

Моделювання процесу стабілізації та керованості безпілотного квадрокоптера у польоті

Богдан Благітко¹, Юрій Мочульський¹, Ігор Заячук², Любомира Кіт³

¹ к. т. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. генерала Тарнавського, 107, Львів, 79017, e-mail: blagitko@electronics.lnu.edu.ua, mochulsky@ukr.net

² к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: igorzaj@litech.lviv.ua

³ Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005

Побудовано та досліджено математичну модель безпілотного квадрокоптера у польоті з урахуванням динамічних властивостей електродвигунів. Модель подано системою диференціальних рівнянь 16-го порядку у формі Коші. Висота польоту безпілотного квадрокоптера, величини кутів тангажу, крену, ролання та зміни їх у часі задаються у процесі моделювання. Розглянуто спосіб пропорційно-диференціальний (ПД) керування для стабілізації безпілотного квадрокоптера у польоті й оптимального виведення його на заданий режим. За допомогою ПД-регулятора можна задавати прирости сили тяги чотирьох електродвигунів-гвинтів, знак приростів і моменти часу, у які повинні відбуватися всі ці зміни. Процес стабілізації та керованості безпілотного квадрокоптера у польоті продемонстровано на прикладі автоматичного виконання фігури простого пілотажу — горизонтальної вісімки — як із правим, так і з лівим поворотами.

Ключові слова: математичне моделювання, безпілотний квадрокоптер, стабілізація польоту, пропорційно-диференціальне керування.

Вступ. Класичний літальний апарат (ЛА), планер, конструктивно володіє такою властивістю як стійкість. Стійкість — властивість ЛА відновлювати без дії пілота кінематичні параметри незбуреного руху та повертатися до вихідного режиму польоту після закінчення дії збурення. Така властивість суттєво полегшує управління класичним ЛА.

Безпілотний квадрокоптер, конструктивно, цією властивістю не володіє. У польоті він статично нестійкий, тому за найменшого зовнішнього збурення починається некерований процес його зниження, перевертання, тобто безпілотний квадрокоптер падає на поверхню Землі.

Динамічну модель руху безпілотного квадрокоптера в повітрі описано у роботах [1, 2]. У статтях [3, 4] вказано, що, навіть у простих ситуаціях вертикальних злету або приземлення забезпечити стабільність польоту квадрокоптера у разі ручного управління важко або неможливо. Методи автоматичного управління польотом безпілотного квадрокоптера, включаючи використання ПД регуляторів, детально описані у роботах [5-7]. Значну увагу в згаданих працях приділяється особливостям моделювання руху безпілотного квадрокоптера, однак питання стабілізації його польоту висвітлені недостатньо.

Основним завданням цієї статті є створення математичної моделі для управління процесом стабілізації безпілотного квадрокоптера, що дозволить забезпечити його стійкість у польоті.

1. Математична модель безпілотного квадрокоптера

З точки зору теорії автоматичного управління (ТАУ) для ефективного управління системою необхідно:

- знати, в якому стані ми хочемо утримувати систему;
- вміти визначити стан системи;
- мати можливість вводити управляючу дію на систему.

Для визначення стану системи використовують гіроскопи, акселерометри, магнітометри та ін. Ці сенсори забезпечують обернений зв'язок у системі управління.

Вводити управляючу дію на систему можна шляхом зміни швидкості обертання роторів електричних двигунів із повітряними гвинтами. Наприклад, для того, щоб розвернути безпілотний квадрокоптер навколо однієї з горизонтальних осей, необхідно збільшити оберти одного з електродвигунів і зменшити оберти іншого. Змінюючи на однакову величину оберти відразу всіх електродвигунів, можна змінювати загальну підймальну силу й управляти висотою ЛА.

Для стабілізації польоту необхідно утримувати систему в режимі зависання у повітрі. Забезпечити такий режим можна шляхом управління за кутовими швидкостями обертання навколо всіх трьох осей. На рис. 1 показані три кути: тангажу (pitch), крену (roll) та рискання (yaw), за значеннями яких вираховуються кутові швидкості обертання ЛА навколо всіх трьох осей. На тому ж рисунку показані додатні напрями кутових швидкостей обертання ЛА.

Тангаж — кутовий рух ЛА навколо головної поперечної осі інерції. Кут тангажа θ — кут між поздовжньою віссю ЛА та горизонтальною площиною.

Крен — кутовий рух ЛА навколо головної поздовжньої осі інерції. Кут крену γ — кут між поперечною віссю ЛА та горизонтальною площиною.

Рискання — кутові рухи ЛА навколо вертикальної осі. Кут рискання ϕ — кут повороту корпусу ЛА в горизонтальній площині, відлічуваний від напрямку на північ.

Введемо три системи координат. Перша — нерухома система координат, прив'язана до місця старту на Землі. Вісь OY направлено на північ, вісь OX — на схід, а вісь OZ — вертикально догори. У другій системі координат (рис. 1) початок відліку співпадає з центром мас квадрокоптера, а напрям осей OX_1 , OY_1 , OZ_1 співпадає з напрямом відповідних осей першої системи, причому координата $z_1 = z$. У третій системі координат вісь OY_2 направлено від центра мас безпілотного квадрокоптера до його носа (точки A_1), вісь OX_2 — від центру мас до правого двигуна, а вісь OZ_2 — перпендикулярно до осей OX_2 , OY_2 догори, причому координати $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Чотири двигуни безпілотного квадрокоптера розміщені на кінцях балок на однакових відстанях L від центра мас і обертаються в напрямках, вказаних на рис. 1. До кожного з двигунів прикріплені пропелери, які створюють силу тяги. Двигун D_1 створює силу тяги $F_1 = k\omega_1^2$, яка пропорційна до квадрата швидкості

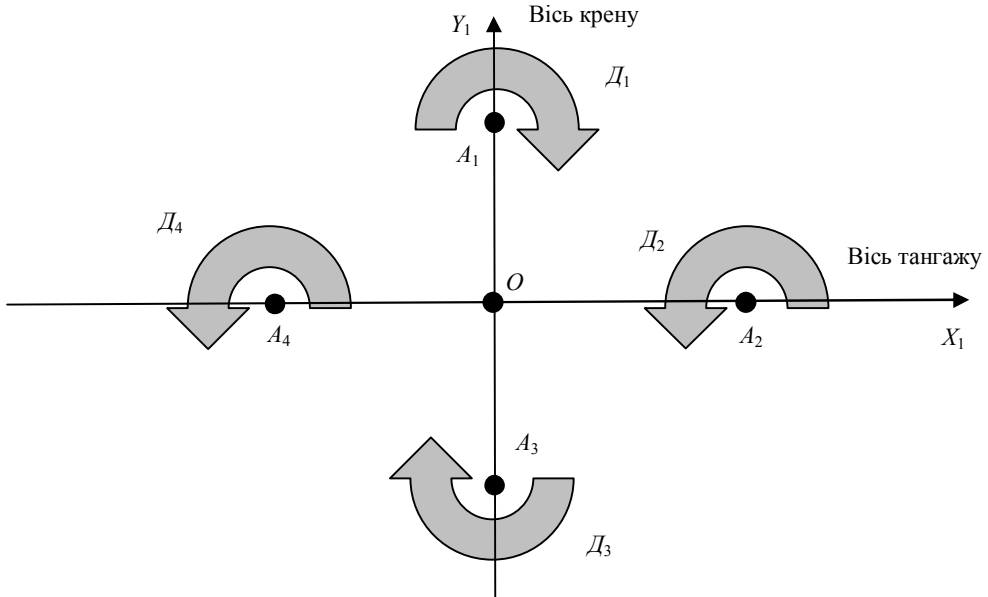


Рис. 1. Схематичний вигляд квадрокоптера зверху, напрями обертання гвинтів і осі тангажу (pitch), крену (roll) та ристання (yaw) обертання ЛА навколо всіх трьох осей

обертання ротора двигуна ω_1 і напрямлена вздовж осі OZ . Для обертання ротора, що знаходиться в точці A_1 необхідно прикласти момент сили $M_1 = b\omega_1^2 + J_p\dot{\omega}_1$, де b — коефіцієнт аеродинамічного опору, J_p — момент інерції ротора. Вплив другого доданка на момент сили незначний і, знехтувавши ним, отримуємо $M_1 = b\omega_1^2 = \frac{b}{k}F_1 = k_1F_1$, тобто, момент сили M_1 пропорційний до сили тяги та направлений протилежно осі OZ_1 .

За третім законом Ньютона до корпусу безпілотної квадрокоптера в точці A_1 прикладається також момент сили M_1 , вздовж осі OZ_1 . Момент сили $M_{1\phi}$ вздовж осі ристання, дорівнюватиме M_1 . Окрім цього, сила F_1 створює в напрямку осі тангажу момент сили $M_{1\theta} = F_1L$. Таким чином силу тяги F_1 у точці A_1 задає двигун D_1 . Вона направлена в додатному напрямку осі ристання та момент сили вздовж цієї осі $M_{1\phi} = k_1F_1 = b\omega_1^2$ направлений у такому ж напрямку. Момент сили в напрямку осі тангажу $M_{1\theta} = F_1L = kL\omega_1^2$ направлений вздовж осі крену.

Аналогічно двигун D_2 за швидкості обертання ротора двигуна ω_2 створює в точці A_2 силу тяги $F_2 = k\omega_2^2$, направлену в напрямку осі ристання, момент сили $M_{2\phi} = -k_1F_2 = -b\omega_2^2$ направлений у протилежному напрямку та момент сили відносно осі крену $M_{2\gamma} = -F_2L = -kL\omega_2^2$ направлений у протилежному напрямку до осі тангажу.

Двигун D_3 за швидкості обертання ротора двигуна ω_3 створює в точці A_3 силу тяги $F_3 = k\omega_3^2$, направлену в напрямку осі рискання, момент сили $M_{3\phi} = k_1 F_3 = b\omega_3^2$, направлений вздовж осі рискання, та момент сили відносно осі тангажу $M_{3\theta} = -F_3 L = -kL\omega_3^2$, направлений у протилежному напрямку до осі крену.

Двигун D_4 за швидкості обертання ротора двигуна ω_4 створює в точці A_4 силу тяги $F_4 = k\omega_4^2$, направлену в напрямку осі рискання, момент сили $M_{4\phi} = -k_1 F_4 = -b\omega_4^2$, направлений у протилежному напрямку, та момент сили відносно осі крену $M_{4\gamma} = F_4 L = kL\omega_4^2$, направлений вздовж осі тангажу.

Напрямок дії сил тяги в різних точках однаковий, тому силу тяги, прикладену до центра мас безпілотного квадрокоптера, можна записати у вигляді

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2). \quad (1)$$

Сумарний момент сил у точці на осі тангажу дорівнює

$$M_\theta = M_1 + M_3 = L(F_1 - F_3) = kL(\omega_1^2 - \omega_3^2), \quad (2)$$

на осі крену:

$$M_\gamma = M_2 + M_4 = L(F_4 - F_2) = kL(\omega_4^2 - \omega_2^2), \quad (3)$$

на осі рискання:

$$M_\phi = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = k_1(F_1 - F_2 + F_3 - F_4) = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2). \quad (4)$$

Якщо швидкості обертання всіх двигунів однакові ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_0$), то сили тяги будуть рівними ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4$), а моменти сил M_θ , M_γ та M_ϕ дорівнюватимуть нулю, тобто квадрокоптер не буде обертатися.

Для скорочення запису надалі крапка над змінною означатиме першу похідну за часом, дві крапки — другу похідну.

Рівняння обертового руху за законами динаміки можна записати так:

$$J\ddot{\omega} + \dot{\omega} \times (J\dot{\omega}) + J_\Gamma \dot{\omega} \times [0 \ 0 \ 1]^T \omega_\Gamma = \vec{M}. \quad (5)$$

Тут другий доданок враховує доцентрові сили, а третій — гіроскопічні сили, причому знак « \times » означає векторний добуток.

У формулі (5) використані такі позначення: $\mathbf{J} = \text{diag}(J_\gamma, J_\theta, J_\phi)$ — діагональна матриця моментів інерції; $\vec{\omega} = [\omega_\gamma \ \omega_\theta \ \omega_\phi]^T$, $\dot{\vec{\omega}} = [\dot{\omega}_\gamma \ \dot{\omega}_\theta \ \dot{\omega}_\phi]^T$ — вектор кутових швидкостей і, відповідно, кутових прискорень безпілотного квадрокоптера; $\vec{M} = [M_\gamma \ M_\theta \ M_\phi]^T$ — вектор моментів сил, який визначається таким чином

$$\vec{M} = [kL(\omega_4^2 - \omega_2^2) \ kL(\omega_1^2 - \omega_3^2) \ b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)]^T;$$

$\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$ — сумарний вектор кутових швидкостей двигунів.

Для моделювання процесу просторового переміщення безпілотного квадрокоптера необхідно вираз (1), записаний у системі координат $OX_2Y_2Z_2$ для сили тяги F , яка направлена вздовж осі OZ_2 , подати у системі координат $OXYZ$. Для цього використаємо матрицю повороту \mathbf{R} системи координат і отримаємо вираз для сили тяги у векторному вигляді

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F (\cos(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \sin(\phi) \sin(\theta)) \\ F (-\sin(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \sin(\theta)) \\ F \cos(\theta) \cos(\gamma) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cos(\gamma) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\gamma) + \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \sin(\phi) \sin(\theta) \\ -\sin(\phi) \cos(\gamma) & -\sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\gamma) + \cos(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \sin(\theta) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \sin(\theta) & \cos(\theta) \cos(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Якщо діє сила тяжіння mg , то рівняння просторового переміщення у системі координат $OXYZ$ буде таке

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F}{m} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \sin(\phi) \sin(\theta) \\ -\sin(\phi) \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cos(\gamma) \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

У третьому доданку записаного виразу враховано опір повітря.

Якщо рівняння (5), подати у вигляді

$$\ddot{\vec{\omega}} = J^{-1} \left(-\vec{\omega} \times (J\vec{\omega}) - J_T \vec{\omega} \times [0 \ 0 \ 1]^T \omega_T + \vec{M} \right), \quad (8)$$

то за допомогою виразів (7), (8) можна визначити переміщення безпілотного квадрокоптера у просторі та його обертання навколо осей тангажу, крену та ристання.

Швидкості обертання роторів двигунів ω залежать від прикладеної до обмотки напруги U . Для опису такої залежності скористаємося еквівалентною електричною схемою двигуна (рис. 2), яка складається з омичного опору обмотки R , її індуктивності L і джерела електрорушійної сили (е. р. с.) E , яка наводиться в обмотці двигуна під час обертання його ротора.

Запишемо рівняння електричного кола двигуна

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + k_D \omega. \quad (9)$$

За законом динаміки обертового руху

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_T - M_H, \quad (10)$$

де $M_D = k_D i$ — обертовий момент двигуна, M_T — момент сили сухого тертя, $M_H = k_H \omega^2$ — момент навантаження, k_D — постійний коефіцієнти двигуна, k_H — коефіцієнт навантаження, J — момент інерції ротора, i — величина струму, що протікає в обмотці двигуна.

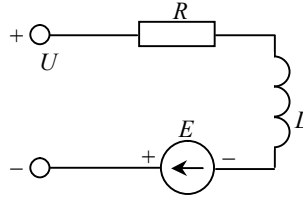


Рис. 2. Еквівалентна електрична схема двигуна

Зауважимо, що е. р. с. E пропорційна до швидкості обертання ротора з тим самим коефіцієнтом пропорційності, що і для обертового моменту. Застосувавши перетворення Лапласа до рівнянь (9) і (10), отримаємо систему рівнянь

$$U(p) = Ri(p) + Lpi(p) + k_D \omega(p), \quad Jp\omega(p) = k_D i(p) - M_T - k_H \omega^2(p). \quad (11)$$

Нехтуючи струмом обмотки двигуна у системі (11) і застосувавши обернене перетворення Лапласа, одержимо нелінійне рівняння другого порядку

$$L \frac{d^2 \omega}{dt^2} + R \frac{d\omega}{dt} + \frac{k_H L}{J} \frac{d\omega^2}{dt} + \frac{k_D^2}{J} \omega + \frac{Rk_H}{J} \omega^2 + \frac{RM_T}{J} = \frac{k_D}{J} U. \quad (12)$$

Якщо індуктивність обмотки двигуна незначна, то рівняння (12) можна записати у вигляді

$$\frac{d\omega}{dt} + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_0 = bU. \quad (13)$$

Тут $a_1 = \frac{k_D^2}{JR}, \frac{k_H}{J}, a_0 = \frac{M_T}{J}, b = \frac{k_D}{JR}.$

З рівняння (12) можна отримати вираз для швидкості обертання ротора двигуна в усталеному режимі у разі прикладання постійної напруги

$$\omega = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0 + 4a_2 bU}}{2a_2}, \quad (14)$$

а також значення напруги, яку необхідно прикласти для забезпечення заданої швидкості обертання ротора двигуна в усталеному режимі

$$U = (a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_0) / b. \quad (15)$$

Слід зауважити, що момент сили сухого тертя дорівнює M_T лише під час обертання ротора. Тому формули (14) і (15) справедливі лише для $\omega > 0$ і $U \geq a_0/b$.

Враховавши рівняння (7), (8) і (13), рух безпілотної квадрокоптера на основі рівнянь (7), (8) і (13) можна описати системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{V}_X \\ \dot{V}_Y \\ \dot{V}_Z \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\omega}_\gamma \\ \dot{\omega}_\theta \\ \dot{\omega}_\phi \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ F(\cos(\phi)\sin(\gamma)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta))/m - AxV_X/m \\ F(-\sin(\phi)\sin(\gamma)\cos(\theta) - \cos(\phi)\sin(\theta))/m - AyV_Y/m \\ -g + F\cos(\theta)\cos(\gamma)/m - AzV_Z/m \\ \omega_\gamma \\ \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ [(J_y - J_z)\omega_\theta\omega_\phi - J_\Gamma\omega_\theta\omega_\Gamma + M_\gamma]/J_x \\ [(J_z - J_x)\omega_\gamma\omega_\phi + J_\Gamma\omega_\gamma\omega_\Gamma + M_\theta]/J_y \\ [(J_x - J_y)\omega_\gamma\omega_\theta + M_\phi]/J_z \\ -a_0 - a_1\omega_1 - a_2\omega_1^2 + bmU_1 \\ -a_0 - a_1\omega_2 - a_2\omega_2^2 + bmU_2 \\ -a_0 - a_1\omega_3 - a_2\omega_3^2 + bmU_3 \\ -a_0 - a_1\omega_4 - a_2\omega_4^2 + bmU_4 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де значення $F, M_\gamma, M_\theta, M_\phi$ визначаються з умов (1)-(4), а U_1, U_2, U_3 та U_4 — напруги, які подаються на відповідні двигуни.

2. Пропорційно-диференціальний регулятор

Для стабілізації та керування польотом безпілотного квадрокоптера необхідно використовувати регулятор. Функціональну модель ПД регулятора, можна подати системою рівнянь

$$e(t) = x_d(t) - x(t), \quad u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t). \quad (17)$$

Тут $e(t)$ — різниця між заданим значенням параметра x_d та бiжучим x ; u — регулююча сила; K_p, K_d — коефіцієнти пропорційного та диференціального регулятора.

Положення безпілотного квадрокоптера задається шістьма величинами: просторовими координатами X, Y, Z і кутами θ, γ, ϕ . Але змінювати їх ми можемо лише за допомогою чотирьох величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 . Тому виберемо для регулятора чотири змінні: Z, θ, γ та ϕ .

Рівняння (7) вказує на те, що у системі координат X, Y, Z вздовж осі OZ діє сила $F_Z = F \cos(\gamma) \cos(\phi) - mg$. Для ПД регулятора цю силу можна записати у вигляді $F_{pez} = K_{Zd} (\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp} (Z_d - Z)$, де Z_d — задана висота; Z — бiжуча висота; K_{zd} та K_{zp} — коефіцієнти диференціального та пропорційного регулятора висоти.

Нехай сили F_Z та F_{pez} рівні між собою, тоді

$$F = \frac{mg + K_{zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp}(Z_d - Z)}{\cos(\gamma)\cos(\theta)}. \quad (20)$$

За аналогією для моментів сил обертання отримаємо

$$\begin{aligned} M_\theta &= K_{\theta p}(\theta_d - \theta) + K_{\theta d}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}), & M_\gamma &= K_{\gamma p}(\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d}(\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma}), \\ M_\phi &= K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}). \end{aligned} \quad (21)$$

Тут $\theta_d, \gamma_d, \phi_d$ — задані кути тангажу, крену та рискання відповідно, а θ, γ, ϕ — біжучі кути.

На основі рівнянь (1)-(4) кутові швидкості можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b}, & \omega_2^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b}, \\ \omega_3^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b}, & \omega_4^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рівняння (20)-(22) задають закон зміни швидкостей обертання роторів двигунів залежно від висоти Z і кутів тангажу, крену та рискання

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{mg + K_{zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp}(Z_d - Z)}{4k \cos(\gamma)\cos(\theta)} - \frac{K_{\theta p}(\theta_d - \theta) + K_{\theta d}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})}{2kL} - \\ &- \frac{K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}, \\ \omega_2^2 &= \frac{mg + K_{zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp}(Z_d - Z)}{4k \cos(\gamma)\cos(\theta)} - \frac{K_{\gamma p}(\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d}(\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma})}{2kL} + \\ &+ \frac{K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}, \\ \omega_3^2 &= \frac{mg + K_{zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp}(Z_d - Z)}{4k \cos(\gamma)\cos(\theta)} + \frac{K_{\theta p}(\theta_d - \theta) + K_{\theta d}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})}{2kL} - \\ &- \frac{K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}, \\ \omega_4^2 &= \frac{mg + K_{zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z}) + K_{zp}(Z_d - Z)}{4k \cos(\gamma)\cos(\theta)} + \frac{K_{\gamma p}(\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d}(\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma})}{2kL} + \\ &+ \frac{K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi})}{4b}. \end{aligned} \quad (23)$$

За значеннями квадратів кутових швидкостей двигунів, які визначаються співвідношеннями (22), використовуючи рівняння (15), можна обчислити напруги, які необхідно прикласти до кожного з двигунів.

3. Результати математичного моделювання

Для ілюстрації математичної моделі безпілотного квадрокоптера обрано фігуру простого пілотажу — горизонтальну вісімку. Під час виконання цієї фігури безпілотний квадрокоптер повинен у горизонтальній площині пролетіти по колу, а після цього — друге коло пролетіти в протилежному напрямку. Для руху по колу на заданій висоті до безпілотного квадрокоптера потрібно прикласти вертикально направлену догори силу, рівну mg , та горизонтальну доцентрову силу, величину якої визначатиме радіус кола. Доцентрову силу можна створити шляхом нахилу безпілотного квадрокоптера, задаючи відмінний від нуля кут тангажу або крену або обидва кути одночасно. Тоді силу тяги пропелерів можна подати двома складниками — горизонтальним і вертикальним. Під час руху по колу вектор доцентрової сили рівномірно змінює свій напрям. Задати напрям доцентрової сили можна шляхом зміни в часі кута рискання для вибраного кута тангажу або крену. Після того, як безпілотний квадрокоптер описав коло і повернувся в початкову точку, необхідно змінити напрям кута рискання на протилежний, що дасть можливість безпілотному квадрокоптеру описати наступний складник вісімки.

Числовий розрахунок моделі безпілотного квадрокоптера, в якій відсутній процес регулювання, проводився в середовищі Matlab [8] з такими параметрами електродвигунів: $k_d = 0,0216 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{с}^2 \cdot \text{А})$, $J = 2,83 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $M_T = 0,00537 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $R = 2,72 \text{ Ом}$, $k = 3,4526 \cdot 10^{-7} \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 / \text{рад}^2$.

Внаслідок розрахунку за формулою (13), отримуємо:

$$a_0 = 189 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}; \quad a_1 = 6,06 \text{ с}^{-1}; \quad a_2 = 0,0122 \text{ рад}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; \quad b = 280 \text{ рад} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{В}^{-1}.$$

Параметри моделі безпілотного квадрокоптера подано у таблиці. Аналіз отриманих результатів вказує на те, що для систем, які описуються рівнянням типу $d^2x/dt^2 = F$, використання пропорційного регулятора призведе до виникнення незгасаючих гармонічних коливань в околі заданого положення. Амплітуда таких коливань дорівнює початковому зміщенню від заданого положення.

Якщо задати збурення за допомогою введення коефіцієнта пропорційного регулятора, наприклад, $K_{pr} = 2$, то виникають незгасаючі коливання кута крену

Таблиця

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$	$k = 2,98 \cdot 10^{-6}$	$J_{xx} = J_{yy} = 4,856 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
$m = 0,468 \text{ кг}$	$b = 1,14 \cdot 10^{-7}$	$J_{zz} = 9,801 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
$l = 0,225 \text{ м}$	$J_m = 3,357 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$A_x = A_y = A_z = 0,25 \text{ кг/с}$

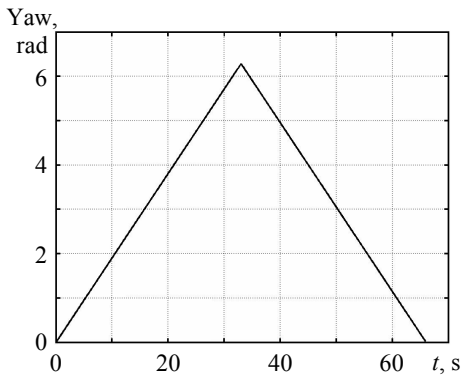


Рис. 3. Зміни кута ристання

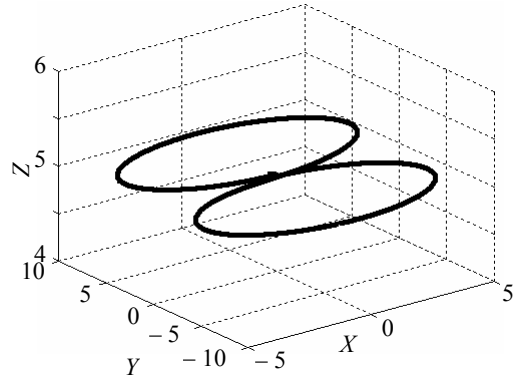


Рис. 4. Траєкторія польоту квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки

в околі нуля з амплітудою 0,1 радіана та періодом 4,5 с. Збільшення коефіцієнта до 8 зменшило період коливань до 2,25 с.

Результати тестування моделі з ПД регулятором і параметрами, які використовувалися у випадку пропорційного регулятора залежали від співвідношення коефіцієнтів пропорційного $K_{\gamma p}$ та диференціального $K_{\gamma d}$. Окрім того кут крену змінювався до нуля, а характер зміни міг бути коливним або аперіодичним. Так для $K_{\gamma p} = 40$ і $K_{\gamma d} = 10$ кут крену виходив на нульове значення за 1,2 с із перерегулюванням 0,002 радіана. Для $K_{\gamma p} = 32$ та $K_{\gamma d} = 11$ кут крену без коливань виходив на нуль за 1 с. Час перехідного процесу можна зменшити, але це вимагатиме більш потужного двигуна. Також було проведено тестування моделі з ПД регулятором висоти. Для дослідження обрано такі умови: $K_{Zd} = 4$; $K_{Zp} = 12$; $K_{\gamma d} = K_{\phi d} = K_{\theta d} = 10$; $K_{\gamma p} = K_{\phi p} = K_{\theta p} = 35$.

Рух безпілотного квадрокоптера за горизонтальною вісімкою здійснювався на заданій висоті $Z_d = 5$ м, кут крену постійно дорівнював нулю, а кут тангажу 0,05 радіана. Зміна кута ристання відбувалася за законом $\phi_d = 0,19t$ до 33 с, а після цього $\phi_d = 2\pi - 0,19(t - 33)$ (рис. 3). За таких даних безпілотний квадрокоптер виконує політ у вигляді фігури простого пілотажу — горизонтальної вісімки. Якщо задати кут тангажу 0,1 радіана, то радіус вісімки збільшиться вдвічі. На рис. 4 зображено графік польоту квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки.

Висновок. Запропоновано математичну модель і проведено числовий експеримент перевірки стабільності та керованості квадрокоптера. На прикладі автоматичного польоту за маршрутом горизонтальної вісімки показано, що ця модель дозволяє ефективно визначати параметри стійкого польоту безпілотного квадрокоптера.

Література

- [1] Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment / G. M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, C. J. Tomlin // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 2007.

- [2] Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, C. J. Tomlin // IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277-3282, May 2009.
- [3] Благітко Б. Я., Мочульський Ю. С. Способи ручного керування вертикальним злетом і приземленням квадрокоптера // Електроніка та інформаційні технології. — 2012. — Вип. 2. — С. 77-87.
- [4] Моделювання процесу керування вертикальним злетом і приземленням безпілотного квадрокоптера / Б. Благітко, Ю. Мочульський, Л. Кім, І. Заячук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 23-31.
- [5] Tayebi A., McGilvray S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot // 43rd IEEE Conference on Decision and Control. — 2004. — Vol. 2. — P. 1216-1221.
- [6] Dikmen I. C., Arisoy A., Temelta H. Attitude control of a quadrotor // 4th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. — 2009. — P. 722-727.
- [7] Castillo P., Lozano R., Dzul A. Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors // IEEE Control Systems Magazine. — 2005. — P. 45-55.
- [8] Мочульський Ю. *Matlab* у фізичних дослідженнях: [навч.-метод. посіб.]. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. — 121 с.

Modelling the quadrokopter stabilization process and its control during a flight

Bogdan Blahitko, Yurii Mochulsky, Igor Zayachuk, Lyubomyra Kit

The mathematical model of unmanned quadcopter in flight taking into account the dynamic properties of electric engines are constructed and investigated. Mathematical model is presented in system of differential equations in Cauchy form of the 16th order. Input information of the value of quadcopter flight altitude, of pitch angle, roll angle, yaw angle and their changes in time are introduced in the course of the modeling. The proportional-differential (PD) control technique is used in order to stabilize a quadcopter in flight and to ensure the optimal transition of a quadcopter to the required mode. PD controller changes the variations of the thrust of the four traction engines, screws, sign variations and times at which all of these changes should be applied. Stabilization and control quadcopter is tested in flight by the way of example of automate simple aerobatics figure (a horizontal figure eight) as a right-hand and left-hand turns.

Моделирование процесса стабилизации и управления беспилотного квадрокоптера в полете

Богдан Благітко, Юрій Мочульський, Ігор Заячук, Любомира Кит

Построена и исследована математическая модель беспилотного квадрокоптера в полете с учётом динамических свойств электродвигателей. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений в форме Коши 16-го порядка. Входной информацией служит значение высоты полёта квадрокоптера, значения углов тангажа, крена, рыскания и их изменение во времени. Рассмотрено способ пропорционально-дифференциального (ПД) управления для стабилизации квадрокоптера в полете и оптимального вывода квадрокоптера на заданный режим. ПД-регулятор изменяет величину приращения тяговой силы четырех электродвигателей-винтов, знак приращения и моменты времени, когда происходят эти изменения. Стабилизация и управление квадрокоптера в полете проверена на примере автоматического выполнения фигуры простого пилотажа — горизонтальной восьмерки — как с правым, так и с левым поворотами.

Представлено професором Т. Нагірним

Отримано 24.09.13