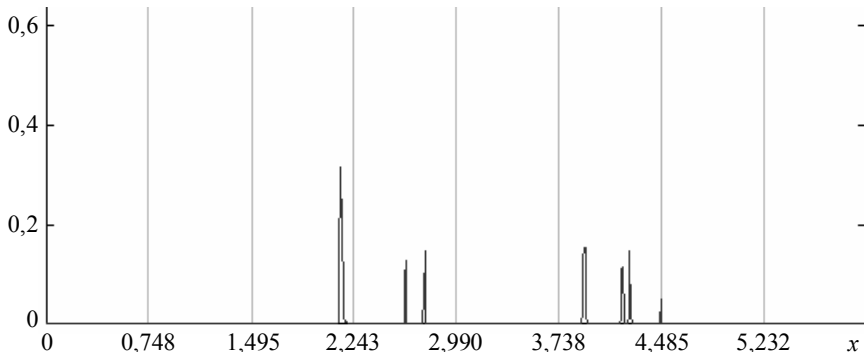


Рис. 5. $t = 1,6$

пов'язані зі специфікою самого підходу до знаходження розв'язків і не означають, що для інших випадків анізотропії та законів зміни густини відокремлених локалізованих хвиль солітонного типу не існує.

Література

- [1] Турбал Ю. В. О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа δ -солитонов // Проблемы прикладной математики и математического моделирования. — 2012. — Вып. 2 — С. 78-86.
- [2] Турбал Ю. В. Дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2012. — Вип. 18. — С. 76-90.
- [3] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. — Taylor&Francis, London, 2002. — 500 p.
- [4] Ляв А. Математическая теория упругости. — Москва-Ленинград: ОНТИ, 1935. — 675 с.
- [5] Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. — Москва: Издательство Московского университета, 1999. — 328 с.

The study of nonlinear solitary waves of deformation interaction effects with regions of variable density in anisotropic solids

Yuriy Turbal

The paper deals with the type strain solitary waves solitons in anisotropic elastic materials that satisfy the generalized Hooke's law. In order to study these waves, we find perturbations in the form of limited continuous-differentiated functions of a special type, containing amplitude parameters and components that determine the shape and location of the wave. We consider the motion of localized deformation wave of increasing density. In particular, the case of wave motion in a plane perpendicular to the Oz axis of the Cartesian coordinate system is considered. The process is numerically investigated for changing the amplitude of the wave deformation in the course of its movement and the emergence of a train of nonlinear solitary waves.

Исследование нелинейных эффектов взаимодействия уединенных волн деформации с областями изменяющейся плотности для анизотропного твердого тела

Юрий Турбал

В работе рассматриваются уединенные волны деформации типа δ -солитонов в анизотропных упругих материалах, удовлетворяющих обобщенному закону Гука. Для исследования таких волн использован подход, сущность которого состоит в нахождении возмущений в виде ограниченных непрерывно-дифференцированных функций специального типа, содержащих амплитудные параметры и компоненты, определяющие форму и локализацию волны. В работе рассматривается движение локализованной волны деформации в области возрастающей плотности. При этом рассмотрен случай движения волны в плоскости, перпендикулярной к оси Oz декартовой системы координат. Численно исследован процесс изменения амплитуды волны деформации в ходе ее движения, а также возникновение цуга нелинейных уединенных волн.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 03.07.13