

## Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах

Андрій Бомба<sup>1</sup>, Олена Гладка<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, e-mail: abomba@ukr.net

<sup>2</sup> Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, e-mail: viklom@ukr.net

*На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень і сумарних зображень для розривних коефіцієнтів із декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до моделювання фільтраційних процесів в ущільнених пластах із зонами підвищеної проникності. Обчислювальна технологія розв'язання відповідних нелінійних крайових задач для двозв'язних криволінійних обмежених екіпотенціальними лініями областей автоматично вирішує проблему вибору вузлів і побудови динамічної сітки, що є основою для досліджень інших кількісних характеристик руху. Ефективність запропонованої методики продемонстровано на прикладі розрахунку характерних параметрів фільтрації в сланцевому пласті еліптичної форми з утвореними в ньому тріщинами гідравлічного розриву.*

**Ключові слова:** квазіконформні («кусково-конформні») відображення, метод сумарних зображень, декомпозиція області, альтернуючий метод Шварца, динамічна сітка.

**Вступ.** У роботах [1-2] запропоновано конструктивний підхід до моделювання ідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії й екіпотенціальними лініями, на основі синтезу числових методів конформних відображень і сумарних зображень. Поєднання цих методів дає можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних вузлів, які, своєю чергою, «підправляються» (на наступному ітераційному кроці) за допомогою, так званих, умов ортогональності [3] (є наслідками умов Коші-Рімана), і, отже, пришвидшити досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій. Зокрема, у праці [2] викладено підхід до розв'язання нелінійних задач для багатозв'язних криволінійних шаруватих областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція, залежна від шуканого квазіпотенціалу. Розроблена там відповідна обчислювальна технологія базується на поєднанні числових методів квазіконформних («кусково-конформних») відображень [3], формул сумарних зображень для шарувато-неоднорідних середовищ із вертикальними лініями розділу [4] й альтернуючого методу Шварца [5-6].

У пропонованій роботі цю методику поширено нами на математичне моделювання процесів витіснення з ущільнених скелясто-осадових порід (що є

малопроникні), в яких для промислової (економічно вигідної) експлуатації існуючі мікротріщини (що містять вуглеводні) об'єднані в єдину структуру між собою та з свердловинами за допомогою штучно утворених тріщин гідравлічного розриву пласта. Запропонована математична модель, як і в попередніх випадках, базується на лінійному фільтраційному законі та рівнянні нерозривності і розв'язується шляхом переходу від прямих задач на знаходження комплексного квазіпотенціалу поля до обернених — на знаходження характеристичної функції течії [1]. У випадку кількох тріщин гідророзриву робиться декомпозиція області на «підобласті з накладками» [6] за альтернуючим методом Шварца, що дає можливість ефективно «склеювати розв'язок» на лініях розриву параметра задачі (коефіцієнта проникності), а також — розпаралелювати обчислювальний процес. Вузли динамічної сітки розраховуються за формулами сумарних зображень, що є розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь із розривними коефіцієнтами [5]. При цьому використовуються суттєво інші, ніж у роботі [2], формули сумарних зображень для багатошарових областей із горизонтальними лініями розділу [4].

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо модельну задачу про знаходження кусково-гармонічної функції  $\varphi = \varphi(x, y)$  (квазіпотенціалу) у двозв'язному криволінійному пласті  $G_z = G_z^0 \cup \left( \bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)} \right)$  ( $z = x + iy$ ), що експлуатується однією свердловиною й обмежений двома гладкими замкненими екіпотенціальними лініями:  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  — контуром свердловини й  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  — контуром живлення, де  $\bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)}$  — тріщини гідророзриву пласта (зони підвищеної проникності),  $G_z^0 = G_z \setminus \bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)}$  — решта пласта без тріщин.

Процес витіснення з пласта описуватимемо рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa(x, y) / \mu_g \times \text{grad } \varphi$  та рівнянням нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$  за умов на контурах пласта:  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$  й умов спряження на границях тріщин  $\partial L_z^{(l)} (l = \overline{1, s})$ :  $[\varphi]|_{\partial L_z^{(l)}} = 0$ ,  $\left[ \frac{\kappa}{\mu_g} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\partial L_z^{(l)}} = 0$ , де  $\mathbf{n}$  — зовнішня нормаль до відповідної кривої,  $[f]$  — стрибок функції  $f$  у разі переходу через відповідну лінію (за нормаллю). Тут  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  — швидкість фільтрації,  $\mu_g$  — коефіцієнт динамічної в'язкості,  $\kappa(x, y)$  — коефіцієнт проникності пласта, який визначатимемо таким чином:

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y) \in G_z^0, \\ \kappa_2, & (x, y) \in \bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)}, \end{cases}$$

де  $\kappa_1$  — коефіцієнт проникності у недеформованому пласті,  $\kappa_2$  — коефіцієнт проникності у тріщинах.

Припустимо для початку, що тріщини гідророзриву розміщені строго вздовж ліній течії. У випадках, коли тріщини дещо відхиляються від ліній течії,

що, зазвичай, відповідає реальному процесу гідророзриву ущільненого пласта, для оцінки основних фільтраційних характеристик можна скористатися методом мажорантних областей Г. М. Положого [7], взявши за основу розрахунки, зроблені за викладеною далі методикою.

Ввівши, аналогічно, як у монографії [3], функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , та зробивши умовний розріз  $\Gamma$  області  $G_z$  уздовж вибраної лінії течії, приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  утвореної при цьому однозв'язної області  $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$  на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = G_\omega^0 \cup \left( \bigcup_{l=1}^s L_0^{(l)} \right)$ ,  $G_\omega^0 = G_\omega \setminus \bigcup_{l=1}^s L_0^{(l)}$ ,  $L_0^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi_*^{(l)} \leq \psi \leq \psi^{*(l)}, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(l)}\}$ ,  $l = \overline{1, s}$ ,  $(\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)})$  — лінії течії, що обмежують тріщини,  $\varphi^{(l)}$  — задані (теоретично розраховані) значення квазіпотенціалу (тиску), що відповідають кінцям тріщин із невідомим параметром (повною витратою)  $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy :$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa(x, y)}{\mu_g} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\kappa(x, y)}{\mu_g} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^\Gamma; \\ \left[ \varphi \right] \Big|_{\partial L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[ \frac{\kappa(x, y)}{\mu_g} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] \Big|_{\partial L_z^{(l)}} = 0, \\ \kappa(x, y) = \kappa_1, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad \kappa(x, y) = \kappa_2, \quad (x, y) \in L_z^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \\ \varphi \Big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{L_0} = 0, \quad \psi \Big|_{L^0} = \oint_{L_*} -\frac{\kappa}{\mu_g} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\kappa}{\mu_g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $L_0, L^0$  — відповідно нижній і верхній береги розрізу  $\Gamma$ .

Відповідна обернена до неї задача зводиться до квазіконформного («кусково-конформного») відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$

з невідомою витратою  $Q$  (якобіан переходу  $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ ) [2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\mu_g} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\mu_g} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ \left[ (x, y) \right] \Big|_{\psi = \psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \\ \left[ \frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\mu_g J} \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} \right] \Big|_{\psi = \psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\
 x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
 \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} &= \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \\
 \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} &= \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,
 \end{aligned} \tag{2}$$

і є еквівалентна до задачі [2, 3]:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &Lx \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa/\mu_g} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa}{\mu_g} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad Ly = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\
 &Q = \int_0^Q \frac{\kappa}{\mu_g} J \left( \frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi} \right) d\psi, \quad [(x, y)]|_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \\
 &\left[ \frac{\kappa}{\mu_g} J \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right]_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \\
 &f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\
 &x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
 &\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad \psi \in [0, Q] \setminus \bigcup_{l=1}^s [\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}], \\ \kappa_2, & \varphi_* \leq \varphi = \varphi^{(l)}, \quad \psi_*^{(l)} \leq \psi \leq \psi^{*(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \end{cases} \\
 &\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

## 2. Різницевий аналог

Визначимо рівномірну сіткову область  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1},$   
 $\varphi^{(l)} = \varphi_* + \Delta_\varphi m_l, \quad 0 < m_l \leq m+1, \quad \psi_j = \Delta_\psi j, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad \psi_*^{(l)} = \Delta_\psi (n_l - 1), \quad \psi^{*(l)} = \Delta_\psi (n_l + 1),$   
 $0 \leq n_l \leq n; \quad m, m_l, n, n_l \in \mathbf{N}; \quad l = \overline{1, s}, \quad \Delta_\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1), \quad \Delta_\psi = Q / (n+1), \quad \gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi \}$ .

У випадку однієї тріщини (див. рис. 1а) диференціальним рівнянням у внутрішніх вузлах сіткової області ставимо у відповідність такі скінченно-різницеві системи рівнянь [5, 8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa_1}{2} L_\gamma x_{i,0} + \gamma^2 \kappa_1 x_{i,1} = -\gamma^2 \kappa_1 x_{i,0}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \kappa_1 L_\gamma x_{i,j} + \gamma^2 \kappa_1 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad \begin{cases} i = \overline{m_1 + 1, m}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ i = \overline{1, m_1}, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 - 2, n_1 + 2, \dots, n-1, \end{cases} \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} L_\gamma x_{i, n_1 \pm 1} + \gamma^2 (\kappa_1 x_{i, n_1 \mp 2} + \kappa_2 x_{i, n_1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_2 L_\gamma x_{i, n_1} + \gamma^2 \kappa_2 (x_{i, n_1 - 1} + x_{i, n_1 + 1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_1 L_\gamma x_{i, n} + \gamma^2 \kappa_1 x_{i, n-1} = -\gamma^2 \kappa_1 x_{i, n+1}, \quad i = \overline{1, m}; \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa_1}{2} L_\gamma y_{i,0} + \gamma^2 \kappa_1 y_{i,1} = -\gamma^2 \kappa_1 y_{i,0}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \kappa_1 L_\gamma y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_1 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad \begin{cases} i = \overline{m_1 + 1, m}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ i = \overline{1, m_1}, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 - 2, n_1 + 2, \dots, n-1, \end{cases} \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} L_\gamma y_{i, n_1 \pm 1} + \gamma^2 (\kappa_1 y_{i, n_1 \mp 2} + \kappa_2 y_{i, n_1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_2 L_\gamma y_{i, n_1} + \gamma^2 \kappa_2 (y_{i, n_1 - 1} + y_{i, n_1 + 1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_1 L_\gamma y_{i, n} + \gamma^2 \kappa_1 y_{i, n-1} = -\gamma^2 \kappa_1 y_{i, n+1}, \quad i = \overline{1, m}; \end{array} \right. \quad (5)$$

$(x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), L_\gamma u_j(\varphi_i) = u_j(\varphi_{i+1}) - 2(1 + \gamma^2)u_j(\varphi_i) + u_j(\varphi_{i-1}))$ , розв'язки яких подамо формулами сумарних зображень [4, 5]:

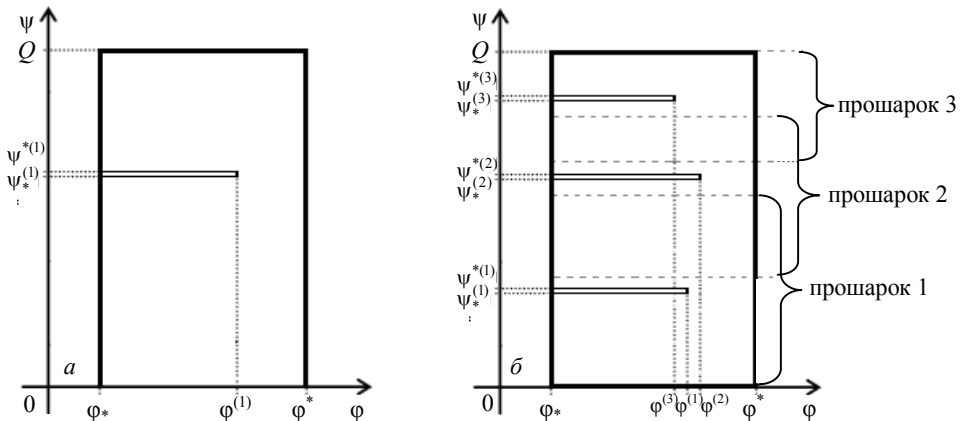


Рис. 1. Область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$ : а)  $s = 1$ , б)  $s = 3$

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k}^{(\xi)} \left[ \mu_k^{(\xi)i} a_k + \nu_k^{(\xi)i} b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{(\xi)|i-t|}}{\mu_k^{(\xi)} - \nu_k^{(\xi)}} (p_{1,k}^{(\xi)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(\xi)} x_{t,n+1}) \right], \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k}^{(\xi)} \left[ \mu_k^{(\xi)i} c_k + \nu_k^{(\xi)i} d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{(\xi)|i-t|}}{\mu_k^{(\xi)} - \nu_k^{(\xi)}} (p_{1,k}^{(\xi)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(\xi)} y_{t,n+1}) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $j=\overline{1,n}$ ,  $\xi=1$ , якщо  $i=\overline{m_1+1,m+1}$  і  $\xi=2$ , якщо  $i=\overline{0,m_1}$ ; елементи матриць  $P$ -трансформацій  $P^{(1)} = [p_{j,k}^{(1)}]_{j,k=1}^n$  і  $P^{(2)} = [p_{j,k}^{(2)}]_{j,k=1}^n$  знаходяться зі співвідношень:

$$p_{j,k,j,k}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad p_{j,k}^{(2)} = C_k \begin{cases} \sin j\theta_k, & j=\overline{1,n_1}, \\ \alpha_k \sin(n-j)\theta_k, & j=\overline{n_1+1,n}, \end{cases}$$

$\theta_k$  — корені рівняння  $\sin n\theta + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2 + \kappa_1} \sin(n-2n_1)\theta = 0$  в інтервалі  $(0, \pi)$ ;

$\alpha_k = \frac{\sin n_1 \theta_k}{\sin(n-n_1)\theta_k}$ , якщо  $\sin(n-n_1)\theta_k \neq 0$ , інакше —  $\alpha_k = -\frac{\kappa_1 \cos n_1 \theta_k}{\kappa_2 \cos(n-n_1)\theta_k}$ ,

$$\begin{aligned} C_k &= \left\{ \frac{\kappa_1}{2} \left( n_1 - \frac{\cos(n_1-1)\theta_k \sin n_1 \theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \sin^2 n_1 \theta_k + \right. \\ &\left. + \frac{\kappa_2}{2} \alpha_k^2 \left[ n - n_1 - \frac{\cos(n-n_1-1)\theta_k \sin(n-n_1)\theta_k}{\sin \theta_k} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Елементи діагональних матриць  $\mu_k^{(\xi)i} = [\mu_k^{(\xi)i}]_{k=1}^n$ ,  $\nu_k^{(\xi)i} = [\nu_k^{(\xi)i}]_{k=1}^n$  визначаються за формулами:  $\mu_k^{(\xi)} = \nu_k^{(\xi)-1} = \eta_k^{(\xi)} + \sqrt{\eta_k^{(\xi)2} - 1}$ ,  $\eta_k^{(1)} = 1 + \gamma^2 \{1 - \cos[k\pi/(n+1)]\}$ ,  $\eta_k^{(2)} = 1 + \gamma^2 (1 - \cos \theta_k)$ , а довільні сталі  $a_k, b_k, c_k, d_k$  знаходяться з крайових умов на границях  $L^*$ ,  $L^*$  за допомогою систем рівнянь:

$$\begin{cases} a_k + b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(2)*} x_{0,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k}^{(2)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(2)} x_{t,n+1}), \\ \mu_k^{m+1} a_k + \nu_k^{m+1} b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(1)*} x_{m+1,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k}^{(1)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(1)} x_{t,n+1}), \quad k=\overline{1,n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_k + d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(2)*} y_{0,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(2)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(2)} y_{t,n+1}), \\ \mu_k^{m+1} c_k + v_k^{m+1} d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(1)*} y_{m+1,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(1)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(1)} y_{t,n+1}), \quad k=\overline{1,n}, \end{cases}$$

де  $p_{j,k}^{(\xi)*}(j, k = \overline{1,n}, \xi = 1, 2)$  — елементи матриць  $P^{(\xi)*}$ , обернених до  $P^{(\xi)}$ .

Різницеві аналоги крайових умов, умов періодичності на розрізі  $\Gamma$  й умов ортогональності мають вигляд [2, 3]:

$$\begin{aligned} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \\ j = \overline{0, n+1}, \quad x_{i,0} = x_{i, n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i, n+1}, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad (7) \\ (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j}) \times \\ \times (y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1}) \times \\ \times (y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8) \end{aligned}$$

Квазіконформний інваріант  $\gamma$  та невідому витрату  $Q$  обчислюємо за формулами [1-3]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad Q = \Delta_\phi \frac{n+1}{\gamma}, \quad (9)$$

де

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

### 3. Алгоритм і числові розрахунки

Алгоритм розв'язання задачі (3) у випадку  $s = 1$ , аналогічно до [1-3], в загальному вигляді описується таким чином. Задаємо кількість  $m \times n$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega^\gamma$ , точність наближення розв'язку  $\varepsilon$  і бажаний рівень квазіконформності відображення  $\delta^*$ , нульове наближення невідомої величини  $\gamma$  (або шуканої витрати  $Q$ ),

початкові наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) так, щоб виконувались умови (7) і обчислюємо за формулами (6) початкові наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки). Знаходимо значення  $\gamma$  і  $Q$  за формулами (9). Після цього уточнюємо координати граничних вузлів (7), (8), обчислюємо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (6), знаходимо  $\gamma$  та  $Q$  за співвідношеннями (9).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів: якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену ітерацію більша за  $\varepsilon$ , то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь квазіконформності  $\delta$  отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область. Якщо  $\delta \leq \delta_*$ , то вважаємо, що задачу розв'язано з необхідною точністю, інакше, збільшуємо кількість вузлів розбиття області чи змінюємо співвідношення між  $m$  і  $n$  та повторюємо кроки алгоритму.

У випадку кількох тріщин гідророзриву пласта (див. рис. 1б) розв'язки скінченно-різницевого аналога диференціальних рівнянь із задачі (3) у внутрішніх вузлах сіткової області знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца та методу сумарних зображень. Для цього область  $G_\omega^\gamma$  «розіб'ємо» на прошарки (сіткові прямокутники з «накладками»), кожен з яких містить одну тріщину:  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^s \tilde{G}_\omega^{\gamma(l)}$ , де  $\tilde{G}_\omega^{\gamma(l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma, i = 0, m+1, 0 \leq n_{l-1} + 2 \leq j \leq n_{l+1} - 2 \leq n + 1 \right\}$ . При цьому отримуємо  $s$  проєкцій задачі (3) (стосовно підобластей  $\tilde{G}_\omega^{\gamma(l)}$ ) [2, 5], подібних до співвідношень (4), (5), для знаходження послідовностей сіткових функцій  $\left( \left\{ \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\zeta)} \right\}_{\zeta=0}^\infty, \left\{ \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\zeta)} \right\}_{\zeta=0}^\infty \right) : x_{i,j}^{(l)} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\zeta)}, y_{i,j}^{(l)} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\zeta)}$ , де  $\zeta$  — номер кроку ітераційного процесу, що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [6].

Наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(l)(k)}, y_{i,j}^{(l)(k)})$  у прошарках ( $k = 0, 1, \dots$  — номер кроку загальної ітерації) отримуємо як результат ітераційного процесу по  $\zeta$  обчислення функцій  $(\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\zeta)(k)}, \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\zeta)(k)})$  за формулами, аналогічними (6). При цьому, значення граничних вузлів у прошарках  $\tilde{G}_\omega^{\gamma(l)}$  визначатимемо як значення внутрішніх вузлів уздовж відповідних ліній течії (горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей із «накладками» [2, 5]. Зазначимо також, що достатньо провести щонайбільше  $s$  ітерацій по  $\zeta$  для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур за подальшого уточнення інших параметрів задачі.



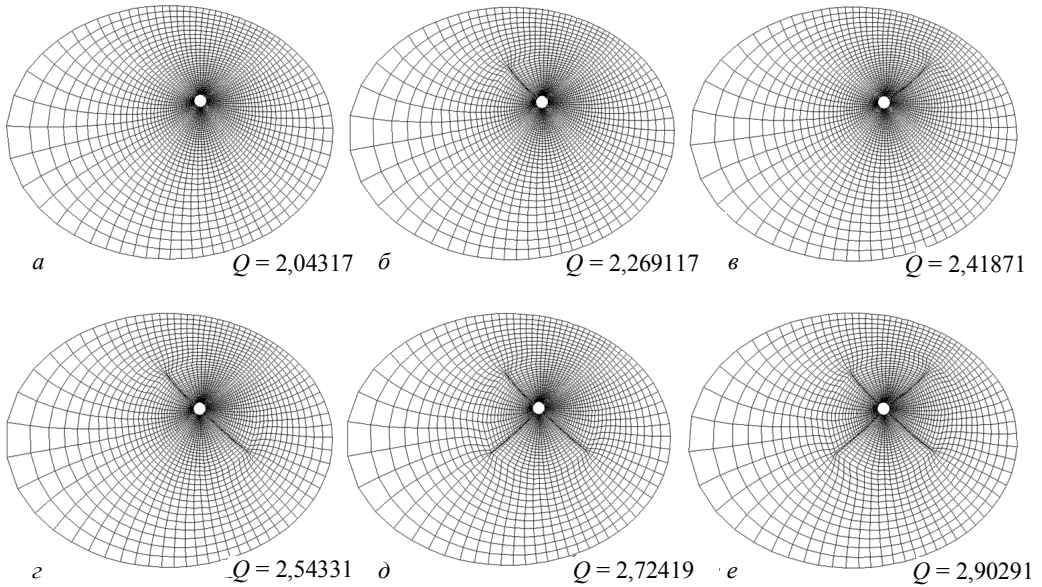


Рис. 2. Розрахована динамічна сітка для еліптичного пласта  $G_z$  у випадках: а)  $s = 0$ , б), в)  $s = 1$ , г)  $s = 2$ , д)  $s = 3$ , е)  $s = 4$

Числові розрахунки проведені для області  $G_z$ , що обмежена еліптичним контуром живлення  $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos t, y = 6 \sin t, 0 \leq t < 2\pi\}$  та свердловиною  $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos t + 1,5; y = 0,3 \sin t + 1,5; 0 \leq t < 2\pi\}$  за заданих значень потенціалів  $\varphi^* = 1$  та  $\varphi_* = 0$  на цих контурах і заданих значень коефіцієнтів проникності недеформованого пласта й у тріщинах  $\kappa_1 = 1$  і  $\kappa_2 = 2$  відповідно. На рис. 2 зображені розраховані динамічні сітки для області  $G_z$  без тріщин (рис. 2а) й у випадках однієї (рис. 2б, в), двох (рис. 2г), трьох (рис. 2д) та чотирьох (рис. 2е) тріщин гідророзриву пласта з відповідними значеннями  $Q$ . Бачимо, що наявність навіть однієї тріщини суттєво впливає на повну витрату (дебіт свердловини). При цьому важливим є їх розміщення (напрямок гідророзриву), а утворення додаткових тріщин не завжди є доцільним. Цей приклад також підтверджує, що розрахунки за формулами сумарних зображень суттєво зменшують трудомісткість обчислень (першою чергою, у разі ітераційного наближення координат внутрішніх вузлів), а тому дають «економію» комп'ютерних ресурсів і забезпечують можливість апроксимації розв'язків із більшою кількістю вузлів розбиття області.

**Висновки.** Таким чином, на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень і сумарних зображень із декомпозицією області методом Шварца для двозв'язних обмежених екіпотенціальними лініями криволінійних областей розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач, що

моделюють фільтраційні процеси в ущільнених осадових породах із зонами підвищеної проникності. Використання методів сумарних зображень дозволяє у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх внутрішніх та граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості шуканих квазігармонічних функцій. Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області дає змогу ефективно знаходити неперервні розв'язки задач із розривними коефіцієнтами, а також розпаралелювати обчислювальний процес. Перспективою є використання запропонованого алгоритму для комп'ютерного моделювання процесів видобутку вуглеводнів із складно структурованих ущільнених осадових порід за умов керування й оптимізації параметрів.

## Література

- [1] Бомба А. Я., Кузьменко А. П., Гладка О. М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей // Вісник Київ. нац. унів. ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. н. — 2012. — Вип. № 2. — С. 87-94.
- [2] Бомба А. Я., Гладка О. М. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах // Журнал обчислюв. та прикладної математики. — 2013. — № 1(111). — С. 20-31.
- [3] Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геодинаміки. — Київ: Наукова думка, 2007. — 308 с.
- [4] Ляшко И. И., Великоованенко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. — Киев: Наукова думка. — 1973. — 264 с.
- [5] Гладка О. М., Кузьменко А. П. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатоплощинній смузі // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: зб. наук. праць. — Київ: Ін-т матем. НАН України. — 1995. — Вип. 9. — С. 168-173.
- [6] Василевский Ю. В., Ольшанский М. А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. — Москва: МГУ, 2007. — 105 с.
- [7] Положий Г. Н. Метод движения граничных точек и мажорантных областей теории фильтрации // УМЖ. — Киев: Изд-во КГУ, 1953. — Т. 5, № 4. — С. 93-105.
- [8] Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1997. — 293 с.

## Mathematical modelling of nonlinear filtration processes in shale layers

Andriy Bomba, Olena Hladka

*The constructive approach to modelling of filtration processes in compacted layers with zones of high permeability was developed based on synthesis of numerical methods of quasiconformal mappings and summary representations for discontinuous coefficients with method of domain decomposition by Schwarz. The computing technology for solution of the corresponding nonlinear boundary value problems for doubly-connected curved bounded with equipotential domains, automatically solves the problem of choice of and building a dynamic grid, which is the basis*

**Андрій Бомба, Олена Гладка**

**Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах**

*for research of other quantitative characteristics of the movement. The effectiveness of the proposed method is demonstrated in calculation of the characteristic parameters of filtering in the elliptic layer of shale with cracks formed by hydraulic fracturing.*

## **Математическое моделирование нелинейных фильтрационных процессов в сланцевых пластах**

**Андрей Бомба, Елена Гладкая**

*На основе синтеза численных методов квазиконформных отображений и суммарных представлений для разрывных коэффициентов с декомпозицией области по методу Шварца разработан конструктивный подход к моделированию фильтрационных процессов в уплотненных пластах с зонами повышенной проницаемости. Вычислительная технология решения соответствующих нелинейных краевых задач для двусвязных криволинейных ограниченных эквипотенциальными линиями областей автоматически решает проблему выбора узлов и построения динамической сетки, являющейся основой для исследований других количественных характеристик движения. Эффективность предложенной методики продемонстрирована на примере расчета характерных параметров фильтрации в сланцевом пласте эллиптической формы, с образованными в нем трещинами гидравлического разрыва.*

**Представлено професором Р. Мусієм**

Отримано 05.06.13