УДК 539.3

Особливості поля напружень біля тунельного відшарованого включення в кусково-однорідному анізотропному просторі

Олександр Кривий

Д. ф.-м. н., професор, Одеська національна морська академія, вул. Дідріхсона, 8, Одеса, 65029,
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Розглянуті задачі про тунельне абсолютно жорстке відшароване включення, що виходить одним кінцем у площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, які знаходяться в умовах узагальненої плоскої деформації. Досліджені випадки зчеплення або гладкого контакту однієї грані включення із середовищем. На основі побудованого розривного розв'язку задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) із нерухомою особливістю. Виявлені умови існування й асимптотики розв'язків вказаних систем. Отримані залежності показників особливостей напружень у вершині включення від анізотропних властивостей півпросторів і розташування включень.

Ключові слова: анізотропний, кусково-однорідний простір, тунельне, відшароване, включення, розривний розвязок системи СІР, нерухома особливість, асимптотики розв'язків.

Вступ. Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувалися плоскими випадками [3-8, 15, 16]. У роботах [9-11] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, яке перебуває у двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [12]). У цій праці вказаний метод узагальнено на випадок внутрішнього відшарованого тунельного включення. Зокрема, побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору за наявності внутрішніх дефектів й інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми переміщень і напружень на вказаних дефектах у просторі узагальнених функцій повільного зростання. Внаслідок цього задачі про тунельні відшаровані включення, які виходять під довільним кутом до площини з'єднання двох різних анізотропних півпросторів і перебувають в умовах зчеплення або гладкого контакту з однією із граней, зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь із нерухомими особливостями. Обґрунтовано існування та виявлено асимптотики поведінки розв'язків отриманих систем СІР. Одержано залежності показників особливостей напружень у вершинах включення від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення.

1. Побудова розривного розв'язку для кусково-однорідного анізотропного середовища

Нехай простір, який складено з двох різних анізотропних півпросторів, з'єднаних у площині $x = 0$, перебуває у двовимірному стані без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [12]. У просторі містяться довільні кусково-неперервні циліндричні поверхні, напрямні яких паралельні осі OZ, внаслідок перетину останніх площиною XOY утворюються кусково-неперервний контур ℓ. На вказаних поверхнях розташовані наскрізні дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і невідшарованих включень). Виходячи з рівняння рівноваги й узагальненого закону Гука, стосовно компоненти тензора напружень і вектора переміщень:

$$\boldsymbol{\eta} = \left\{\eta_k(x,y)\right\}_{k=1}^{8} = \left\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\right\} \tag{1}$$

отримаємо таку систему диференціальних рівнянь

$$\mathbf{D}\left[x, \partial_1, \partial_2\right]\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}, \quad x \neq 0, \quad (x,y) \notin \ell. \tag{2}$$

Тут

$$\mathbf{D}\left[x, \partial_1, \partial_2\right] = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_* & \mathbf{O}_{3\times3} \\ -\mathbf{B}(x) & \mathbf{D}_*^{\mathrm{T}} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) = \left\{\beta_{kj}(x)\right\}_{j,k=1}^{5}, \quad \beta_{kj}(x) = \begin{cases} \beta_{kj}^{+}, & x > 0, \\ \beta_{kj}^{-}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_* = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{Vmatrix}, \quad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$\mathbf{f} = \left\{-X_0, -Y_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}$; $\beta_{kj}^{\pm}$ — коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього та нижнього півпросторів, X_0, Y_0 — проекції об'ємних сил на відповідні осі. Нормальні напруження σ_z при цьому визначимо за формулою $\sigma_z = -\beta_{66}^{-1}\sum_{j=1}^{5}\beta_{6j}v_j$. У площині $x = 0$ вважаємо виконаними умови неперервності:

$$\boldsymbol{\chi}^{-} = 0, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\chi}^{-} = \left\{\chi_k^{-}(y)\right\}^{6} = \left\{\langle\eta_1\rangle^{-}, \langle\eta_3\rangle^{-}, \langle\eta_4\rangle^{-}, \langle\eta_6\rangle^{-}, \langle\eta_7\rangle^{-}, \langle\eta_8\rangle^{-}\right\}$; $\langle\eta_k\rangle^{-}$ — стрибки функцій η_k у разі переходу через площину $x = 0$. Для подання умов на лінії ℓ, де можливі розриви всіх компонент вектора $\boldsymbol{\eta}$, введемо в кожній точці цієї лінії локальну систему координат (N, S, Z). Напрямок осі S збігається з напрямком дотичного вектора $\mathbf{s}$ до лінії ℓ у цій точці; напрямок осі N співпадає з напрямком нормального вектора $\mathbf{n}$, який спрямований лівобіч стосовно напрямку дотичного вектора; вісь OZ залишається незмінною. Кут між осями OX і ON позначимо $\phi = \phi(x, y),\ (x, y) \in \ell$. У новій системі координат компоненти тензора напружень і вектора переміщень позначимо так:

$$\boldsymbol{\eta}_\ell = \left\{ \tilde{\eta}_k(x, y) \right\}_{k=1}^{8} = \left\{ \sigma_N,\ \sigma_S,\ \tau_{NS},\ \tau_{NZ},\ \tau_{SZ},\ u_N,\ v_S,\ w_Z \right\}. \qquad (4)$$

Залежно від виду контактної взаємодії дефектів із простором на лінії ℓ будуть відомі шість величин: $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{\pm} = \left\{ \tilde{\chi}_k^{\pm} \right\}_{k=1}^{6}$, де $\tilde{\chi}_k^{\pm} = \left\langle \tilde{\chi}_k(x, y) \right\rangle_\ell^{\pm}$ — відповідно стрибки та суми функцій (4). Для визначеності будемо вважати відомими на лінії ℓ стрибки:

$$\left\langle \tilde{v}_k \right\rangle_\ell^- = \tilde{\chi}_k^-(x, y), \quad k = \overline{1,8}, \quad k \neq 2,5, \quad (x, y) \in \ell. \qquad (5)$$

Розв'язки крайової задачі (2), (3), (5), за виконання умов $X_0, Y_0 \in C_{0,\ell}^1\left(\mathbb{R}^2\right) \cap$ $\cap L_1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x, y) \in C_*(\ell) \cap L_1(\ell)$, $\chi_{k0}^{\pm}(y) \in C_*\left(\mathbb{R}\right) \cap L_1\left(\mathbb{R}\right)$ слід шукати у класі $C_{0,\ell}^1\left(\mathbb{R}^2\right) \cap L_1\left(\mathbb{R}^2\right)$, де $C_{0,\ell}^m$ — простір функцій, неперервних разом з усіма похідними до m-ого порядку в $\mathbb{R}^2$, за винятком прямої $x = 0$ і лінії ℓ, $L_1\left(\mathbb{R}^2\right)$ — простір інтегровних в $\mathbb{R}^2$ функцій, $C_*(\ell), L_1(\ell)$ — простори відповідно кусково-неперервних та інтегровних на ℓ функцій.

Продовжимо систему (2) на весь простір. Для цього перейдемо до простору узагальнених функцій повільного зростання $\mathfrak{I}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ та врахуємо зв'язок між узагальненими та звичайними похідними $\partial_k \eta_j = \tilde{\partial}_k \eta_j - \chi_j^-(x, y)(-1)^{k+1} \kappa_k \delta(\ell)$, де $\delta(\ell)$ — функція Дірака, зосереджена на контурі ℓ; χ_j^- — стрибки функцій η_j на контурі ℓ, а також формули зв'язку між компонентами векторів $\boldsymbol{\eta}$ і $\boldsymbol{\eta}_\ell$ [13]. Отже щодо вектора $\boldsymbol{\eta}$ у просторі $\mathfrak{I}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ отримаємо крайову задачу

$$\left(\mathbf{D}\left[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2 \right] \boldsymbol{\eta},\ q \right) = \left(\mathbf{f}_*, q \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q \in \mathfrak{I}\left(\mathbb{R}^2\right), \qquad (6)$$

$$\eta_k^+ = \eta_k^-, \qquad k = 1, 3, 4, 6, 7, 8. \qquad (7)$$

Тут

$$v_k^{\pm} \in \mathfrak{I}'_{\pm}\left(\mathbb{R}^2\right), \quad \mathbf{f}_* = \left\{ f_{j*} \right\}^8, \quad f_{1*} = \left(\tilde{\chi}_1^- \kappa_1 + \tilde{\chi}_2^- \kappa_2 \right) \delta(\ell) - X_0,$$

$$f_{2*} = \left(-\tilde{\chi}_1^- \kappa_2 + \tilde{\chi}_2^- \kappa_1 \right) \delta(\ell) - Y_0, \quad f_{3*} = \tilde{\chi}_3^- \delta(\ell), \quad f_{8*} = -\tilde{\chi}_6^- \kappa_2 \delta(\ell),$$

$$f_{4*} = \left(\tilde{\chi}_4^- \kappa_1 + \tilde{\chi}_5^- \kappa_2 \right) \kappa_1 \delta(\ell), \quad f_{5*} = \left(\tilde{\chi}_4^- \kappa_2 - \tilde{\chi}_5^- \kappa_1 \right) \kappa_2 \delta(\ell), \quad \kappa_1 = \cos\phi,$$

$$f_{6*}=\left(\tilde{\chi}_5^-\left(\kappa_1^2-\kappa_2^2\right)-2\kappa_1\kappa_2\tilde{\chi}_4^-\right)\delta(\ell),\quad f_{7*}=\tilde{\chi}_6^-\kappa_1\delta(\ell),\quad \kappa_2=\sin\phi,$$

$$\Im'_\pm\left(\mathbb{R}^2\right)=\left\{f^\pm\in\Im'\left(\mathbb{R}^2\right)\middle|\operatorname{supp}f^\pm=\mathbb{R}_\pm\times\mathbb{R}\right\}.$$

Розв’язки крайової задачі (6), (7) аналогічно, як у роботах [14, 9-11], будемо називати *розривним розв’язком для кусково-однорідного анізотропного середовища* у просторі $\Im'\left(\mathbb{R}^2\right)$. Останній отримаємо, використовуючи фундаментальний розривний розв’язок для кусково-однорідного анізотропного простору, тобто систему векторів $\mathbf{w}_j=\left\{w_{kj}(x,y,x_0,y_0)\right\}_{k=\overline{1,8}}$, $w_{kj}\in\Im'\left(\mathbb{R}^2\right)$, $j=\overline{1,8}$, яка задовольняє такій системі крайових задач:

$$\mathbf{D}\left[x,\tilde{\partial}_1,\tilde{\partial}_2\right]\mathbf{w}_j=\mathbf{f}_{0j},\quad j=\overline{1,8},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2;\tag{8}$$

$$w_{kj}^+=w_{kj}^-,\quad k=\overline{1,8},\quad k\neq 2,\quad k\neq 5,\tag{9}$$

де $w_{kj}^\pm\in\Im'_\pm\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\mathbf{f}_{0j}=\left\{f_{kj}^0\right\}^8=\left\{\delta_{kj}\right\}^8\delta\left(x-x_0,y-y_0\right),\left(x_0,y_0\right)\neq 0$, δ_{nj} — символ Кронекера.

Компоненти векторів $\mathbf{w}_j$ належать підпростору $\Im'_0\left(\mathbb{R}^2\right)$ [8]. Отже, застосувавши до співвідношення (8) двовимірне перетворення Фур’є та скориставшись результатами робіт [6, 8, 9], щодо $\mathrm{W}_{kj}^\pm\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\mathrm{F}_2\left[w_{kj}^\pm\right]\in\Omega'_{\pm,-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ отримаємо за змінною α_1 матричну крайову задачу Рімана у просторі $\Im'_0\left(\mathbb{R}^2\right)$:

$$\mathbf{M}_+\left(-i\alpha_1,-i\alpha_2\right)\mathbf{W}_j^+=\mathbf{M}_-\left(-i\alpha_1,-i\alpha_2\right)\mathbf{W}_j^++\mathbf{f}_{*j},\quad j=\overline{1,8}.\tag{10}$$

Тут $\mathbf{M}_\pm=\pm\mathbf{D}\left[\pm0,-i\alpha_1,-i\alpha_2\right]$, $\mathbf{W}_j^\pm=\left\{\mathrm{W}_{kj}^\pm\right\}^8$, $\mathbf{f}_{*j}=\left\{\delta_{kj}e_0^*\right\}^8$, $e_0^*=e^{i\alpha_1x_0+i\alpha_2y_0}$.

Враховуючи поліноміальний вигляд коефіцієнтів задачі (10), застосуємо до її розв’язування поданий у роботах [6, 8, 9] метод і остаточно отримаємо

$$W_{kj}=W_{kj}^++W_{kj}^-,\quad k=\overline{1,8},\quad j=\overline{1,8},\tag{11}$$

де

$$\left(W_{kj}^\pm=\left(-i\alpha_2\right)W_{kj}^\pm,k=6,7,8\right),\ W_{kj}^\pm\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{1}{\mathrm{P}_6^\pm\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}\sum_{p=1}^{8}i^{\theta_1}r_{kp}^\pm t_{pj}^\pm,$$

$$\mathrm{P}_6^\pm\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\mathrm{P}_4^\pm\mathrm{P}_2^\pm-\left(\mathrm{P}_3^\pm\right)^2,\quad \mathrm{P}_2^\pm=\beta_{44}^\pm\alpha_2^2-2\beta_{45}^\pm\alpha_1\alpha_2+\beta_{55}^\pm\alpha_1^2,$$

$$\mathrm{P}_3^\pm=\beta_{14}^\pm\alpha_2^3-\left(\beta_{15}^\pm+\beta_{34}^\pm\right)\alpha_1\alpha_2^2+\left(\beta_{24}^\pm+\beta_{35}^\pm\right)\alpha_1^2\alpha_2-\beta_{25}^\pm\alpha_1^3,$$

$$\mathrm{P}_4^\pm=\beta_{11}^\pm\alpha_2^4-2\beta_{13}^\pm\alpha_1\alpha_2^3+\left(\beta_{33}^\pm+2\beta_{12}^\pm\right)\alpha_1^2\alpha_2^2-2\beta_{23}^\pm\alpha_1^3\alpha_2+\beta_{22}^\pm\alpha_1^4,$$

$$r_{kp}^{\pm} = h_k^{\pm}\lambda_{p,l}^{\pm}, \quad k=\overline{1,5}, \quad p=\overline{1,8}, \quad l=\begin{cases}1, & k=1,2,3,\\ 2, & k=4,5,\end{cases} \quad \theta_1=\begin{cases}1, & p=\overline{1,3},\\ 0, & p=\overline{4,8},\end{cases}$$

$$\lambda_{1l}^{\pm} = \alpha_1^{-1}\left(g_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm} - \ell_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}\right), \quad \lambda_{jl}^{\pm} = \alpha_2^{-1}\left(g_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm} - \ell_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}\right), \quad j=1,3,$$

$$\lambda_{5l}^{\pm} = -\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}, \quad \lambda_{6l}^{\pm} = -\alpha_1\alpha_2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}, \quad \lambda_{7l}^{\pm} = \alpha_2\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}, \quad \lambda_{8l}^{\pm} = -\alpha_1\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}, \quad l=1,2,$$

$$r_{6j}^{\pm} = \alpha_1^{-1}\alpha_2\left(\lambda_{j1}^{\pm}\ell_1^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_1^{\pm}\right), \quad r_{7j}^{\pm} = \lambda_{j1}^{\pm}\ell_2^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_2^{\pm}, \quad r_{8j}^{\pm} = \lambda_{j1}^{\pm}\ell_5^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_5^{\pm},$$

$$h_1^{\pm} = \alpha_2^2, \quad h_2^{\pm} = \alpha_1^2, \quad h_3^{\pm} = -\alpha_1\alpha_2, \quad h_4^{\pm} = -\alpha_2, \quad h_5^{\pm} = \alpha_1, \quad \lambda_{4l}^{\pm} = \alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm},$$

$$\ell_k^{\pm} = \beta_{1k}^{\pm}\alpha_2^2 - \beta_{3k}^{\pm}\alpha_1\alpha_2 + \beta_{2k}^{\pm}\alpha_1^2, \quad g_k^{\pm} = \beta_{4k}^{\pm}\alpha_2 - \beta_{5k}^{\pm}\alpha_1, \quad k=\overline{1,5},$$

$$\left\{t_{kj}^{\pm}\right\}_{k=\overline{1,8}} = \theta(\pm x_0)\, e_0^{*}\left\{\delta_{kj}\right\}_{k=\overline{1,8}} \mp \frac{1}{2}\mathbf{f}_0^{*}, \quad j=\overline{1,8},$$

$$\mathbf{f}_0^{*} = \left\{\chi_{10}(\alpha_2), \chi_{30}(\alpha_2), \chi_{40}(\alpha_2), \chi_{60}(\alpha_2), 0, \chi_{70}(\alpha_2), \chi_{80}(\alpha_2), 0\right\}.$$

Для визначення невідомих функцій $\chi_{k0}(\alpha_2)$ скористаємося умовами (9). Після обернення (11) вирази компонент фундаментальних розривних розв’язків для кусково-однорідного анізотропного простору подамо так:

$$w_{kj}(x, y, x_0, y_0) = \theta(x)w_{kj}^{+} + \theta(-x)w_{kj}^{-}, \quad k=\overline{1,8}, \quad j=\overline{1,8}. \tag{12}$$

Тут

$$w_{kj}^{+} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{3}\left\{\theta(x_0)\overline{R}_{kjn}^{+}\mathrm{K}_{kj}\left[\overline{\xi}_n^{+} - \overline{\xi}_{n0}^{+}\right] + \sum_{m=1}^{3}\left[\theta(x_0)\beta_{kjnm}^{++}\mathrm{K}_{kj}\left[\overline{\xi}_n^{+} - \xi_{m0}^{+}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\theta(-x_0)\beta_{kjnm}^{+-}\mathrm{K}_{kj}\left[\overline{\xi}_n^{+} - \overline{\xi}_{m0}^{\pm}\right]\right]\right\},$$

$$w_{kj}^{-} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{3}\left\{\theta(-x_0)\overline{R}_{kjn}^{-}\mathrm{K}_{kj}\left[\overline{\xi}_n^{-} - \overline{\xi}_{n0}^{-}\right] + \sum_{m=1}^{3}\left[\theta(x_0)\beta_{kjnm}^{-+}\mathrm{K}_{kj}\left[\xi_n^{-} - \xi_{m0}^{+}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\theta(-x_0)\beta_{kjnm}^{--}\mathrm{K}_{kj}\left[\xi_n^{-} - \overline{\xi}_{m0}^{-}\right]\right]\right\},$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = f^{-1} \quad \left(k=\overline{1,5};\ j=\overline{1,3}\right)\cup\left(k=\overline{6,8};\ j=\overline{4,8}\right), \quad \xi_m^{\pm} = z_m^{\pm}x + y,$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = -f^{-2} \quad \left(k=\overline{1,5};\ j=\overline{4,8}\right), \quad \mathrm{K}_{kj}[f] = \ln f \quad \left(k=\overline{6,8};\ j=\overline{1,3}\right),$$

$$\alpha_{pjn}^{+} = \sum_{k=1}^{6}a_{kp}^{*}R_{kjn}^{0,+}, \quad \alpha_{pjn}^{-} = \sum_{k=1}^{6}a_{kp}^{*}\overline{R}_{kjn}^{0,-}, \quad \beta_{kjmn}^{+\pm} = \sum_{p=1}^{6}\alpha_{pjm}^{\pm}\overline{\mathrm{N}}_{kpn}^{+}, \quad \mathrm{R}_{kp}^{\pm} = \sum_{n=1}^{3}R_{kpn}^{\pm},$$

$$\beta_{kjnm}^{-\pm} = \sum_{p=1}^{6}\alpha_{pjn}^{\pm}\mathrm{N}_{kpm}^{-}, \quad \xi_{m0}^{\pm} = z_m^{\pm}x_0 + y_0, \quad \left\{R_{kjm}^{0,\pm}\right\}_{k=\overline{1,6}} = \left\{R_{kjm}^{\pm}\right\}_{k=1,3,4,6,7,8},$$

$$R_{kpn}^{\pm}=\frac{r_{kp}^{\pm}\left(z_n^{\pm},1\right)}{\beta_0^{\pm}q_n^{\pm}\left(z_n^{\pm}\right)\overline{q}_n^{\pm}\left(z_n^{\pm}\right)},\quad q_n^{\pm}\left(z_n^{\pm}\right)=\prod_{l=1,\,l\neq n}^{3}\left(z_n^{\pm}-z_l^{\pm}\right),\quad \overline{q}_n^{\pm}\left(z_n^{\pm}\right)=\prod_{l=1}^{3}\left(z_n^{\pm}-\overline{z}_l^{\pm}\right),$$

$$\mathrm{P}_6^{\pm}\left(z_n^{\pm},1\right)\equiv 0,\ \ \beta_0^{\pm}=\beta_{22}^{\pm}\beta_{55}^{\pm}-\left(\beta_{25}^{\pm}\right)^2,\quad \mathbf{N}^{\pm}=\left\{\sum_{n=1}^{3}\mathrm{N}_{k\,pn}^{\pm}\right\}^{6}=\left\{\sum_{n=1}^{3}R_{k\,pn}^{\pm}\right\}_{k=1,3,4,6,7,8}^{p=1,2,3,4,6,7}.$$

Знайдені вирази (12) дають змогу, скориставшись теоремою про згортку, отримати розривний розв’язок для кусково-однорідного анізотропного середовища:

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{8}w_{kj}*f_{j*}=\sum_{j=1}^{8}\iint_{\mathbb{R}^2}w_{kj}\left(x,y,x_0,y_0\right)f_{j*}\left(x_0,y_0\right)dx_0dy_0\ . \tag{13}$$

Подання (13) містить шість стрибків $\tilde{\chi}_k^{-},\ k=\overline{1,6}$, компонент тензора напружень і вектора переміщень, зосереджених на контурі ℓ. Частина з них, залежно від типу дефекту, є невідомими функціями. Для їх визначення, скориставшись формулами Сохотського, отримаємо інтегральні співвідношення, що пов’язують стрибки та суми $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{\pm}=\left\{\tilde{\chi}_k^{\pm}\right\}_{k=1}^{6}$ на контурі ℓ. Зокрема, якщо контур ℓ є об’єднання відрізків, розташованих уздовж прямої, яка проходить через початок координат під кутом ϕ до осі Ox: $\ell=\bigcup_{j=1}^{r}\left(a_j;b_j\right)$, тобто: $x=t\cos\phi,\ x_0=\tau\cos\phi,\ y=t\sin\phi$, $y_0=\tau\sin\phi$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x,y)=\tilde{\chi}_k^{\pm}(t)\ \left(k=\overline{1,6}\right),\ \ \tilde{\chi}_k^{\pm}(t)=\left(\tilde{\chi}_k^{\pm}(t)\right)'\ \left(k=\overline{4,6}\right)$, то зазначені співвідношення подамо так:

$$\tilde{\chi}_k^{+}(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_{\ell}\tilde{\chi}_j^{-}(\tau)\left[\frac{\Upsilon_{kj}(t)}{t-\tau}+\operatorname{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\frac{\mathrm{B}_{kjnm}}{te_{mn}-\tau}\right]d\tau,\quad t\in\ell,\quad k=\overline{1,6}\,, \tag{14}$$

де

$$\Upsilon_{kj}^{\pm}=4\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{3}\frac{H_{jkn}^{\pm}}{\left(\overline{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ \ B_{kjmn}^{\pm+}=\frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\overline{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ \ B_{kjmn}^{\pm-}=\frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\overline{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ \ \delta_*=\begin{cases}1,\ j=\overline{1,3},\\ 2,\ j=\overline{4,6},\end{cases}$$

$$B_{kjnm}^{\pm+}=\frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\overline{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\quad B_{kjnm}^{\pm-}=\frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\overline{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\quad \left\{e_{nm}^{++},e_{nm}^{+-},e_{nm}^{-+},e_{nm}^{--}\right\}=\left\{\frac{\overline{\beta}_n^{+}}{\beta_m^{+}},\frac{\overline{\beta}_n^{+}}{\overline{\beta}_m^{-}},\frac{\beta_n^{-}}{\beta_m^{+}},\frac{\beta_n^{-}}{\overline{\beta}_m^{-}}\right\},$$

$$\beta_n^{\pm}=z_n^{\pm}\cos\phi+\sin\phi,\quad \Upsilon_{kj}=\sum_{\pm}\theta(\pm t)\Upsilon_{kj}^{\pm},\quad \mathrm{B}_{kjnm}=\sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta\left((\pm)\tau\right)B_{kjnm}^{\pm(\pm)}\,,$$

$$e_{nm}=\sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta\left((\pm)\tau\right)e_{nm}^{\pm(\pm)}\,.$$

Формули (14) узагальнюють співвідношення для кусково-однорідної анізотропної площини [6] і дають можливість безпосередньо зводити задачі про внутрішні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі до систем СІР.

2. Формулювання та зведення до системи СІР задач про тунельні включення

Нехай внаслідок перерізу тунельного відшарованого включення площиною XOY утвориться відрізок $\ell=(0;a)$, який розташовано у верхньому півпросторі під кутом ϕ до осі OX. До включення прикладене довільне навантаження з головним вектором $\mathbf{P}=\left(P_1,P_2,0\right)$ і моментом M навколо осі OZ, яке забезпечує двовимірний стан середовища. Розміщення поверхонь включень після деформування описується функціями

$$\tilde{w}^{\pm}(t)=\varepsilon+\delta^{*}t+\tilde{w}_{*}^{\pm}(t),\qquad t\in\ell\,, \tag{15}$$

де функції $\tilde{w}_{*}^{\pm}(t)$ описують форму граней включення. Скориставшись умовами $\tilde{\chi}_j^{-}(t)=0,\, t\notin\ell,\; j=\overline{1,6}$, і співвідношеннями (14), сформульовану задачу зведемо до системи СІР r-ого порядку $(r\le 6)$ стосовно вектора $\mathbf{h}=\left\{h_j(t)\right\}^r$:

$$\mathbf{M}_0\mathbf{h}(t)+\frac{1}{\pi}\mathbf{M}_{\mathrm{S}}\int_0^a\frac{\mathbf{h}(\tau)}{t-\tau}d\tau+\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\mathbf{M}_{nm}\int_0^a\frac{\mathbf{h}(\tau)d\tau}{e_{nm}^{++}t-\tau}=\mathbf{q}(t),\quad t\in(0,a)\,. \tag{16}$$

Порядок системи r, а також вигляд вектор-функцій $\mathbf{q}(t)=\left\{q_k(t)\right\}^r$ і матриць $\mathbf{M}_0=\left\{m_{kj}^{0}\right\}^r, \mathbf{M}_{\mathrm{S}}=\left\{m_{kj}^{\mathrm{s}}\right\}^r, \mathbf{M}_{nm}=\left\{m_{kj}^{nm}\right\}^r$ залежать від типу контактної взаємодії дефектів із середовищем. Систему (16) слід теж доповнити умовами з таких шести співвідношень

$$\int_{\ell}\tilde{\chi}_k^{-}(\tau)d\tau=P_k\quad\left(P_3=P_4=P_5=P_6=0\right). \tag{17}$$

Умови (17) для $k=\overline{1,3}$ є умови рівноваги, а для $k=\overline{4,6}$ — умови замкнутості. Для визначення кута повороту включень δ^{*} після деформування, скористаємося умовами моментної рівноваги

$$\int_0^a\tau\chi_1^{-}(\tau)d\tau=M\,. \tag{18}$$

Розглянемо такі типи контактної взаємодії включень із середовищем.

Задача А. Поверхні включення з боку нормалі перебувають в умовах гладкого контакту з середовищем, а на протилежних гранях контакт із простором відсутній, тобто існує відшарування. До вільного берега прикладені навантаження $p_j^{-}(t)\left(j=\overline{1,3}\right)$. Такому типу взаємодії включень із середовищем відповідають умови

$$\tilde{\zeta}_j^-(t)=p_j^-(t)\ \left(j=\overline{1,3}\right),\quad \tilde{\zeta}_4^+(t)=\theta_j^*+\frac{d}{dt}\left(\tilde{w}_{*j}^+(t)\right),\ t\in\ell,\tag{19}$$
$$\tilde{\zeta}_2^+(t)=\tilde{\zeta}_3^+(t)=0,\quad t\in\ell,$$
$$\left\{\zeta_k^\pm\right\}_{k=1}^6=\left\{\eta_1(\pm0,y),\eta_3(\pm0,y),\eta_4(\pm0,y),\partial_2\eta_6(\pm0,y),\partial_2 v_7(\pm0,y),\ \partial_2 v_8(\pm0,y)\right\},$$

З урахуванням подань (19), скориставшись першими чотирма рівностями зі співвідношень (14), отримаємо систему чотирьох СІР (16), у якій

$$\mathbf{h}=\left\{\tilde{\zeta}_1^+(t),-\tilde{\zeta}_4^-(t),\tilde{\chi}_5^-(t),\tilde{\chi}_6^-(t)\right\},\quad \mathbf{M}_0=\left\{\delta_{4,k}\delta_{2,j}-\delta_{1,k}\delta_{1,j}\right\}_{k=\overline{1,4};\,j=\overline{1,4}},$$
$$\mathbf{M}_\mathrm{S}=\left\{\Upsilon_{kj}^+\right\}_{k=\overline{1,4};\,j=\overline{1,4,6}},\qquad \mathbf{M}_{nm}=\left\{\mathrm{B}_{kjnm}^{++}\right\}_{k=\overline{1,4};\,j=\overline{1,4,6}},$$
$$\mathbf{M}_\mathrm{S}^*=\left\{\Upsilon_{kj}^+\right\}^4,\ \ \mathbf{M}_{nm}^*=\left\{B_{kjnm}^{++}\right\}^4,\ \ \mathbf{q}^\pm(t)=\left\{\pm\tilde{\zeta}_1^-,\pm\tilde{\zeta}_2^-,\pm\tilde{\zeta}_3^-,\tilde{\zeta}_4^+\right\},$$
$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}^+(t)-\frac{\mathbf{M}_\mathrm{S}^*}{\pi}\int_\ell\frac{\mathbf{q}^-(\tau)}{t-\tau}d\tau-\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^3\frac{1}{\pi}\int_\ell\frac{\mathbf{M}_{nm}^*\mathbf{q}^-(\tau)}{te_{nm\,nm}^{++}-\tau}d\tau.$$

Додатковими для вказаної системи будуть умови (18) і (17), якщо $k=1,\overline{4,6}$.

Задача Б. Поверхні включення з боку нормалі зчеплені з простором, а на протилежних поверхнях контакт із простором відсутній, тобто існує відшарування. До вільного берега прикладені навантаження $p_j^-(t)\left(j=\overline{1,3}\right)$. Такому типу взаємодії включень із середовищем відповідають умови (19) і рівності $\tilde{\zeta}_5^+(t)=\tilde{\zeta}_6^+(t)=0$, $t\in\ell$. Скориставшись співвідношеннями (14), отримаємо систему шести СІР (16), у якій

$$\mathbf{h}=\left\{\tilde{\zeta}_1^+(t),\tilde{\zeta}_2^+(t),\tilde{\zeta}_3^+(t),-\tilde{\zeta}_4^-(t),-\tilde{\zeta}_5^-(t),-\tilde{\zeta}_6^-(t)\right\},\ \ \mathbf{M}_\mathrm{S}=\left\{\Upsilon_{kj}^+\right\}_{k=\overline{1,6};\,j=\overline{1,6}},$$
$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}^+(t)-\frac{\mathbf{M}_S}{\pi}\int_\ell\frac{\mathbf{q}^-(\tau)}{t-\tau}d\tau-\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^3\frac{1}{\pi}\int_\ell\frac{\mathbf{M}_{nm}^{++}\mathbf{q}^-(\tau)}{te_{nm}^{++}-\tau}d\tau,\ \ \mathbf{M}_{nm}=\left\{B_{kjnm}^{++}\right\}_{k=\overline{1,6};\,j=\overline{1,6}},$$
$$\mathbf{q}^\pm(t)=\left\{\pm\tilde{\zeta}_1^-,\pm\tilde{\zeta}_2^-,\pm\tilde{\zeta}_3^-,\tilde{\zeta}_4^+,0,0\right\},\qquad \mathbf{M}_0=\mathrm{diag}\left\{-1,-1,-1,1,1,1\right\}.$$

Вказану систему слід доповнити умовами (18) і (17) для $k=\overline{1,6}$.

3. Умови існування й асимптотики поведінки розв'язків системи СІР із нерухомою особливістю

Ядра системи (16) окрім сингулярностей типу Коші містять також нерухомі особливості, що обумовлює необхідність доведення існування та визначення асимптотики її розв'язків. Позначимо через $L_q^2\left(\ell_0,\omega(t)\right)$ $\big(\omega(t)=t^\gamma(a-t)^\beta$, $q-1<\mathrm{Re}\gamma<-1+q\,\mathrm{Re}\gamma,\ q-1<\mathrm{Re}\beta<-1+q\,\mathrm{Re}\beta,\ 1<q<\infty\big)$ простір Банаха функцій з нормою [2] $\|f\|_{q,\omega}=\sqrt[q]{\int_{\ell}\omega(t)|f(t)|^{q}\,dt}$. $H_{\mu}^{\gamma,\beta}(\ell)\ \left(-1<\operatorname{Re}\gamma,\ \operatorname{Re}\beta\le 0\right)$ — клас функцій $f(t)\ (t\in\ell)$, які допускають розвинення $f=t^{\gamma}(1-t)^{\beta}f_{*}(t),\ f_{*}(t)\in H_{\mu}(\ell)$, $H_{\mu}(\ell)$ — клас Гельдерових функцій. Передсимвол [2] системи (16) подамо так:

$$\mathbf{G}^{0}(\eta)=\frac{\mathbf{G}(\eta)}{\sin(\pi\eta)}=\left\{\frac{g_{kj}(\eta)}{\sin(\pi\eta)}\right\}^{r}=\Big\{\mathbf{M}_{0}-\operatorname{ctg}(\pi\eta)\mathbf{M}_{s}-$$
$$-\frac{i}{2\sin(\pi\eta)}\sum_{m,n=1}^{3}\left(\mathbf{B}_{nm}\left(-e_{nm}^{++}\right)^{-1-\eta}-\overline{\mathbf{B}}_{nm}\left(-\overline{e}_{nm}^{++}\right)^{-1-\eta}\right)\Big\}. \tag{20}$$

Теорема. Якщо існує таке число $\gamma,\ \operatorname{Re}\gamma\in(-1;0]$, яке є $(\kappa+1)$-кратним коренем рівняння

$$\Delta(\eta)=0,\qquad \Delta(\eta)=\begin{cases}\det\mathbf{G}(\eta), & \text{якщо } g_{kj}\ne 0\ \ (k=j),\\ \operatorname{tr}\mathbf{G}(\eta), & \text{якщо } g_{kj}=0\ \ (k\ne j),\end{cases} \tag{21}$$

$\operatorname{tr}\mathbf{G}(\eta)$ — слід матриці $\mathbf{G}(\eta)$, то система (16) розв'язувана в $L_{q}^{2}(\ell,\omega(t))$, її індекс дорівнює одиниці, причому за умов (17) і для $q_{k}(t)\in \mathrm{H}_{\mu}^{\alpha+\varepsilon,\beta+\varepsilon}(\ell)$ вона має єдиний розв'язок у $L_{q}^{2}(\ell,\omega(t))\cap \mathrm{H}_{\mu}^{\alpha,\beta}(\ell)\ \left(0\le\alpha,\beta<1\right)$ з асимптотичним розвиненням

$$h_{j}(t)\simeq h_{j}^{*}t^{\gamma}P_{\kappa j}(\ln t),\quad t\to 0,\quad h_{j}^{*}\ne 0,\quad j=\overline{1,r}, \tag{22}$$

де $P_{\kappa j}(z)$ — многочлени к-ої степені.

Доведення. За виконання умов теореми будемо мати: $\det\mathbf{G}^{0}(\eta)\ne 0$, якщо $-1<\operatorname{Re}\eta<\operatorname{Re}\gamma$. Отже згідно з працею [2], система нетерова у просторі $L_{q}^{2}(\ell,\omega(t))$, а її індекс визначається формулою $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=-\operatorname{ind}\left(\mathrm{A}_{\xi}(\tau)\right),\ \mathrm{A}_{\xi}(\tau)=\det\mathbf{G}^{0}(\eta),\ \eta=\xi+i\tau$. Неважко з'ясувати, що $\operatorname{ind}\left(\mathrm{A}_{\xi}(\tau)\right)=m^{0}-1$, де $m^{0}=\operatorname{ind}\left(\mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau)\right),\ \mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau)=\operatorname{tg}^{n}\frac{\eta}{2}\mathrm{A}_{\xi}(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞, то функція $\mathrm{A}_{\xi}^{0}(\tau)$ для $\xi\in(\operatorname{Re}\gamma,1)$ опише замкнутий контур, який розташований симетрично щодо дійсної осі та не охоплює початок координат. Така поведінка притаманна сформульованим задачам і комбінаціям відомих матеріалів [1, 12]. Отже $m^{0}=0$, а індекс системи (16) дорівнює одиниці й тому за умов (17) існує єдиний розв'язок у просторі $L_{q}^{2}(\ell,\omega(t))$, який має інтегровану особливість, якщо $t\to 0$. Тобто справджується подання $h_{j}(t)\simeq t^{\gamma}P_{rj}(\ln t)h_{j}^{*},\ t\to 0,\ h_{j}^{*}\in \mathrm{H}_{\mu}(\ell),\ j=\overline{1,r}$. Скориставшись асимптотичними властивостями операторів із нерухомими особливостями [2], для оператора

$$\mathrm{N}_{jk}\left[f\right]=m_{jk}^{0}f(t)+\frac{m_{jk}^{s}}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau+\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n,m=1}^{3}b_{jk}^{lm}\int_{0}^{a}\frac{f(\tau)d\tau}{e_{nm}t-\tau}$$

отримаємо таке розвинення $(\varepsilon>0)$:

$$\mathrm{N}_{jk}\left[t^{\gamma}P_{\kappa k}\left(\ln t\right)h_{k}^{*}\right]=t^{\gamma}h_{k}^{*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa k}^{(m)}\left(\ln t\right)+$$
$$+\Omega_{jk}^{*}(t),\qquad \left|\Omega_{jk}^{*}\right|<C_{jk}t^{\mathrm{Re}\gamma+\varepsilon}. \tag{22}$$

Скориставшись поданням (22), із системи (16) отримаємо співвідношення

$$t^{\gamma}\sum_{k=1}^{n}h_{k*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa j}^{(m)}\left(\ln t\right)+\Omega_{j}^{0}(t)=0,\quad j=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Функція $\Omega_{j}^{0}(t)$ задовольняє оцінці $\left|\Omega_{j}^{0}(t)\right|<Ct^{\mathrm{Re}\,\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Згідно останньої нерівності виконання (23) можливе у разі

$$\sum_{l=0}^{\kappa}\ln^{l}t\,\mathbf{N}_{\kappa-l}=0, \tag{24}$$
$$\mathbf{N}_{m}=\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\binom{\kappa}{m-p}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p},$$
$$\mathbf{X}_{p}=\left\{h_{j*}(0)a_{pj}\right\}_{1}^{n},\qquad \mathbf{Q}_{m-p}=\left\{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\right\}^{n},$$

$a_{\kappa j}$ — коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}(z)$. Рівність (24) можлива, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\binom{r}{m-p}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p}=0,\qquad m=\overline{0,\kappa}. \tag{25}$$

Оскільки вектори $\mathbf{X}_{p}\neq0,\ p=\overline{0,r}$, лінійно незалежні, то останні рівності можливі тоді і тільки тоді, якщо визначник системи (25), який дорівнює $\Delta^{(r)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже, якщо справджується подання (22), то γ — $(\kappa+1)$-кратний корінь трансцендентного рівняння (21). Поведінка розв'язків системи (16) для $t\to a-0$ визначається характеристичною частиною та збігається з поведінкою розв'язків для відповідних задач про міжфазні включення [11]. *Теорему доведено.*

Наслідок 1. Якщо γ — простий корінь трансцендентного рівняння (21) з найбільшою дійсною частиною зі смуги $\mathrm{Re}\,\gamma\in\left[0;1\right)$, то розв'язки системи (16) допускають асимптотичне подання

$$h_j(t) \simeq t^{\gamma} h_j^*, \quad t \to 0, \quad \operatorname{Re}\gamma \in (-1,0], \quad j = \overline{1,r}\,. \tag{26}$$

Наслідок 2. Трансцендентне рівняння (21) дає змогу виявити наступні за головною частиною доданки до будь-якого порядку K в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (16)

$$h_j(t) \simeq \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} h_{jk}^* t^{\gamma_k}, \quad t \to 0, \quad j = \overline{1,r},$$
$$-1 < \operatorname{Re}\gamma_0 < \operatorname{Re}\gamma_1 < \ldots < \operatorname{Re}\gamma_{\mathrm{K}}, \quad \Delta\left(\gamma_j\right) = 0, \quad h_{jk}^* \neq 0\,.$$

Дослідження виявили, що для поставлених *задач А* та *Б*, для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [1, 12] рівняння (21) має принаймні один корінь у смузі $\operatorname{Re}\gamma \in (-1;0]$, отже справедливе таке твердження.

Наслідок 3. Система (16) за додаткових умов (17) має єдиний розв'язок у просторі $L_q^2\left(\ell, \omega(t)\right)$, який допускає асимптотичне подання (26).

4. Числові результати та їх аналіз

На рис. 1-4 наведені залежності найбільших показників особливостей деяких комбінацій матеріалів під час повертання осей анізотропії навколо осі *OZ* і за зміни кута ϕ нахилу дефекту для *задач А* і *Б*. Для *задачі А* на рис. 1, 2, відповідно для

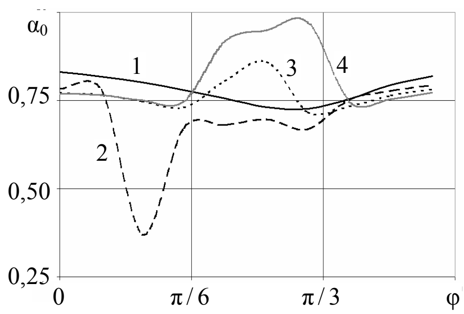

Рис. 1

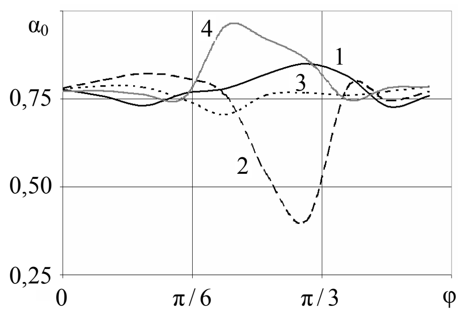

Рис. 2

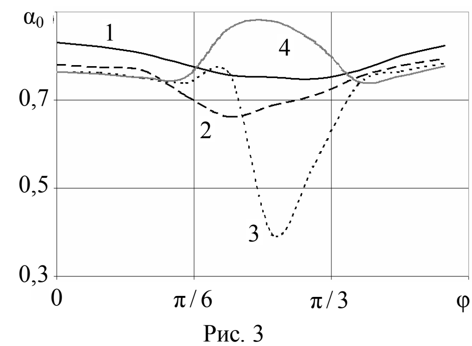

Рис. 3

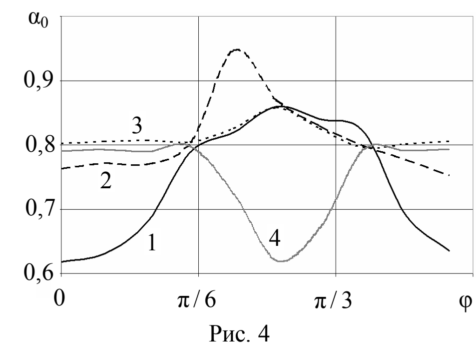

Рис. 4

комбінацій матеріалів верхнього та нижнього півпростору: $m1 - m2$ та $m3 - m4$ (матеріал $m1$ — склопластик однонаправлений, матеріал $m2$ — склопластик ортогонально-армований (2:1), $m3$ — склопластик СТЕТ, $m4$ — склопластик АСТТ(б) [12]), наведені залежності $\alpha_0 = -\mathrm{Re}\gamma_0$, де γ_0 — корінь рівняння (21) із найменшою дійсною частиною зі смуги $\mathrm{Re}\gamma \in (-1;0]$, від кута φ ортогонального перетворення осей анізотропії навколо осі *OZ*. Крива 1 відповідає значенню кута нахилу дефекту $\phi = 0$, крива 2 — $\phi = \pi/6$, крива 3 — $\phi = \pi/4$, крива 4 — $\phi = \pi/3$. Аналогічні залежності наведені для *задачі Б* на рис. 3, 4. Для *задачі А* на рис. 5, 6, відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$ та $m3 - m4$, наведені залежності α_0 від кута нахилу дефекту ϕ. Крива 1 відповідає значенню кута повороту осей анізотропії $\varphi = 0$, навколо осі *OZ*, крива 2 — $\varphi = \pi/6$, крива 3 — $\varphi = \pi/4$, крива 4 — $\varphi = \pi/3$. Аналогічні залежності наведені для *задачі Б* на рис. 7, 8.

Результати обчислень показують, що концентрація напружень в околі дефектів, які виходять у площину з'єднання різних півпросторів, істотно залежить від анізотропних властивостей матеріалів, типу контактної взаємодії дефекту із середовищем і кута нахилу дефекту. Зокрема, виявився вагомим вплив орієнтації головних осей анізотропії півпростору, в якому розташовано дефект. Слід також зазначити, що у разі наближення кута ϕ до $\pi/2$ (включення наближається до площини з'єднання півпросторів) показники особливості наближаються до показників особливостей відповідних задач про міжфазні дефекти [11].

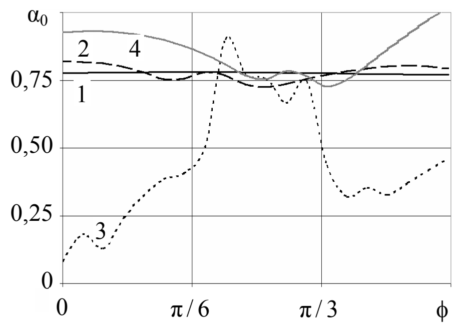

Рис. 5

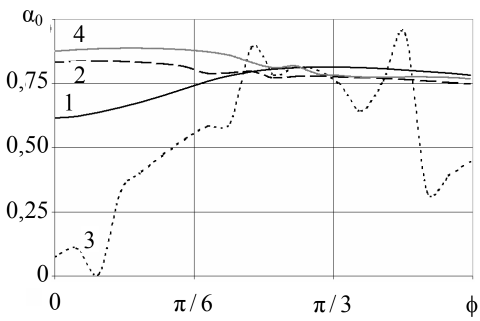

Рис. 6

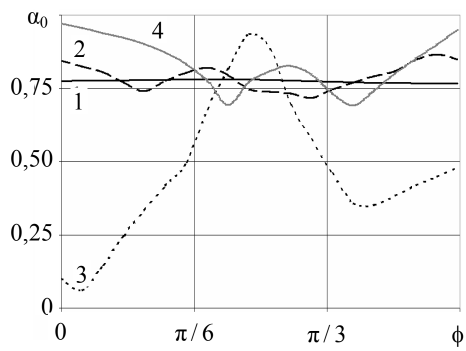

Рис. 7

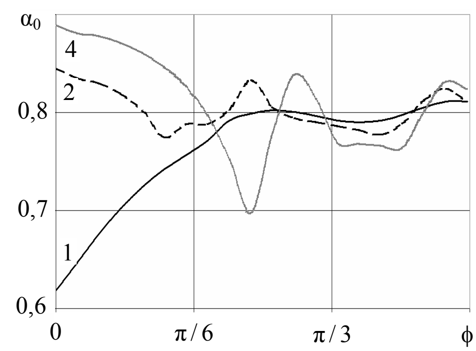

Рис. 8

Висновок. Отже запропоновано методику зведення задач про тунельні включення, які виходять одним кінцем у площину з'єднання різних анізотропних півпросторів до системи СІР із нерухомими особливостями. Досліджено їх розв'язність і виявлено асимптотики поведінки розв'язків у вершинах включень, що дає можливість застосувати до їх розв'язування ефективні числово-аналітичні методи.

Аналогічно можна розглянути задачі про тунельні дефекти інших типів, які виходять у площину з'єднання різних анізотропних півпросторів.

Література

[1] *Александров К. С., Рыжова Т. В.* Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. — 1961. — Т. 6, Вып. 2. — С. 289-314.

[2] *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. — Тбилиси: Мецниереба, 1979. — 136 с.

[3] *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. — Донецк: Вища школа, 1983. — 160 с.

[4] *Кривой А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 3. — С. 84-92.

[5] *Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // Прикл. математика и механика. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 622-632. Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1986. — Vol. 50, No 4. — С. 475-483.

[6] *Кривой А. Ф.* Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2001. — Т. 6, Вип. 3. — С. 108-115.

[7] *Кривой А. Ф., Архипенко К. Н.* Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости // Теорет. и прикладная механика. — 2003. — Вып. 38. — С. 29-35.

[8] *Кривой А. Ф.* Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.:Фіз.-мат. науки. — 2003. — Т. 8, Вип. 2. — С. 140-149.

[9] *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 2. — С. 55-66.

[10] *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотрпном пространстве // Прикл. математика и механика. — 2008. — Т. 72, № 4. — С. 689-700. Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2008. — Vol. 72, No 4. — С. 499-507.

[11] *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, № 6. — С. 36-45. Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. — 2008. — Vol. 44, No 6. — P. 626-634.

[12] *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — Москва: Наука, 1977. — 415 с.

[13] *Мусхилишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — Москва: Наука, 1966. — 708 с.

[14] *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — Москва: Наука, 1982. — 342 с.

[15] *Сулим Г. Т., Шевчук С. П.* Плоска задача для кусково-однорідного анізотропного тіла зі стрічковими пружними включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1999 — Т. 35, № 6. — С. 7-16.

[16] *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. — 1999. — Vol. 69. — P. 317-335.

Peculiarities of the stress field near tunnel exfoliated inclusion in piecewise homogeneous anisotropic space

Oleksandr Kryvyy

Problems of the tunnel, absolutely rigid, and exfoliated inclusion whose one end is in the plane of connection of two different anisotropic half-spaces that are in conditions of generalized plane strain are considered. Cases of adherence and smooth contact of one of the inclusion facets with environment are investigated. On the basis of constructed discontinuous solution, the problems are reduced to a system of singular integral equations with fixed peculiarity. The conditions of the existence and the asymptotics of the solutions of the mentioned systems are determined. The dependences of characteristics of the stress peculiarities at the apex of the inclusion on anisotropic properties of the half-spaces and the location of the inclusions are obtained.

Особенности поля напряжений возле туннельного отслоившегося включения в кусочно-однородном анизотропном пространстве

Александр Кривой

Рассмотрены задачи о туннельных отслоившихся включениях, выходящих одним концом в плоскость соединения разных анизотропных полупространств, которые находятся в условиях плоской деформации. Исследованы случаи сцепления или гладкого контакта одной из поверхностей включения со средой. С помощью построенного разрывного решения задачи сведены к системам сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Установлены условия существования и асимптотики решений указанных систем. Получены зависимости показателей особенностей напряжений в вершинах включений от анизотропных свойств материалов и расположения включений.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 08.05.14