

## Математичне моделювання зволоження ґрунту на схилі внаслідок аварії безнапірного трубопроводу з урахуванням процесів теплосолеперенесення

Тетяна Кутя<sup>1</sup>, Петро Мартинюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: Grotan\_nuwmnru@ukr.net

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., доцент, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: Martinjuk@ukr.net

*Побудовано математичну модель процесу зволоження ґрунту внаслідок аварії безнапірного трубопроводу в тілі схилу за врахування явищ тепло- та солеперенесення. Відповідну крайову задачу розв'язано методом радіальних базисних функцій із застосуванням методу колокації у точці. Наведені результати числових експериментів і проведено їх аналіз, який показав доцільність врахування процесів тепломасоперенесення під час дослідження відповідних задач.*

**Ключові слова:** зсув, безнапірний трубопровід, вологоперенесення, теплосолеперенесення, метод радіальних базисних функцій.

**Вступ.** Зсувні процеси ґрунтів становлять економічну, екологічну небезпеки та загрозу для життя людей. Зсувами є зміщення гірських порід, земляних мас вниз по схилу під дією власної ваги, поверхневих і підземних вод, а також у зв'язку з атмосферним і сейсмічним впливом. Найбільша їх небезпека полягає у швидкоплинності зсувного процесу. Тому на перший план виходить завдання їх завчасного прогнозування та передбачення стійкості зсувонебезпечних ділянок.

Вивчення зсувних процесів із точки зору фізики та механіки їх виникнення та перебігу стосується робота [1], а математичного моделювання зсувів ґрунтів — праці В. В. Скопечького, Ю. Г. Кривоноса, М. Е. Егліта, С. С. Григоряна та ін. [2-4].

Однією із причин виникнення зсувних явищ є наявність витоків із водонесучих комунікацій. У разі аварії безнапірних водонесучих комунікацій через невелику глибину їх закладання витік буде здійснюватись у поверхневий ґрунтовий шар, що разом із природними факторами може стати причиною зсувних процесів, які значною мірою залежать від ступеня вологонасичення ґрунту [5]. Такі аварії також небезпечні через їхню тривалість у часі. Витоки з комунікацій, що несуть воду під тиском (водопровід, тепломережі), швидко проявляються на поверхні ґрунту, та й перерви у водопостачанні вимагають термінового їх виявлення і ремонту. Витоки з каналізаційних безнапірних, низьконапірних комунікацій (наприклад, через стики труб) не виявляються роками, бо не виходять на поверхню ґрунту, однак впливають на стійкість ґрунтового масиву та є не менш небезпечні.

Так протік водопроводу став причиною масштабного зсуву у Дніпропетровську 2011 р., який поховав під собою гаражний комплекс і тимчасово вивів із ладу систему водопостачання.

Тому мета статті — дослідити процес промочування ґрунту з утвореного внаслідок аварії пробою у трубі, що може бути частиною водопроводу, тепломагістралі або каналізаційної мережі та є ненапірним джерелом вологи. Подібну задачу, але без урахування впливу теплосолеперенесення, досліджено у роботі [6].

### 1. Об'єкт дослідження та математична модель

Розглянемо профільний переріз ґрунтового масиву — область  $\Omega$ , обмежений укосом  $AB$ . Переріз зроблено в місці прориву трубопроводу (точка  $D$ ), перпендикулярно до нього. Таке спрощення дозволяє розглядати задачу як двовимірну. У результаті прориву відбувається змочування ґрунту схилу деяким однокомпонентним хімічним розчином із температурою, відмінною від температури ґрунту. Завдання полягає у визначенні динаміки насичення в часі. Введення функції насичення дозволяє розглядати межу розподілу зон повного та неповного насичення внутрішньою та явно не визначати її в процесі розв'язання задачі [7]. При цьому  $OC$  є віссю симетрії (див. рис. 1).

Двовимірна математична модель процесу вологоперенесення в ґрунтовому схилі з урахуванням перенесення солей у неізотермічних умовах описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial s(x, z, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ \mathbf{D}(s, c, T) \nabla s - \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} (\mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T + \mathbf{K}(s, c, T) \nabla z) \right], \quad (1)$$

$$\sigma_s \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial N_c}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{D}_c \nabla c) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T) - \bar{v} \nabla c, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_c(x, z, t)}{\partial t} = \gamma_c (c - C_m) N_c^\alpha, \quad (3)$$

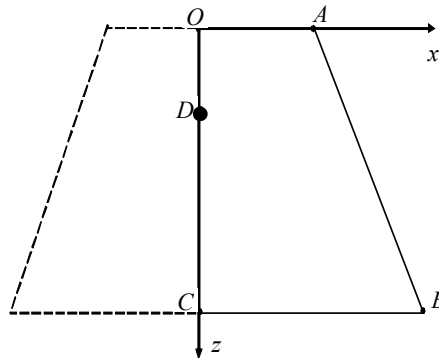


Рис. 1. Схема розташування в ґрунтовому масиві точки прориву трубопроводу

$$\left[ \rho C_p s + \rho_{sk} C_{sk} (1 - \sigma) \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \rho C_p \bar{v} \nabla T, \quad (4)$$

$$\bar{v} = -\mathbf{D}(s, c, T) \nabla s (\theta_{\max} - \theta_{\min}) + \mathbf{K}(s, c, T) \nabla z + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (x, z) \in \Omega, t > 0, \quad (5)$$

де  $s = (\theta - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - \theta_{\min})$ ,  $0 \leq s \leq 1$  — функція насиченості, що виражена через об'ємну вологість  $\theta = V_g / V$ ,  $V_g$  — об'єм рідини в елементі ґрунту загальним об'ємом  $V$ ;  $\mathbf{D}(s, c, T)$  — проникність ґрунтової вологи, що може розглядатися як нелінійний коефіцієнт дифузії;  $\mathbf{K}(s, c, T)$  — коефіцієнт гідравлічної проникності ненасиченого середовища, що перетворюється у коефіцієнт фільтрації у разі повного насичення;  $\theta_{\max}$  — значення максимальної вологості;  $\theta_{\min}$  — залишкова (мінімальна) вологість (або кількість рідини, яка залишається у ґрунті після повного осушення природним шляхом);  $\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{K}_T$  — коефіцієнти хімічного та термічного осмосів, які мають тензорний характер [8];  $\sigma$  — пористість ґрунтового середовища;  $c$  — концентрація солі у рідкій фазі;  $\mathbf{D}_c$  — коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T^{(c)}$  — коефіцієнт (тензор) термічної дифузії;  $\bar{v}$  — вектор швидкості фільтрації;  $N_c(x, y, t)$  — концентрація солі у твердій фазі;  $\gamma_c$  — коефіцієнти інтенсивності масообміну між рідкою та твердою фазами ґрунту [9];  $C_m$  — концентрація граничного насичення в рідкій фазі;  $\alpha$  — параметр, що визначається експериментальним шляхом [9];  $T$  — температура;  $\rho$  — густина порового розчину;  $C_p$  — питома теплоємність порового розчину;  $\rho_{sk}$  — густина скелета ґрунту;  $C_{sk}$  — питома теплоємність матеріалу скелета ґрунту;  $\lambda$  — коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту.

Рівняння (1) описує зміну за часом насичення ґрунту деяким сольовим розчином з температурою, відмінною від температури ґрунту. Виведення рівняння (1) відрізняється від класичної теорії вологоперенесення [10, 11] використанням закону (5). Своєю чергою, у співвідношенні (5), що є узагальненим законом Дарсі-Клюта на випадок руху сольових розчинів у неізотермічних умовах, враховано явища хімічного та термічного осмосу [8], залежність  $\mathbf{D}(s, c, T)$  та  $\mathbf{K}(s, c, T)$  від насичення вологою, концентрації порового розчину та температури. Рівняння (2) описує зміну теплового режиму, а (3) та (4) — зміну сольового режиму у пористому середовищі у рідкій і твердій фазах відповідно.

Рівняння (1)-(5) повинні бути доповнені початковими та граничними умовами для невідомих функцій.

На початок дослідження, тобто в момент часу  $t = 0$ , вважаємо, що в усій досліджуваній області ґрунт майже сухий ( $\theta_0 \approx \theta_{\min}$ ) і відома насиченість  $s$ :

$$s(x, z, 0) = s_0(x, z), \quad (x, z) \in \bar{\Omega}. \quad (6)$$

Задано початкову концентрацію солі у твердій і рідкій фазах, а також температуру:

$$c(x, z, 0) = c_0(x, z), \quad (x, z) \in \bar{\Omega}, \quad T(x, z, 0) = T_0(x, z), \quad (x, z) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$N_c(x, z, 0) = N_c^{(c)}(x, z), \quad (x, z) \in \bar{\Omega}. \quad (8)$$

На межі контакту з атмосферою  $OA \cup AB$  значення насиченості  $s(x, z, t)$  вважаємо відомим. Маємо граничну умову першого роду

$$s(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB} = s_1(x, z, t), \quad (x, z) \in OA \cup AB, \quad t > 0. \quad (9)$$

Межа  $CB$  — непроникна, отримуємо граничну умову другого роду:

$$\left( -D(s, c, T) \frac{\partial s(x, z, t)}{\partial z} \right) \Big|_{CB} = 0, \quad (x, z) \in CB, \quad t > 0. \quad (10)$$

Межа  $OC$  є віссю симетрії, тому гранична умова другого роду має вигляд

$$\frac{\partial s(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OC \setminus \{D\}} = 0, \quad (x, z) \in OC \setminus \{D\}, \quad t > 0. \quad (11)$$

У точці прориву труби  $D$  (прорив відбувається відразу після початкового моменту часу) маємо повну насиченість ґрунту вологою, тому

$$s(x, z, t) \Big|_D = 1, \quad (x, z) \in D, \quad t > 0. \quad (12)$$

Граничні умови для концентрацій солі такі:

$$\begin{aligned} c(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB \cup CB} &= c_1(x, z, t), \quad (x, z) \in OA \cup AB \cup CB, \quad t > 0, \\ \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OC \setminus \{D\}} &= 0, \quad (x, z) \in OC \setminus \{D\}, \quad c(x, z, t) \Big|_D = C_m, \quad (x, z) \in D, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничні умови для температури задамо таким чином:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) \Big|_{OA \cup AB \cup CB} &= T_1(x, z, t), \quad (x, z) \in OA \cup AB \cup CB, \quad t > 0, \\ \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{OC \setminus \{D\}} &= 0, \quad (x, z) \in OC \setminus \{D\}, \quad T(x, z, t) \Big|_D = T_m, \quad (x, z) \in D, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут  $s_0(x, z)$ ,  $c_0(x, z)$ ,  $T_0(x, z)$ ,  $N_0^{(c)}(x, z)$ ,  $s_1(x, z, t)$ ,  $c_1(x, z, t)$ ,  $T_1(x, z, t)$  — задані функції;  $T_m$  — задане значення максимальної температури.

Для обрахунку нелінійних функцій  $D(s, c, T)$  та  $K(s, c, T)$  у випадку однорідного ізотропного ґрунту можна використати такі емпіричні залежності [10, 11]:

1. Модель BC (R. H. Brooks and A. T. Corey model):

$$K(s, c, T) = K_0(c, T) s^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}, \quad D(s, c, T) = D_0 s^{2+\frac{1}{\lambda}}, \quad D_0 = -\frac{K_0(c, T) \Psi_b}{\lambda(\theta_{\max} - \theta_{\min})}.$$

2. Модель MvG (Mualem-Van Genuchten model):

$$K(s, c, T) = K_0(c, T) \sqrt{s} \left[ 1 - \left( 1 - s^{c/\lambda} \right)^{\lambda/c} \right]^2,$$

$$D(s, c, T) = D_0 \frac{\left[ 1 - \left( 1 - s^{r/\lambda} \right)^{\lambda/r} \right]^2 \left( 1 - s^{r/\lambda} \right)^{\frac{1}{r}-1}}{s^{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}}}.$$

У цих моделях  $K_0(c, T)$  — коефіцієнт фільтрації, який залежить від концентрації солей і температури [8];  $\lambda$  — характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту;  $\psi_b$  — тиск повітря у ґрунті (зауважимо, що  $\psi_b$  є від’ємний, тому  $D_0$  і  $D(s, c, T)$  будуть додатні);  $r$  — емпіричний параметр. Існують також інші залежності для коефіцієнтів дифузії та гідравлічної провідності, деякі з яких наведено у роботах [10, 11].

## 2. Числове розв’язання задачі

Для розв’язування крайової задачі (1)-(14) застосуємо метод колокації у точці [12]. За базисні використано радіальні функції [13]. Для цього покриємо замикання  $\bar{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $(x_j, z_j)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , де точки з номерами із множини  $\omega_\gamma$  лежать на межі, а з номерами із множини  $\omega$  — в області  $\Omega$ . Вузлові точки  $(x_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, M}$ , розмістимо всередині області  $\Omega$  та на межах, де задані граничні умови першого роду ( $OA \cup AB$ ) та співпадають із відповідними колокаційними точками. Виносимо вузлові точки за межі області для покращення точності методу на границях, де задаються граничні умови другого роду ( $OC \cup CB / \{D\}$ ). Вимагаємо, що в точці  $D$  розміщено колокаційну точку.

Наближені значення невідомих функцій будемо шукати у вигляді:

$$s(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{s_j}(t) \phi_j(r_j, \varepsilon_s), \quad c(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{c_j}(t) \phi_j(r_j, \varepsilon_c),$$

$$T(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{T_j}(t) \phi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad N_c(x, z, t) \approx \sum_{j=1}^M \alpha_{N_{c_j}}(t) \phi_j(r_j, \varepsilon_{N_c}), \quad (15)$$

де  $\alpha_{s_j}(t), \alpha_{c_j}(t), \alpha_{N_{c_j}}(t), \alpha_{T_j}(t)$ ,  $j = \overline{1, M}$  — невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;  $\phi_j(r_j, \varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, M}$  — відомі радіальні базисні функції з центром у точці  $(x_j, z_j)$ ;  $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (z - z_j)^2}$  — відстань до вузла  $j$ ;  $\varepsilon_s > 0$ ,  $\varepsilon_c > 0$ ,  $\varepsilon_{N_c} > 0$ ,  $\varepsilon_T > 0$  — параметри форми.

Підставляючи наближені розв'язки (15) у рівняння (1), (2), (4), початкові (6), (7) та граничні (9)-(14) умови, а точку  $(x, z)$  послідовно покладаючи рівною кожній колокаційній точці  $(x_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, M}$ , отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь щодо векторів  $\mathbf{a}_s(t) = \{\alpha_{s_j}(t)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_c(t) = \{\alpha_{c_j}(t)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_T(t) = \{\alpha_{T_j}(t)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_{Nc}(t) = \{\alpha_{Nc_j}(t)\}_{j=1}^M$ :

$$\mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{a}_s(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{a}_s(t) = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{P} \mathbf{a}_c(t) + \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{a}_T(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \frac{d\mathbf{a}_c(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{a}_c(t) = \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{a}_T(t), \quad (17)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{d\mathbf{a}_T(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{a}_T(t) = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{a}_{Nc}(t)}{dt} = \mathbf{F}^{(4)}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{a}_s^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \mathbf{a}_c^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \mathbf{a}_T^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \mathbf{a}_{Nc}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}. \quad (20)$$

Тут  $\mathbf{a}_s^{(0)} = \{\alpha_{s_j}(0)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_c^{(0)} = \{\alpha_{c_j}(0)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_T^{(0)} = \{\alpha_{T_j}(0)\}_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{a}_{Nc}^{(0)} = \{\alpha_{Nc_j}(0)\}_{j=1}^M$ ,  
 $\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ ,  $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ ,  
 $\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $\mathbf{R}^{(1)} = \{r_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^M$ ,  $\mathbf{R}^{(2)} = \{r_{ij}^{(2)}\}_{i,j=1}^M$ ,  $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^M$ .

Визначення всіх елементів матриць і вектор-стовпців у співвідношеннях (16)-(20) є однотипні та здійснюється за схемою методу колокації у точці. Тому для зменшення громіздкості викладок наведемо такі формули лише для системи рівнянь (18). Маємо

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} [\rho C_p s(x_i, z_i) + \rho_{sk} C_{sk} (1 - \sigma)] \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \omega; \\ 0, & i \in \gamma; \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(3)} = \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, M}; \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x_j, z_j), \quad i = \overline{1, M};$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in \omega; \\ T_1(x_i, z_i), & i \in OA \cup AB \cup CB; \\ 0, & i \in OC \setminus \{D\}; \\ T_m(x_i, z_i), & i \in \{D\}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) + \rho C_\rho \left( v_x \frac{\partial \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x} + v_z \frac{\partial \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial z} \right), & i \in \omega; \\ \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in OA \cup AB \cup CB \cup \{D\}; \\ \frac{\partial \phi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i \in OC \setminus \{D\}. \end{cases}$$

Для числового розв'язання задачі Коші (16)-(20) поділимо часовий проміжок  $[0; t_0]$  (упродовж якого досліджується процес) на  $m$  однакових частин із кроком  $\tau = t_0/m$ . Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь можна знайти, наприклад, за допомогою лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми [8]

$$\mathbf{M}^{(1)} \frac{\alpha_s^{(k+1)} - \alpha_s^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)} \alpha_s^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(1)}(t_{(k+1)}) + \mathbf{P} \alpha_c^{(k)} + \mathbf{R}^{(1)} \alpha_T^{(k)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \frac{\alpha_c^{(k+1)} - \alpha_c^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)} \alpha_c^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(2)}(t_{(k+1)}) + \mathbf{R}^{(2)} \alpha_T^{(k+1)}, \quad (22)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{\alpha_T^{(k+1)} - \alpha_T^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)} \alpha_T^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(3)}(t_{(k+1)}), \quad (23)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{N_c^{(k+1)} - N_c^{(k)}}{\tau} = \mathbf{F}^{(4)}(t_{(k+1)}), \quad k = \overline{1, m-1}. \quad (24)$$

Тут верхніми індексами позначені значення матриць і векторів на відповідному часовому шарі. Рівняння (24) є результатом лінеаризації за Ньютоном різницевої схеми для системи нелінійних рівнянь (19), де

$$\mathbf{F}^{(4)}(t_{(k+1)}) = \mathbf{L}'_{N_c}(N_c^{(k)})(N_c^{(k+1)} - N_c^{(k)}) + \mathbf{L}(N_c^{(k)}).$$

Систему (19) отримано як результат застосування схеми методу колокації у точці до рівняння (3).

### 3. Результати й аналіз числових експериментів

*Експеримент 1.* Розглянемо задачу вологоперенесення в ґрунтовому схилі, коли з труби в безнапірному режимі витікає чиста вода. Розміри ґрунтового схилу такі (див. рис. 1):  $OD = 2$  м,  $OA = 6$  м,  $DC = 8$  м,  $CB = 10$  м. Вихідні дані:  $\sigma = 0,4$ ;  $k_s = 1$  м/добу;  $s_0 = 0,1$ ;  $s_1 = 0,1$ ;  $\theta_{\min} = 0,153$ ;  $\theta_{\max} = 0,250$ ;  $\psi_b = -0,2$ ;  $\lambda = 1$ ;  $c = 1,7$ , де  $k_s$  — сталий коефіцієнт фільтрації. Процес досліджувався упродовж 30 діб із кроком за часом  $\tau = 1$  доба. За радіальну базисну функцію (РБФ) застосовано мультикватратичну  $\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  з параметром форми  $\varepsilon = 5$ . Область покривалася 196 вузловими точками та такою ж кількістю колокаційних.

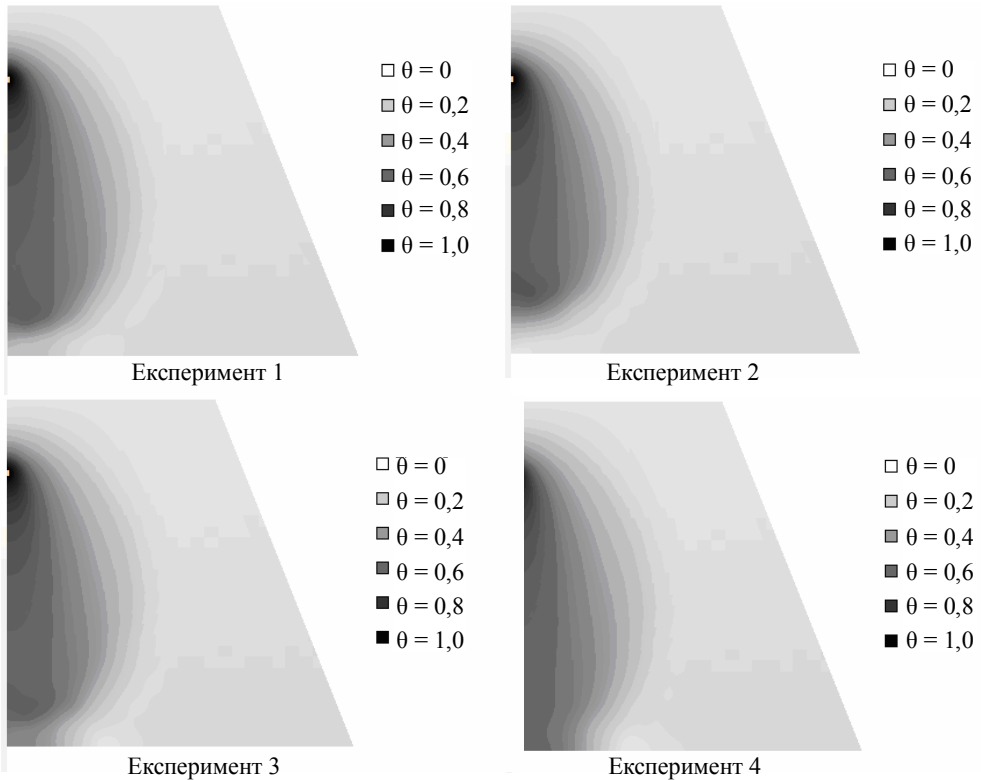


Рис. 2. Розподіл насиченості розчином у масиві ґрунту за проміжок часу 30 діб

На рис. 2 показано область повного насичення ґрунту вологою, яка є невеликою та знаходиться близько прориву. Область часткового насичення, відмінного від природного стану ґрунту, значна та йде вглиб схилу. Це говорить про вплив сили тяжіння на перенесення вологи. Зазначимо, що зміни, пов'язані з насиченням ґрунту вологою, на поверхні схилу не помітні.

*Експеримент 2.* Нехай прорив стався в каналізаційній трубі, та у ґрунт надходять стічні води, де основною мінеральною забруднюючою речовиною є хлорид натрію. Розрахуємо концентрацію цієї солі в рідкій фазі у розчині, що надходить із труби. Вважаємо, що на початок дослідження в поровій рідині є домішки мінеральної солі NaCl, а тверда фаза відсутня. Тут коефіцієнт фільтрації, як і в експерименті 1, вважаємо сталим і його значення дорівнює 1м/добу.

Вхідні дані для рівняння масоперенесення солі:  $\gamma_c = 0 \text{ доба}^{-1}$ ;  $K_c = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / (\text{град} \cdot \text{доба})$ ;  $D_c = 0,5 \text{ м}^2 / \text{доба}$ ;  $C_m = 50 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;  $c_0 = 5 \text{ кг} / \text{м}^3$ .

На рис. 2 (експеримент 2) показано, що концентрація солі в рідині, яка витікає, не має значного впливу на поширення вологи та діє лише внаслідок хімічного осмосу, адже коефіцієнт фільтрації не залежить від концентрації солей.

*Експеримент 3.* Розглянемо випадок, коли в ґрунті знаходиться труба тепломагістралі та внаслідок аварії з неї витікає чиста тепла вода. Коефіцієнт фільтрації сталий.



Вхідні дані:  $\rho_{sk} = 2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_p = 4,2 \text{ кДж/(м} \cdot \text{град)}$ ;  $c_{sk} = 836 \text{ кДж/(м} \cdot \text{град)}$ ;  $\lambda = 108 \text{ кДж/(м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба)}$ ;  $K_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{доба)}$ ;  $T_m = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_0 = 4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Наявність поля температури (рис. 2 (експеримент 3)) зумовлює швидше поширення вологи та збільшення площі зволоженого ґрунту. Із цього можна зробити висновок про переважання впливу коефіцієнта термічного осмосу над хімічним.

*Експеримент 4.* Нехай внаслідок прориву з труби витікає тепла вода з розчином солі (рис. 2). Вхідні дані такі ж, як і в експериментах 2 та 3. Залежність коефіцієнта фільтрації  $K_0(c, T)$  від температури та концентрації солі апроксимовано, використовуючи метод РБФ з експериментальними даними, взятими з монографії [8].

Сумісне врахування температури та концентрації рідини, що надходить із труби, помітно змінює картину зволоженості ґрунту, адже область часткового насичення ґрунту, відмінного від мінімального, значно ширша.

**Висновки.** Таким чином запропоновано та досліджено математичну модель вологоперенесення у ненасиченому ґрунті, джерелом зволоження якого є пробій у водонесучій комунікації, враховуючи вплив перенесення солей і температури. Розв'язано відповідну крайову задачу безсітковим методом радіальних базисних функцій.

Згідно з аналізом числових експериментів можна зазначити значну тривалість процесу промочування ґрунту вологою з ненапірного джерела та непомітність протікання цього процесу на поверхні, що може спричинити значні труднощі у виявленні та запобіганні аварії. За сталого коефіцієнта фільтрації врахування явища перенесення тепла має значно більший ефект на процес поширення вологи, ніж перенесення солей. У разі врахування залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури волога швидше поширюється у ґрунті, ніж без врахування взаємодії цих явищ окремо. Тому нелінійністю впливу цих явищ на швидкість вологоперенесення нехтувати не можна. Також експерименти показують, що одночасний вплив теплосолеперенесення не можна подати у вигляді суперпозиції окремо взятих процесів.

Подальші дослідження будуть спрямовані на розрахунок стійкості досліджуваних ґрунтових масивів за врахування тепломасоперенесення. Також вимагає вивчення аналогічна просторова задача.

## Література

- [1] Емельянова Е. П. Основные закономерности оползневых процессов. — Москва: Недра, 1972. — 308 с.
- [2] Угненко Е. Б., Тимченко О. Н. Математическая модель прогнозирования возникновения грунтовых оползней // Вестник ХНАДУ. — 2010. — № 49. — С. 72-74.
- [3] Кривонос Ю. Г., Скопецкий В. В. Математическое моделирование процессов формирования грунтовых и снеговых оползней // Прикладна гідромеханіка. — 2003. — Т. 5 (77). — № 1. — С. 36-41.
- [4] Эглит М. Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 96 с.
- [5] Соколовська В. А. Фактори розвитку небезпечних інженерно-геологічних процесів в межах забудованих територій міст України // Містобудування та терит. планування. — 2004. — Вип. 19. — С. 226-231.

- [6] Громадченко Т. В., Мартинюк П. М., Пащенко А. В. Математичне моделювання промочування сухого ґрунту в результаті аварії безнапірного водопроводу // Вісник ОДАБА. — 2012. — № 48, Ч. 1. — С. 103-111.
- [7] Вабищевич П. Н., Данияров А. О. Математическое моделирование промачивания зоны аэрации в условиях близкого залегания грунтовых вод // Математическое моделирование. — 1994. — Т. 6, № 11. — С. 11-24.
- [8] Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. — Рівне: НУВГП, 2008. — 416 с.
- [9] Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шершук. — Москва: Недра, 1977. — 271 с.
- [10] Caputo J.-G., Stepanyants Y. A. Front Solutions of Richards' Equation // Transport in Porous Media. — 2007. — Vol. 74, Issue 1. — P. 1-20.
- [11] Leij F. J., Russell W. B., Lesch S. M. Closed Form Expressions for Water Retention and Conductivity Data // Ground Water. — 1997. — Vol. 35, No 5. — P. 848-858.
- [12] Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики. — Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 700 с.
- [13] Kansa E. J. Multiquadrics – a Scattered Data Approximation Scheme with Application to Computational Fluid-Dynamics. II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations // Comput. Math. Appl. — 1990. — Vol. 19, No 8/9. — P. 147-161.

## **Mathematical modeling of soil moistening on the slope as a result of water nonpressure pipeline damage with taking into account heat and salt transfer**

Tetiana Kutya, Petro Martyniuk

*The article deals with mathematical model of soil moistening as a result of nonpressure pipeline damage with taking into account heat and salt transfer. The corresponding boundary-value problem was solved by radial basis function method using point collocation method. The results of numerical experiments was considered and their analyses showed the expediency of taking into account heat and salt transfer processes to the solution of corresponding problems.*

## **Математическое моделирование промачивания ґрунта на склоне в результате аварии безнапорного трубопровода с учетом процессов теплосолепереноса**

Татьяна Кутя, Петр Мартынюк

*Построена математическая модель процесса промокания ґрунта вследствие аварии безнапорного трубопровода в теле склона при учете явлений теплосолепереноса. Соответствующая краевая задача решена методом радиальных базисных функций с применением метода коллокации в точке. Показано результаты численных экспериментов и проведен их анализ, который показал целесообразность учета процессов теплосолепереноса при исследовании соответствующих задач.*

Представлено професором О. Чернухою

Отримано 24.03.14