УДК 519.6, 517.526

Алгоритми обчислення значення деякої гіпергеометричної функції Гауса у комплексній площині

Олександра Манзій[1], Володимир Гладун[1], Віктор Пабирівський[1], Оксана Уханська[1]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: lesly@ukr.net, v_hladun@yahoo.com, pabvic@ukr.net

Використовуючи неперервні дроби, побудовано алгоритм розвинення гіпергеометричної функції $F(a,2;c;z)$ *в області, ширшій порівняно з областю збіжності гіпергеометричного ряду. Доведено збіжність отриманого розвинення до функції, що є аналітичним продовженням гіпергеометричного ряду Гауса* $F(a,2;c;z)$ *у всій комплексній площині з розрізом уздовж дійсної осі від* 1 *до* $+\infty$*. Здійснено порівняльний аналіз алгоритму обчислення значення гіпергеометричної функції* $F(a,2;c;z)$ *за допомогою неперервного дробу й алгоритму, що використовує комбінацію* Γ*-функцій і гіпергеометричних рядів.*

Ключові слова: гіпергеометрична функція Гауса, неперервний дріб Гауса, голоморфна функція, мероморфна функція, рівномірна збіжність.

Вступ. Розв’язками багатьох задач математичної фізики, аеромеханіки, аеродинаміки, астрофізики, квантової механіки, астрономії, біомедицини та інших є спеціальні функції різної природи та складності. Одним із важливих класів спеціальних функцій є гіпергеометричні функції [1-7]. Гіпергеометрична функція Гауса та її часткові й вироджені випадки — функції Бесселя, Лежандра, ортогональні многочлени Якобі, Чебишева, Лагерра, Ерміта відіграють важливу роль у різних областях математики та її застосувань. Цей клас спеціальних функцій називають також спеціальними функціями математичної фізики.

Одним із прикладів застосування гіпергеометричних функцій, який і взято за основу для цієї роботи, є задача дослідження процесів іонізації атому гелію та молекул водню електронним ударом. У роботі [8] розглядається математична модель і алгоритми аналізу процесів іонізації атома гелію та молекул водню з варіаційними функціями, що задовольняють умови Като. Запропоновано алгоритм обчислення хвильової функції, що описує рух електрона, та її застосування до обчислення кратних інтегралів для диференціальних перерізів іонізації іона водню, причому кратні інтеграли за допомогою перетворення Фур’є зводяться до потрійних інтегралів, ядро яких містить добутки гіпергеометричних функцій Гауса $F(a,2;c;z)$. Тому постає питання обчислення значень функції $F(a,2;c;z)$ у довільній точці комплексної площини.

Обчислення значення гіпергеометричної функції $F(a,2,c;z)$ за допомогою гіпергеометричного ряду можливе лише всередині одиничного круга. Тому актуальним є створення алгоритмів обчислення гіпергеометричних функцій у довільній точці комплексної площини.

Ефективним апаратом наближення аналітичних, зокрема гіпергеометричних функцій, є неперервні дроби. У багатьох випадках області збіжності неперервних дробів є ширші, ніж області збіжності степеневих рядів. Окрім того, неперервні дроби мають властивість обчислювальної стійкості за досить загальних обмежень на коефіцієнти, що дуже важливо у застосуваннях. Уперше такі дроби були отримані Л. Ейлером і досліджувалися у роботах Й. Ламберта, Ж. Лагранжа. К. Гаус узагальнив роботи цих авторів і побудував розвинення відношення гіпергеометричних функцій одної змінної у неперервний дріб [9]. Побудови та дослідження розвинень гіпергеометричних функцій у неперервні дроби стосуються роботи багатьох відомих вчених, зокрема П. Лапласа, А. Лежандра, К. Якобі, Е. Гейне, Б. Рімана та інших. У монографіях Х. С. Уолла [10], Г. Екстона [11], В. Джоунса та В. Трона [9], Л. Лорентсен і Х. Воделанда [12, 13], А. Гіл, Х. Сегури, Н. Теме [14], А. Коут та ін. [15, 16] побудовано та досліджено розвинення у неперервні дроби відношень гіпергеометричних функцій Гауса за деяких обмежень на параметри, вироджених гіпергеометричних та інших спеціальних функцій. До цього часу не побудовано розвинення функції Гауса у неперервний дріб у разі довільних допустимих значень параметрів.

1. Основні поняття й означення

Гіпергеометричним рядом Гауса називають функцію $F(a,b;c;z)$, визначену степеневим рядом

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n , \tag{1}$$

де параметри a, b, c — комплексні сталі та $c\neq 0,-1,-2,...$, z — комплексна змінна, $(a)_0=1$, $(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$, $n=1,2,\ldots$

Ряд (1) збігається всередині одиничного круга $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ [2]. Існують інтегральні подання, які визначають функції, що є аналітичним продовженням функції $F(a,b;c;z)$ у ширші області [2, 17]. Зокрема, для $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$ справджується формула Ейлера

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt . \tag{2}$$

Тут $\Gamma(x)$ — гамма-функція. Права частина формули (2) є однозначна аналітична функція в області $\{z\in\mathbb{C}:|\arg(1-z)|<\pi\}$ та аналітичне продовження функції $F(a, b; c; z)$ в цю область.

Неперервний дріб означають за допомогою композиції дробово-лінійних відображень

$$t_0(z)=b_0+z\,,\quad t_k(z)=a_k\left(b_k+z\right)^{-1},\quad k=1,2,\ldots,$$

де a_i, i = 1, 2, ...; b_j, j = 0, 1, 2, ..., — комплексні числа; z — комплексна змінна, причому усі $a_i \neq 0$. Нехай

$$T_0(z)=t_0(z)\,,\quad T_n(z)=T_{n-1}\left(t_n(z)\right),\quad n=1,2,\ldots,\quad f_n=T_n(0)\,,\quad n=1,2,\ldots$$

Неперервним дробом називається послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Неперервний дріб записують у вигляді

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}:=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_k}{b_k+\ddots}}}.$$

Скінченні неперервні дроби $f_n=b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}$, $n=1,2,\ldots$, називають n-ими підхідними дробами або n-ими апроксимантами неперервного дробу.

Неперервний дріб називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів f_n .

Нехай $b_0(z),a_k(z),b_k(z),k=1,2,\ldots$, — деяка сукупність комплексних функцій, визначених на множині $D\subset\mathbb{C}$. Неперервний дріб $b_0(z)+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(z)}{b_k(z)}$ називають функціональним неперервним дробом. Позначимо $f_n(z)=b_0(z)+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{a_k(z)}{b_k(z)}$.

Функціональний неперервний дріб збігається до функції $f(z)$ на множині D, якщо $\forall z\in D\;\exists\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$.

Відомим є розвинення відношення гіпергеометричних функцій Гауса у неперервний дріб, що збігається на всій комплексній площині з розрізом уздовж дійсної осі від 1 до $+\infty$ [9]. Сформулюємо цей результат.

Теорема 1 ([9, теорема 6.1]). Нехай $\{a_n\}$ — послідовність комплексних чисел, що визначаються формулами

$$a_{2n+1}=-\frac{(a+n)(c-b+n)}{(c+2n)(c+2n+1)},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

$$a_{2n}=-\frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)},\quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

де a, b, c — комплексні сталі, причому $a_n\neq 0$, $n=1,2,\ldots$ Тоді

1) правильний *C*-дріб

$$1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\frac{a_n z}{1} \tag{5}$$

збігається до функції $f(z)$, мероморфної в області

$$D=\{z\in\mathbb{C}:0<\arg(z-1)<2\pi\}; \tag{6}$$

2) збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині з області *D*, що не містить полюсів функції $f(z)$;

3) функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$ і $f(0)=1$;

4) для всіх *z* таких, що $|z|<1$, $f(z)=F(a,b;c;z)/F(a,b+1;c+1;z)$ і $f(z)$ є аналітичне продовження функції $F(a,b;c;z)/F(a,b+1,c+1,z)$ у площину з розрізом *D*.

Неперервний дріб (5), коефіцієнти якого визначаються згідно зі співвідношеннями (3), (4), називають *неперервним дробом Гауса*.

Використовуючи *теорему 1*, одержано розвинення гіпергеометричної функції Гауса $F(a,1;c;z)$ у неперервний дріб, що збігається в області (6) [9]. Задача подання неперервним дробом функції Гауса у випадку довільних параметрів на сьогодні залишається відкритою.

2. Побудова розвинення гіпергеометричної функції Гауса $F(a,2,c;z)$ у неперервний дріб

Враховуючи рекурентні співвідношення для гіпергеометричної функції Гауса й алгоритм побудови неперервного дробу Гауса, отримано такий результат.

Теорема 2. Нехай $\{a_n\}$ — послідовність комплексних чисел, що визначаються формулами

$$a_{2n+1}=-\frac{(a+n)(c+n-2)}{(c+2n-1)(c+2n)},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$a_{2n}=-\frac{(n+1)(c-a+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)},\quad n=1,2,\ldots, \tag{8}$$

де $a,c\in\mathbb{C}$ і $c\neq 2,1,0,-1,-2,\ldots$, причому $a_n\neq 0$, $n=1,2,\ldots$ Тоді

1) для всіх z таких, що $|z|<1$,

$$F(a,2;c;z)=\left\{-\frac{(c-a-1)}{(c-1)(c-2)}z+\left[1-\frac{(a-1)}{(c-2)}z\right]\left(1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\frac{a_n z}{1}\right)\right\}^{-1}; \tag{9}$$

2) неперервний дріб у правій частині (9) збігається до функції $f(z)$, мероморфної в області *D*, що визначається згідно зі співвідношенням (6), і $f(z)$ є аналітичне продовження в області *D* функції $F(a,2;c;z)$;

3) функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$ і $f(0) = 1$;

4) неперервний дріб (9) збігається рівномірно на компактних підмножинах із області D.

Доведення. Легко перевірити, що гіпергеометричний ряд (1) задовольняє такі рекурентні співвідношення:

$$F(a,b;c;z)=F(a,b-1;c-1;z)+\frac{a(c-b)}{c(c-1)}zF(a+1,b;c+1;z)\,, \tag{10}$$

$$F(a,b;c;z)=F(a-1,b;c-1;z)+\frac{b(c-a)}{c(c-1)}zF(a,b+1;c+1;z)\,. \tag{11}$$

У співвідношенні (10) виконаємо заміну $a=a'$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, а в формулі (11) — $a=a'+1$, $b=b'+1$ і $c=c'+2$:

$$F\left(a',b';c';z\right)=F\left(a',b'+1;c'+1;z\right)-\frac{a'\left(c'-b'\right)}{c'\left(c'+1\right)}zF\left(a'+1,b'+1;c'+2;z\right), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} F\left(a',b'+1;c'+1;z\right)= \\ F\left(a'+1,b'+1;c'+2;z\right)-\frac{\left(b'+1\right)\left(c'-a'+1\right)}{\left(c'+1\right)\left(c'+2\right)}zF\left(a'+1,b'+2;c'+3;z\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Підставимо рівність (13) у співвідношення (12):

$$\begin{gathered} F\left(a',b';c';z\right)=\left(1-\frac{a'\left(c'-b'\right)}{c'\left(c'+1\right)}z\right)F\left(a'+1,b'+1;c'+2;z\right)- \\ -\frac{\left(b'+1\right)\left(c'-a'+1\right)}{\left(c'+1\right)\left(c'+2\right)}zF\left(a'+1,b'+2;c'+3;z\right). \end{gathered}$$

Поділимо останню рівність на $F\left(a'+1,b'+2;c'+3;z\right)$:

$$\begin{gathered} \frac{F\left(a',b';c';z\right)}{F\left(a'+1,b'+2;c'+3;z\right)}= \\ -\frac{\left(b'+1\right)\left(c'-a'+1\right)}{\left(c'+1\right)\left(c'+2\right)}z+\left(1-\frac{a'\left(c'-b'\right)}{c'\left(c'+1\right)}z\right)\frac{F\left(a'+1,b'+1;c'+2;z\right)}{F\left(a'+1,b'+2;c'+3;z\right)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Поклавши у співвідношенні (14) $b'=0$ і виконавши заміну $a'=a-1$, $b'=b$, $c'=c-3$, отримуємо

$$F(a,2;c;z)=\left[-\frac{(c-a-1)}{(c-1)(c-2)}z+\left(1-\frac{(a-1)}{(c-2)}z\right)\frac{F(a,1;c-1;z)}{F(a,2;c;z)}\right]^{-1}.$$

Використовуючи *теорему 1*, легко показати, що відношення гіпергеометричних функцій Гауса $\dfrac{F(a,1;c-1;z)}{F(a,2;c;z)}$ розвивається у правильний C-дріб $1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n z}{1}$, коефіцієнти якого визначаються формулами (7), (8). Отже, пункт 1 теореми доведено.

Вираз у правій частині формули (9) є раціональна функція. Неважко перевірити, що ця функція у разі $z = 0$ набуває значення, що дорівнює 1, а також, що $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$. Таким чином, пункти 2, 3 та 4 отримуємо як наслідок теореми про рівномірну збіжність послідовності мероморфних у початку координат функцій на кожній компактній підмножині множини, яка не містить полюсів функції, що є її границею [9, теорема 5.13] і теореми про збіжність гранично-періодичного неперервного дробу $1 + \mathrm{D}\frac{a_n z}{1}$ [9, теорема 5.14]. Теорему доведено.

Таким чином, формула (9) реалізує розвинення гіпергеометричної функції $F(a, 2; c; z)$ у неперервний дріб, що містить правильний C-дріб, причому цей вираз збігається до значення функції $F(a, 2; c; z)$ у всій комплексній площині з розрізом уздовж дійсної осі від 1 до $+\infty$.

Із *теореми 2* випливає, що неперервні дроби можна використовувати як наближення гіпергеометричної функції $F(a,2,c;z)$ у необмежених областях.

Розглянемо точку $z = \frac{c-2}{a-1}$, де параметри a, c — довільні комплексні сталі, що задовольняють умови *теореми 2*. Із формули (9) випливає, що

$$F\left(a, 2; c; \frac{c-2}{a-1}\right) = \frac{(a-1)(c-1)}{a+1-c}. \tag{15}$$

Отже, розвинення (9) дало змогу отримати значення $F\left(a,2;c;\frac{c-2}{a-1}\right)$ аналітично.

3. Обчислення значення гіпергеометричної функції $F(a,2;c;z)$ за допомогою гіпергеометричного ряду

Зазвичай, для обчислення значень гіпергеометричної функції Гауса $F(a,b,c;z)$ за межами одиничного круга на практиці використовують інтегральне подання цієї функції у комплексній площині. У цьому випадку потрібні значні обчислювальні та часові затрати. Тому в роботі [8] запропоновано алгоритм, що використовує формули лінійних перетворень у комплексній площині та дозволяє використовувати збіжні степеневі ряди, зменшуючи часові затрати. Запропоновано такі кроки обчислення:

якщо $|z| \le 1/2$, то для обчислення $F(a,2;c;z)$ використовують гіпергеометричний ряд Гауса (1), який досить швидко збігається;

якщо $|z| > 1/2$, то для обчислення $F(a,2;c;z)$ використовують формули лінійного перетворення

$$F(a, 2; c; z) =$$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(2-a)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)^{c-a-1}\left[1-\dfrac{1+a-c}{(a-1)(1-z)}\right]+ \\
+\dfrac{(c-1)(c-2)}{(a-1)(a-2)}(-z)^{-2}F\left(3-c,\,2;3-a;\dfrac{1}{z}\right), \quad \dfrac{1}{|z|}\le\dfrac{1}{2}, \\
\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(2+a-c)}{\Gamma(a)}(1-z)^{c-a-2}z^{2-c}\left(1-\dfrac{(c-2)(z-1)}{(c-a-1)z}\right)+ \\
+\dfrac{(c-1)(c-2)}{(c-a-1)(c-a-2)}F(a,2;3+a-c;1-z), \quad |1-z|\le\dfrac{1}{2}; \\
\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(2-a)}{\Gamma(c-a)}(1-z)^{-a}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^{2-c}\left[1-\dfrac{c-2}{(a-1)z}\right]+ \\
+\dfrac{(c-1)(c-2)}{(a-1)(a-2)}(1-z)^{-2}F\left(c-a,\,2;3-a;\dfrac{1}{1-z}\right), \quad \dfrac{1}{|1-z|}\le\dfrac{1}{2}; \\
\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(2+a-c)}{\Gamma(a)}(1-z)^{c-a-2}z^{a-c}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{a-1}\left[1-\dfrac{(1-a)(1-z)}{c-a-1}\right]+ \\
+\dfrac{(c-1)(c-2)}{(c-a-1)(c-a-2)}z^{-a}F\left(a,1+a-c;3+a-c;1-\dfrac{1}{z}\right), \quad \left|1-\dfrac{1}{z}\right|\le\dfrac{1}{2}; \\
(1-z)^{-2}F\left(c-a,\,2;c;\dfrac{z}{z-1}\right), \quad \left|\dfrac{z}{z-1}\right|\le\dfrac{1}{2}.
\end{cases} \tag{16}
$$

4. Порівняння алгоритмів обчислення значення гіпергеометричної функції $F(a,2;c;z)$

Здійснено експериментальне порівняння описаних у попередніх пунктах алгоритмів обчислення значення функції $F(a,2;c;z)$ у довільній точці комплексної площини. Для таких досліджень створено програму, за допомогою якої обчислювалися значення гіпергеометричної функції $F\left(a,2;c;z\right)$ за заданими значеннями параметрів a, c та змінної z і заданою похибкою чи кількістю ітерацій. Програма реалізує три альтернативні методи обчислення значення гіпергеометричної функції $F(a,2;c;z)$: за допомогою гіпергеометричного ряду Гауса (1), за допомогою виразу, що містить неперервний C-дріб (9) та алгоритму, що використовує формули лінійного перетворення (16). Для кожного із цих методів обчислювалася кількість ітерацій, необхідних для отримання значення функції із заданою точністю, а також — отримано за заданої кількості ітерацій точність (як різницю значень сусідніх підхідних дробів чи значень сусідніх частинних сум гіпергеометричного ряду відповідно). На основі одержаних результатів сформульовано висновки про ефективність кожного із розглянутих методів.

Таблиця 1

Результати обчислення значень функції $F(a,2;c;z)$

Значення параметрів *a, c* та змінної *z*			Кількість ітерацій, необхідна для забезпечення точності 10^{-4}		
a	*c*	*z*	за наближення неперервним дробом Гауса	за наближення рядом Гауса	за наближення за допомогою формул лінійних перетворень і ряду Гауса
– 10	– 4,5	0,3	15	11	11
10	4,5	0,3	5	16	16
– 20,5 – i	10,5 + 10i	0,1 – 0,5i	9	13	38
– 20,5 – i	– 10,5 + 10i	– 0,1 – 0,5i	25	18	51
0,5 – 50i	10,5 + 10i	0,7 – 0,1i	14	125	7
– 7,5	– 10,5	9,5 + 0,5i	8	—	4
– 7,5 – 0,4i	– 10,5 – 200i	9,5 + 0,5i	6	—	46

Таблиця 2

Результати обчислення значення *F*(3, 2; 3,5; 0,75)

Наближення неперервним дробом Гауса	Наближення рядом Гауса	Наближення за допомогою формул лінійних перетворень і ряду Гауса
10,0 10,0	2,28571428571429 3,57142857142857 … 9,99974988521242	8,0 9,28571428571429 … 9,99998653923812
Ітерацій: 2 Похибка: 0	Ітерацій: 41 Похибка: $7{,}9581977867\cdot10^{-5}$	Ітерацій: 11 Похибка: $3{,}46133876902\cdot10^{-5}$

Результати обчислення значень функції $F(a,2;c;z)$ у деяких точках комплексної площини із заданою точністю подано у табл. 1. Результати, подані у табл. 2, ілюструють рівність (15).

Висновки. Під час експериментальних досліджень отримано десятки тисяч результатів, на основі яких сформульовано такі гіпотези:

- для будь-яких значень параметрів a, c у комплексній площині існує нескінченна множина точок z, у яких алгоритм обчислення значення функції $F(a,2;c;z)$ за допомогою неперервного дробу Гауса є ефективніший, ніж алгоритм, що використовує формули лінійного перетворення;
- всередині одиничного круга для багатьох значень параметрів функції $F(a,2;c;z)$ алгоритм обчислення значення функції за допомогою неперервного дробу Гауса має перевагу над алгоритмом, що використовує гіпергеометричний ряд Гауса;
- на ефективність розглянутих алгоритмів обчислення значення функції $F(a,2;c;z)$ суттєво впливають значення параметрів гіпергеометричної функції.

Експериментальні дослідження дають можливість припускати, що обчислення значення гіпергеометричної функції $F(a,2;c;z)$ за допомогою формули (9) є ефективним у використанні.

Література

[1] *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — Москва: Наука, 1979. — 832 с.
[2] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — Москва: Наука, 1973. — 296 с.
[3] *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наукова думка, 1986. — 544 с.
[4] *Виленкин Н.* Я. Специальные функции и теория представлений групп. — Москва: Наука, 1965. — 588 с.
[5] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — Москва-Ленинград: Физматгиз, 1963. — 360 с.
[6] *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. — Москва: Мир, 1980. — 608 с.
[7] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. — Киев: Наукова думка, 1984. — 600 с.
[8] *Чулуунбаатар О.* Математические модели и алгоритмы анализа процессов ионизации атома гелия и молекул водорода с вариационными функциями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика (3[10]). — 2008. — С. 47-64.
[9] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: пер. с англ. — Москва: Мир, 1985. — 414 с.
[10] *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. — New York: van Nostrand, 1948. — 433 p.
[11] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and applications. — New York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Hoorwood, 1976. — 376 p.
[12] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. — Amsterdam: North-Holland, 1992. — 606 p.
[13] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions. Vol. 1: Convergence Theory. Atlantic Studies in Mathematics for Engineering and Science Series. Editor: C.K. Chui. — Atlantis Press World Scientific, Amsterdam, Paris, 2008. — 308 p.
[14] *Gil A., Segura J., Temme N. M.* Numerical Methods for Special Functions. — Philadelphia: SIAM, 2007. — 417 p.
[15] Handbook of Continued Fractions for Special Functions / *A. Cuyt, V. B. Petersen, B. Verdonk et al.* — Berlin: Springer, 2008. — 431 p.

[16] *Backeljauw F., Becuwe S., Cuyt A.* Validated Evaluation of Special Mathematical Functions // Lecture Notes in Computer Science. — 2008. — Vol. 5144. — P. 206-216.
[17] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — Москва: Наука, 1969. — 576 с.

Value calculation algorithms of a hypergeometric Gaussian function in the complex plane

Olexandra Manziy, Volodymyr Hladun, Viktor Pabyrivskyi, Oksana Ukhanska

Using continuous fractions, an algorithm of expansion for the hypergeometric function $F(a,2;c;z)$ is created in a domain wider than the convergence domain of hypergeometric series. The convergence of the obtained expansion (series) to a function which is the analytic extension of the hypergeometric Gaussian series $F(a,2;c;z)$ has been proved for the whole complex plane with a slit along the real axis from 1 to $+\infty$. Comparative analysis of the hypergeometric function $F(a,2;c;z)$ value calculation with the help of continuous fraction algorithm and the algorithm which uses a combination of G-functions and hypergeometric series is carried out.

Алгоритмы вычисления значения некоторой гипергеометрической функции Гаусса в комплексной плоскости

Александра Манзий, Владимир Гладун, Виктор Пабыривский, Оксана Уханская

Используя непрерывные дроби, построен алгоритм разложения гипергеометрической функции $F(a,2;c;z)$ в области более широкой по сравнению с областью сходимости гипергеометрического ряда. Доказана сходимость полученного разложения к функции, которая является аналитическим продолжением гипергеометрического ряда Гаусса $F(a,2;c;z)$ во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 к $+\infty$. Осуществлен сравнительный анализ алгоритма вычисления значения гипергеометрической функции $F(a,2;c;z)$ с помощью непрерывной дроби и алгоритма, который использует комбинацию Г-*функций и гипергеометрических рядов.*

Представлено професором П. Костробієм

Отримано 27.02.14