

## Числове дослідження просторової задачі про термопружнопластичне деформування товстостінної циліндричної панелі під дією теплового навантаження

Ігор Муха<sup>1</sup>, Дмитро Неспляк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Университетська, 1, Львів, 79000, e-mail: imukha@franko.lviv.ua

<sup>2</sup> Львівський державний університет внутрішніх справ, вул. Городоцька, 26, Львів, 79000, e-mail: dmytro\_nesplyak@mail.ru

*Запропоновано новий спосіб побудови множини просторових скінченних елементів. На підставі такого підходу розроблено безумовно стійку числову схему для розв'язування просторових задач термопластичного деформування тіл. Проаналізовано результати розв'язування одної просторової задачі й отримано нові якісні висновки.*

**Ключові слова:** метод Ньютона-Рафсона, метод проміжної точки, безумовно стійка числова схема, просторова задача термопластичності, рухоме теплове навантаження.

**Вступ.** Нові конструкції машинобудування у процесі експлуатації піддаються дії нестационарних температурних полів і зовнішніх навантажень. Математичні моделі таких процесів відносяться до категорії складних моделей [1]. Для адекватного моделювання вказаних процесів слід використовувати нелінійні початково-крайові задачі. Можливості відомих аналітичних методів для їх розв'язання суттєво обмежені низкою гіпотез, які у багатьох випадках ведуть до істотних похибок в оцінці термопластичного напружено-деформованого стану. Тому все частіше під час розв'язання нелінійних задач термопластичного деформування дослідники вдаються до використання числових методів, зокрема методу скінченних елементів. Зазвичай, для реалізації цього методу здійснюють дискретизацію просторового тіла, віднесеного до декартової системи координат. У цій праці запропоновано методику побудови просторових скінченних елементів у криволінійній системі координат, пов'язаній з деякою поверхнею досліджуваного тіла. Ефективність такого підходу теоретично обґрунтовано та проілюстровано на реальній задачі.

### 1. Формулювання задачі

Увесь процес навантаження циліндричної панелі розділимо на ряд достатньо малих етапів, кількість і тривалість яких дає можливість із необхідною точністю описати деформування як низку послідовних рівноважних станів. Розв'язок задачі за часом шукатимемо у точках  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} < \dots \tau_M = t$ . Нехай задачу

теплопровідності уже розв'язано [2] та відомий розподіл поля температури у моменти часу  $\tau_m$ . Припустимо далі, що розв'язано і задачу про деформування тіла у момент часу  $\tau_m$  й у попередні моменти часу. Нехай далі за час  $\Delta\tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m$  точки тіла змінили свою температуру на  $T^{(m)}$ . Під дією цих факторів тіло змінило свою конфігурацію й у ньому виникли додаткові переміщення  $\vec{u}^{(m)}$ , деформації  $\hat{\varepsilon}^{(m)}$  і напруження  $\hat{\sigma}^{(m)}$ . Рівновагу тіла після довантаження будемо визначати виходячи з принципу віртуальних робіт

$$\int_V \left( \overset{\circ}{\sigma}_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(m)} \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dV = \int_V \left( \overset{\circ}{Q}_i^{(m)} + Q_i^{(m)} \right) \delta u_i^{(m)} dV + \int_{S_\sigma} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{vi}^{(m)} + \sigma_{vi}^{(m)} \right) \delta u_i^{(m)} dS.$$

Для визначення малих скінченних приростів пластичних деформацій використовуємо метод проміжної точки [3-5]. Сутність цього методу полягає у тому, що у разі переходу від нескінченно малих величин до скінченних приростів пластичні деформації записуються у деякій проміжній точці таким чином

$$\varepsilon_{ks}^{p(m)} = \lambda^{(m)} \frac{\partial F \left( \overset{\circ}{\sigma}^{(m)} + \theta \hat{\sigma}^{(m)}, \overset{\circ}{T}^{(m)} + T^{(m)} \right)}{\partial \sigma_{ks}},$$

де  $F \left( \overset{\circ}{\sigma}^{(m)} + \hat{\sigma}^{(m)}, \overset{\circ}{T}^{(m)} + T^{(m)} \right) = 0$  — рівняння поверхні пластичного течіння.

Такий підхід дозволяє побудувати безумовно стійку числову схему для розв'язування поставленої задачі.

## 2. Методика розв'язування

Побудуємо множину просторових скінченних елементів із комбінованими апроксимаціями [2]. Припустимо, що зайнята товстостінним тілом область  $V$  має форму деякого околу базової поверхні  $\Omega$ , яку віднесено до криволінійної ортонормованої системи координат  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . При цьому товщина тіла вираховується вздовж координати  $\alpha_3$  за напрямом нормалі до базової поверхні  $\Omega$ . Бокова поверхня області  $V$  є лінійчатою поверхнею, що складається з відрізків, напрямки яких визначаються величинами  $\beta_1 = \text{ctg } \varphi_1$ ,  $\beta_2 = \text{ctg } \varphi_2$ , де  $\varphi_1, \varphi_2$  — кути нахилу відрізків бокової поверхні у напрямках  $\alpha_1, \alpha_2$ , які є координатними лініями на базовій поверхні  $\Omega$ . Зауважимо, що значення величин  $\beta_1, \beta_2$  на бокових поверхнях об'єму  $V$  визначаються однозначно з форми зрізу товстостінного тіла. Всередині тіла ці значення потрібно довизначити таким чином, щоб отримані при цьому просторові елементи не обмежувалися поверхнями, які перетинаються під дуже гострими кутами. Розіб'ємо область  $\Omega$  на криволінійні чотирикутники  $\Omega = \bigcup_{e=1, N} \Omega_e$ , де  $N$  — кількість

криволінійних чотирикутників, на які розбита базова поверхня  $\Omega$ . Кожен чотирикутник  $\Omega_e$  визначено за допомогою восьми вузлових точок у вершинах і на його сторонах.

Поділимо простір  $V$  на шестигранники  $V_e$  за товщиною тіла. Кожен шестигранник асоціюється із розбиттям базової поверхні  $\Omega$  на криволінійні чотирикутники  $V = \bigcup_{e=1,N} V_e$ . Розіб'ємо кожен із таких шестигранників на  $L$  частин

за товщиною тіла. Отримаємо множину скінченних елементів  $V = \bigcup_{\substack{e=1,N \\ l=1,L}} V_{el}$  (рис. 1).

Отримаємо просторові скінченні елементи, на краях яких вибрано 16 вузлових точок. На кожному скінченному елементі виберемо ізопараметричні поліноміальні апроксимації шуканих функцій. Зауважимо, що на відміну від геометрії базової поверхні, яка задається аналітичним шляхом, геометрія лицевих поверхонь тіла зі змінною товщиною моделюється деякими поверхнями другого порядку. Проте цю апроксимацію побудовано у криволінійній системі координат. Тому вона не спричинює істотних похибок. Запропонована методика побудови скінченно-елементної сітки, по-перше, дозволяє врахувати косі зрізи тіла, які не враховуються у разі застосування гіпотез теорії оболонок, по-друге, за такої побудови сітки всі вузлові значення шуканих функцій асоціюються з вузлом на базовій поверхні, що дозволяє просто вирішувати проблему ідентифікації просторових скінченних елементів.

### 3. Числові результати

Розглянемо термопружне та термопружнопластичне деформування просторової циліндричної панелі із внутрішнім і зовнішнім радіусами  $\alpha_{3b} = 0,28$  м і  $\alpha_{3e} = 0,32$  м, значеннями осьової координати  $\alpha_1 \in [\alpha_{1b}; \alpha_{1e}]$  ( $\alpha_{1b} = 1$  м,  $\alpha_{1e} = 1,04$  м) і значеннями колової координати  $\alpha_2 \in [\alpha_{2b}; \alpha_{2e}]$  ( $\alpha_{2b} = 1,48$  м,  $\alpha_{2e} = 1,52$  м) під дією рухомого внутрішнього теплового навантаження (рис. 2).

Механічні та теплофізичні характеристики такі: модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, межа пластичного течіння  $\sigma^* = 160$  МПа,  $\rho = 7820$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_v = 565,47$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 30,9542$  Дж/(м·К·с),  $\alpha = 3496,988$  Дж/(м<sup>2</sup>·К·с). Точність  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Використовується модель ідеальної пружнопластичності. Теплова дія рухається від лінії CD до лінії BA за час 600 с.

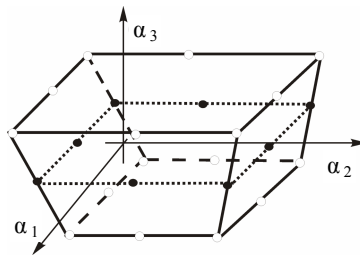


Рис. 1. Просторовий ізопараметричний скінченний елемент

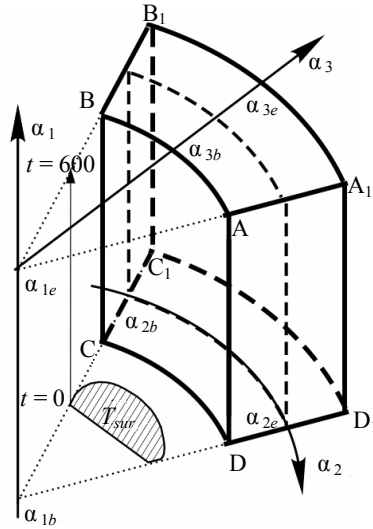


Рис. 2. Циліндрична панель

Теплові граничні умови на поверхнях панелі: на поверхні ABCD (якщо  $\alpha_1 = \alpha_{1b}$ ) здійснюється теплообмін за Ньютоном 
$$\left[ \sum_{i,j=1}^3 \lambda_{ij}(T) \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} n_i + \alpha (T - T_{sur}) \right]_S = 0$$
, де

$T(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  — температура у тілі у момент часу  $\tau$ ;  $\lambda_{kj}(T)$  — коефіцієнти теплопровідності;  $\vec{n}$  — вектор нормалі до поверхні  $S$ ;  $\alpha$  — коефіцієнт теплообміну на поверхні  $S$ ;  $T_{sur}$  — температура оточуючого середовища на поверхні:

$$T_{sur} = \left[ -2500 \cdot 333 (\alpha_2 - 1,5)^2 + 333 \right] \left[ -2500 (\alpha_1 - \alpha_1^*)^2 + 1 \right],$$

де  $\alpha_1^* = 1 + \frac{\tau}{600} (1,04 - 1)$ .

На інших поверхнях (окрім поверхні ABCD) забезпечується теплоізоляція.

Механічні граничні умови: на лінії ABCD (якщо  $\alpha_3 = \alpha_{3b}$ ) задано  $u_1 = 0$ ,  $\sigma_{32} = 0$ ,  $u_3 = 0$  на відрізку AB та CD;  $\sigma_{31} = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  на відрізку BC та DA. На поверхні DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C (якщо  $\alpha_1 = \alpha_{1b}$ ) та на поверхні AA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B (якщо  $\alpha_1 = \alpha_{1e}$ ) без лінії ABCD задано  $u_1 = 0$ ,  $\sigma_{32} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$ . На поверхні B<sub>1</sub>BCC<sub>1</sub> (якщо  $\alpha_2 = \alpha_{2b}$ ) та на поверхні DD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>A (якщо  $\alpha_2 = \alpha_{2e}$ ) без лінії ABCD задано  $\sigma_{31} = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$ . На поверхні ABCD (без межі ABCD) та на поверхні A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> задано  $\sigma_{31} = 0$ ,  $\sigma_{32} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$  — вільні від поверхневих навантажень поверхні.

Навантаження будемо здійснювати рівномірно на часовому інтервалі  $\tau \in [0, 600]$  з кроком  $\Delta\tau = 40$  с. Для числового розв'язування задачі побудуємо 16 скінченних елементи першого порядку за коловою, осьовою координатами та за товщиною.

На рис. 3-5 зображено розподіл термопружних (крива 1) і термопружно-пластичних (крива 2) колових напружень  $\sigma_{22}$ , які є максимальними напруженнями для такого типу конструкцій. Обирався три значення осьової координати  $\alpha_1 = 1,00053$  (рис. 3),  $\alpha_1 = 1,02053$  (рис. 4) та  $\alpha_1 = 1,03803$  (рис. 5). Значення радіальної координати  $\alpha_3 = 0,28053$ . Графіки зображені у кінцевий момент часу  $\tau = 600$  с. Відомо, що у конструкціях, які переходять у пластичний стан, виникають перерозподіли полів напружень. Цим зумовлені відмінності у наведених значеннях напружень, отриманих у різних моделях деформування. Якщо  $\alpha_1 = 1,00053$  й  $\alpha_1 = 1,02053$ , то термопружнопластичні колові напруження перевищують термопружні, а якщо  $\alpha_1 = 1,03803$ , то навпаки.

На рис. 6 зображено розподіл за товщиною термопружних (крива 1) і термопружнопластичних (крива 2) колових напружень  $\sigma_{22}$  для  $\alpha_1 = 1,02053$  та  $\alpha_2 = 1,50053$  у момент часу  $\tau = 600$  с. Наведені результати свідчать про те, що використання нелінійної моделі термопластичності дозволяє отримувати значно

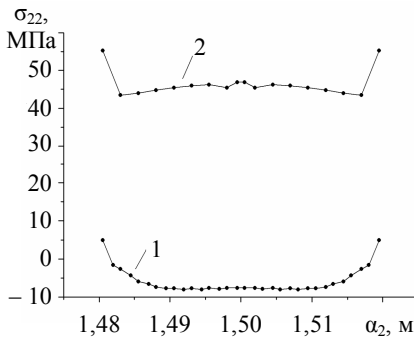


Рис. 3. Термопружні (1) і термопружно-пластичні (2) колові напруження  $\sigma_{22}$  для  $\alpha_1 = 1,00053$  й  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

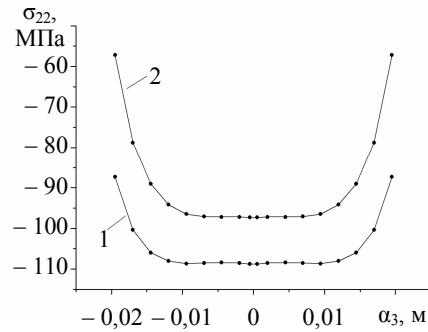


Рис. 4. Термопружні (1) і термопружно-пластичні (2) колові напруження  $\sigma_{22}$  для  $\alpha_1 = 1,02053$  й  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

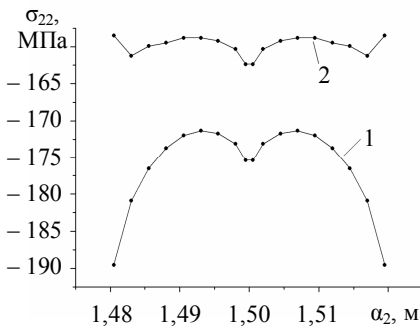


Рис. 5. Термопружні (1) і термопружно-пластичні (2) колові напруження  $\sigma_{22}$  для  $\alpha_1 = 1,03803$  й  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

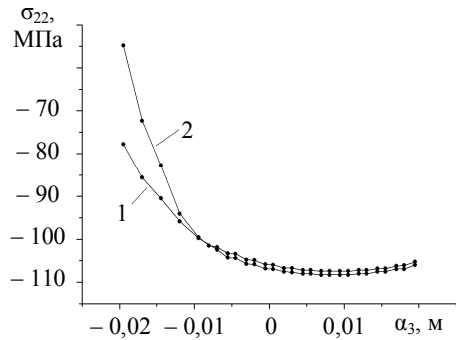


Рис. 6. Термопружні (1) і термопружно-пластичні (2) колові напруження  $\sigma_{22}$  для  $\alpha_1 = 1,02053$  й  $\alpha_2 = 1,50053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

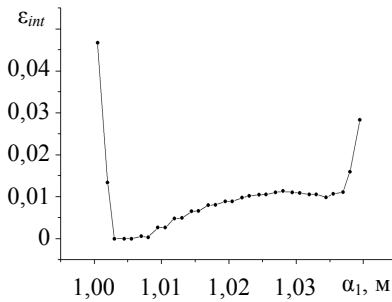


Рис. 7. Інтенсивність пластичних деформацій  $\varepsilon_{int}$  для значень колової координати  $\alpha_2 = 1,50053$  та радіальної координати  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

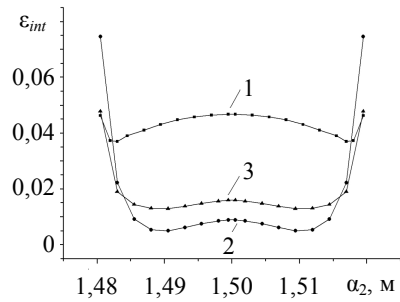


Рис. 8. Розподіл інтенсивності пластичних деформацій  $\varepsilon_{int}$  для  $\alpha_1 = 1,00053$  (1),  $\alpha_1 = 1,02053$  (2) та  $\alpha_1 = 1,03803$  (3) відповідно і  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с

більш адекватні результати порівняно з лінійною моделлю термопружності. Різниця двох моделей становить до 30 %.

На рис. 7 зображено розподіл інтенсивності пластичних деформацій  $\varepsilon_{int}$  вздовж осі циліндричної панелі для значень колової координати  $\alpha_2 = 1,50053$  та радіальної координати  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с. Найбільші інтенсивності пластичних деформацій і градієнт інтенсивності пластичних деформацій спостерігаються на частинах циліндра, близьких до закріплених країв панелі ( $\alpha_1 = 1$  та  $\alpha_1 = 1,04$ ).

На рис. 8 зображено розподіл інтенсивності пластичних деформацій  $\varepsilon_{int}$  для значень осової координати  $\alpha_1 = 1,00053$  (крива 1),  $\alpha_1 = 1,02053$  (крива 2),  $\alpha_1 = 1,03803$  (крива 3) та значень радіальної координати  $\alpha_3 = 0,28053$  у момент часу  $\tau = 600$  с. Крайні точки кривих 1, 3 відповідають кутовим точкам тіла. Найбільша інтенсивність пластичних деформацій спостерігається у серединному перерізі  $\alpha_1 = 1,02053$  в околі границі панелі, якщо  $\alpha_2 = 1,48$  та  $\alpha_2 = 1,52$ .

Найбільша інтенсивність пластичних деформацій у серединному за змінною  $\alpha_2$  перерізі ( $\alpha_2 = 1,5$ ) виникає в околі початкового положення температурного навантаження ( $\alpha_1 = 1$ ). Із рис. 3-5 для  $\alpha_2 = 1,5$  видно, що там же і найбільша відмінність у напруженнях  $\sigma_{22}$ . Це зумовлено тим, що вказана область найдовше перебуває в умовах рухомого температурного навантаження.

**Висновки.** Відмінності напружено-деформованого стану, отриманого з різних моделей деформування, наводять на висновок, що не доцільно обмежуватися лише термопружною моделлю під час проектування таких конструкцій. Використання термопластичної моделі дозволяє виготовляти більш економічні конструкції, які зможуть надійно працювати в умовах температурних навантажень.

## Література

- [1] Савченко В. Г., Шевченко Ю. Н. Пространственные задачи термовязкопластичности // Прикл. механика. — 2000. — Т. 36, № 11. — С. 3-38.
- [2] Неспляк Д. М., Муха І. С. Дослідження процесів нелінійної теплопровідності у товстостінних складових тілах // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2007. — Т. 50, № 2. — С. 176-182.
- [3] Simo J. C., Taylor R. K. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity // Comp. Meth. Appl. Mech. Ing. — 1985. — Vol. 48. — P. 101-118.
- [4] Кисиль Р. И., Муха И. С. Безусловно устойчивые численные схемы для решения задач нелинейного деформирования твердых тел // Прикл. механика. — 1996. — Т. 32, № 6. — С. 66-73.
- [5] Муха І. С., Неспляк Д. М. Числове дослідження процесів термопластичного деформування осесиметричних тіл з урахуванням розвантаження // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 117-126.

## Numerical analysis of spatial problem on studying the thermoelastoplastic deformation of thick-walled cylindrical panel under thermal loading

Igor Mukha, Dmytro Nespliak

*We propose a new approach for constructing a set of spatial finite elements. Based on this approach an unconditionally stable numerical scheme for the solution of spatial problems on studying the thermoplastic deformation is present. The results of the solution of one spatial problem are investigated. New qualitative conclusions are obtained.*

## Численное исследование пространственной задачи о термоупругопластическом деформировании толстостенной цилиндрической панели под действием тепловой нагрузки

Игорь Муха, Дмитрий Неспляк

*Предложен новый способ построения множества пространственных конечных элементов. На основании такого подхода разработана безусловно устойчивая числовая схема для решения пространственных задач термопластичного деформирования тел. Проанализированы результаты решения одной пространственной задачи и получены новые качественные выводы.*

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 04.12.13