УДК 539.3

Моделювання стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного термопружного тіла

Тарас Нагірний[1], Юлія Сеник[2], Костянтин Червінка[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Зеленогурський університет, вул. професора Шафрана, 4, Польща, 65-516, e-mail: t.nahirnyj@gmail.com
[2] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: yuliya.senik@gmail.com
[3] к. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: k.tchervinka@gmail.com

У рамках локально градієнтного підходу в термомеханіці сформульовано ключові системи рівнянь для вивчення рівноважного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітнітного твердого тіла. Довільно виокремлена підобласть тіла розглядається як термодинамічно відкрита система, що може обмінюватися з оточенням масою. Прийнято, що такий обмін відбувається раптово у початковий момент часу, коли миттєво встановлюється структура тіла. Для узгодження актуального та відлікового стану у розгляд введено джерела маси, які пов'язано зі способом формування поверхні тіла.

Ключові слова: локально градієнтний підхід у термомеханіці, структурна неоднорідність, електропровідне неферомагнітне тверде тіло.

Вступ. Одним із головних завдань механіки деформівного твердого тіла є прогнозування деформаційних, міцнісних та інших експлуатаційних параметрів реальних елементів конструкцій і приладів, які, зазвичай, перебувають в умовах інтенсивної зовнішньої дії. Таке прогнозування базується на математичних моделях, які повинні достатньо повно враховувати властивості та структуру матеріалу, а також природу процесів. Врахування структурної (локальної) неоднорідності є особливо важливим у зв'язку з широким використанням в інженерній практиці тонких плівок, волокон та інших наноелементів. Такі елементи характеризуються співвимірністю вкладів об'ємного та поверхневого факторів у внутрішній енергії, що, зазвичай, пов'язується з суттєвою неоднорідністю структури [1-4].

Одним із підходів, які зорієнтовані на врахування поверхневого фактору, є локально градієнтний підхід у термомеханіці. Моделі, побудовані в рамках цього підходу, враховують неоднорідність (мікроструктуру) матеріалу й описують різноманітні розмірні ефекти. У роботах [5-10] та інших подано базові співвідношення таких моделей і за лінеаризованого наближення вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності, у термопружних, електропровідних неферомагнітних тілах і твердих розчинах. У згаданих роботах на поверхні тіла задавалося постійне значення хімічного потенціалу (параметра спряженого до густини). Однак таке формулювання граничної умови накладає суттєві обмеження на використання моделей і фактично не дозволяє коректно описувати розмірні ефекти. У роботі [11] запропоновано граничну умову на густину, а її відмінність від відлікового значення пов’язано з шорсткістю реальної поверхні тіла, тобто її геометричною неоднорідністю. У працях [12, 13] вказано на «приповерхневий дефект маси» у таких моделях і подано узагальнення з метою його усунення. У розгляд введено джерела маси, що відповідають способу формування поверхні.

У цій роботі сформульовано ключову систему рівнянь для вивчення стаціонарного стану електропровідного неферомагнітного локально неоднорідного термопружного тіла з урахуванням неоднорідності реальної поверхні тіла.

1. Базові співвідношення

Розглядаємо деформівне електропровідне неферомагнітне тверде тіло, що перебуває в умовах тепломасообміну із зовнішнім середовищем. За базові процеси, які відбуваються у тілі, приймаємо процеси деформування, тепло-, масо- й електропровідності.

Рівняння збереження енергії E, записане у локальній формі за нехтування конвективним складником потоків, має вигляд

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s - H\vec{j}_m - \phi\vec{j}_\omega - \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \right) + \sigma_E , \tag{1}$$

де $\hat{\sigma}$ — тензор напруження Коші; $\vec{v}$ — вектор швидкості; T, H, ϕ — температура, хімічний і термодинамічний електричний потенціали; $\vec{j}_s, \vec{j}_m, \vec{j}_\omega$ — вектори потоків ентропії, маси та заряду; $\vec{E}, \vec{B}$ — вектори напруженості електричного та індукції магнітного полів; σ_E — виробництво енергії; τ — час; μ_0 — магнітна стала.

Приймаємо, що повну енергію E можна подати у вигляді суми внутрішньої U та кінетичної K енергій, а також енергії U_e електромагнітного поля [14]

$$E = U + K + U_e . \tag{2}$$

Поряд із рівнянням (1) повинні справджуватися рівняння балансу енергії електромагнітного поля

$$U_e = \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2 \right) \Big/ 2 , \tag{3}$$

імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$, ентропії S, маси та заряду ω, а також рівняння Максвела [1]. У локальній формі записуємо їх у вигляді

$$\frac{\partial U_e}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) - \left(\vec{j}_\omega + \omega \vec{v} \right) \cdot \vec{E} ,$$

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_e , \qquad \frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \sigma_s ,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m=\sigma_m\,,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\omega=0\,, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial\tau},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial\tau}+\mu_0\left(\vec{j}_\omega+\omega\vec{v}\right),$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\omega\,. \tag{5}$$

Тут $\vec{F}_e$ — пондеромоторна сила, для якої справедливо [14]

$$\vec{F}_e=\left(\vec{j}_\omega+\omega\vec{v}\right)\times\vec{B}+\omega\vec{E}\,, \tag{6}$$

ρ — густина; $\sigma_m=\sigma_E/H$ — «джерела» маси; $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$ — вектор напруженості магнітного поля, ε_0 — діелектрична проникність. Зазначимо також, що рівняння для електромагнітного поля записано в наближенні повільно рухомих середовищ, коли швидкість $\vec{v}$ значно менша за швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

Враховуючи співвідношення (3)-(6), а також співвідношення для приросту кінетичної енергії, з рівняння балансу повної енергії (1) одержуємо

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}=T\frac{\partial S}{\partial\tau}+H\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\phi\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\hat{\sigma}:\frac{\partial\hat{e}}{\partial\tau}-$$
$$-T\sigma_s-\vec{\nabla}T\cdot\vec{j}_s-\vec{\nabla}H\cdot\vec{j}_m-\left(\vec{\nabla}\phi-\vec{E}'\right)\cdot\vec{j}_\omega, \tag{7}$$

де

$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\,. \tag{8}$$

Для потоку маси приймаємо подання

$$\vec{j}_m=-g_{mm}\frac{\partial\left(\vec{\nabla}H\right)}{\partial\tau}, \tag{9}$$

яке відповідає раптовому виникненню у початковий момент часу структури матеріалу [5, 8, 9, 15].

Враховуючи це співвідношення у формулі (7), записуємо

$$\frac{\partial G}{\partial\tau}=T\frac{\partial S}{\partial\tau}+H\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\phi\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\hat{\sigma}:\frac{\partial\hat{e}}{\partial\tau}-T\sigma_s-\vec{\nabla}T\cdot\vec{j}_s-\left(\vec{\nabla}\phi-\vec{E}'\right)\cdot\vec{j}_\omega\,. \tag{10}$$

Тут

$$G=U-\frac{g_{mm}}{2}\vec{\nabla}H\cdot\vec{\nabla}H\,.$$

Приймаючи для виробництва ентропії класичний для електропровідного тіла вираз [14, 16]

$$\sigma_s=-\frac{\vec{\nabla}T}{T}\cdot\vec{j}_s-\frac{\vec{\nabla}\phi-\vec{E}'}{T}\cdot\vec{j}_\omega \tag{11}$$

на основі принципу Онзагера записуємо такі кінетичні рівняння моделі

$$\vec{j}_s = -\lambda_{ss}\frac{\vec{\nabla}T}{T} - \lambda_{s\omega}\frac{\vec{\nabla}\phi - \vec{E}'}{T}, \qquad \vec{j}_\omega = -\lambda_{\omega s}\frac{\vec{\nabla}T}{T} - \lambda_{\omega\omega}\frac{\vec{\nabla}\phi - \vec{E}'}{T}. \qquad (12)$$

Із співвідношень (9), (10) слідує, що простором визначення енергії G є ентропія S, густина ρ, електричний заряд ω та тензор деформації $\hat{e}$

$$G = G\left(S, \rho, \omega, \hat{e}\right),$$

а для її приросту справджується таке рівняння Гіббса

$$dG = T\,dS + H\,d\rho + \phi\,d\omega + \hat{\sigma} : d\hat{e}.$$

Якщо за термодинамічний потенціал вибрати енергію F, яка пов'язана з енергією G співвідношенням Лежандра

$$F = G - TS - \phi\omega,$$

то рівняння її приросту має вигляд

$$dF = -S\,dT + Hd\rho - \omega\,d\phi + \hat{\sigma} : d\hat{e}, \qquad (13)$$

а простором її визначення є температура T, густина ρ, термодинамічний електричний потенціал ϕ та тензор деформації $\hat{e}$

$$F = F\left(T, \rho, \phi, \hat{e}\right).$$

Наслідком формули (13), за потенціального опису, є такі рівняння стану для $S, H, \omega, \hat{\sigma}$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad H = \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \omega = -\frac{\partial F}{\partial \phi}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{e}}. \qquad (14)$$

Подальшу конкретизацію моделі пов'язано з конкретизацією рівнянь стану та відлікового стану. За відліковий стан приймаємо стан однорідного електронейтрального ізотропного тіла, вільного від силового навантаження, з параметрами

$$T = T_*, \quad S = S_*, \quad H = H_*, \quad \rho = \rho_*, \quad \phi = 0, \quad \omega = 0, \quad \hat{e} = 0, \quad \hat{\sigma} = 0.$$

Приймемо енергію F квадратичною функцією у просторі збурень базових параметрів стану

$$\theta = T - T_*, \quad \rho - \rho_*, \quad \hat{e} = \hat{e} - 0, \quad \phi = \phi - 0, \qquad (15)$$

тобто

$$F = F_* - S_*\theta + H_*\left(\rho - \rho_*\right) + \frac{1}{2}\lambda e^2 + \mu\hat{e} : \hat{e} - \left(3\lambda + 2\mu\right)a_t e\theta -$$
$$-\left(3\lambda + 2\mu\right)a_m e\left(\rho - \rho_*\right) - \left(3\lambda + 2\mu\right)a_\omega \phi e + \frac{1}{2}\alpha_{mm}\left(\rho - \rho_*\right)^2 + \alpha_{mt}\left(\rho - \rho_*\right)\theta +$$
$$+\alpha_{m\omega}\left(\rho - \rho_*\right)\phi - \frac{c_v}{2T_*}\theta^2 + \alpha_{t\omega}\theta\phi + \frac{1}{2}\alpha_{\omega\omega}\phi^2, \qquad (16)$$

де $\lambda, \mu, a_i, \alpha_{ij}, c_v$ — характеристики матеріалу $i, j = \{t, m, \omega\}$; $e = \hat{e} : \hat{I}$, $\hat{I}$ — одиничний тензор.

Слід зазначити, що таке подання для енергії F відповідає малим збуренням густини щодо відлікового стану, тобто $|\rho - \rho_*| / \rho_* << 1$. Якщо ж залежність від густини є істотна, то у поданні (16) необхідно було б враховувати вищі порядки стосовно густини. Це можна досягнути також постулюванням залежності від густини коефіцієнтів у поданні (16).

Сформульована вище система рівнянь, яка складається з рівнянь балансу, імпульсу, ентропії, маси, заряду, виразу для виробництва ентропії, рівнянь Максвела та стану, формули для імпульсу механічного поступального руху

$$\vec{k}_v = \rho \vec{v} ,$$

а також співвідношення Коші для тензора деформації

$$\hat{e} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \right)^{\mathrm{T}} \right]$$

є повною системою рівнянь моделі локально неоднорідного електропровідного нефеpомагнітного термопружного тіла. Тут $\vec{u}$ — вектор переміщення, «$\otimes$» — символ діадного добутку, символом «Т» відзначено транспонування.

Подання (9) змінює рівняння балансу маси до вигляду

$$-g_{mm} \nabla^2 H + \rho - \rho_* = d_{\sigma m} , \tag{17}$$

де $d_{\sigma m} = \int_{-\infty}^{\tau} \sigma_m \, d\tau$.

Зазначимо, що джерела маси введено з метою коректного опису приповерхневої неоднорідності густини. Вони повинні справджувати співвідношення

$$\int\limits_{(V)} \left(\rho - \rho_* \right) dV = \int\limits_{(V)} d_{\sigma m} \, dV . \tag{18}$$

Тут (V) — область, яку займає розглядуване тіло. При цьому параметри розподілу джерел необхідно пов’язати зі способом формування поверхні тіла.

2. Тіла з мікроструктурою. Рівноважний стан

Розглянемо наближення, коли збурення густини стосовно відлікового значення є мале, тобто $|\rho - \rho_*| / \rho_* << 1$, яке відповідає врахуванню мікроструктури матеріалу. Тоді можна вважати, що характеристики у поданні (16) є сталі. На основі співвідношень (14), (16) записуємо такий явний вигляд рівнянь стану

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{e} + \left\{ \lambda e - \left(3\lambda + 2\mu \right) \left[a_m \left(\rho - \rho_* \right) + a_t \theta + a_\omega \phi \right] \right\} \hat{I} ,$$

$$S = S_* + \left(3\lambda + 2\mu \right) a_t e - \alpha_{mt} \left(\rho - \rho_* \right) - \alpha_{t\omega} \phi + \frac{c_v}{T_*} \theta ,$$

$$H = H_* - (3\lambda + 2\mu) a_m e + \alpha_{mm} (\rho - \rho_*) + \alpha_{mt} \theta + \alpha_{m\omega} \phi ,$$
$$\omega = (3\lambda + 2\mu) a_\omega e - \alpha_{t\omega} \theta - \alpha_{m\omega} (\rho - \rho_*) - \alpha_{\omega\omega} \phi . \tag{19}$$

Приймаючи за ключові функції вектор переміщень $\vec{u}$, термодинамічний електричний потенціал ϕ, збурення температури θ та густини $\rho - \rho_*$, для опису стаціонарного стану записуємо таку лінійну систему рівнянь

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (3\lambda + 2\mu) \left[a_m \vec{\nabla} (\rho - \rho_*) + a_t \vec{\nabla} \theta + a_\omega \vec{\nabla} \phi \right] = 0 ,$$
$$\lambda_{ss} \nabla^2 \theta + \lambda_{s\omega} \nabla^2 \phi + \frac{\lambda_{s\omega}}{\varepsilon_0} \left[(3\lambda + 2\mu) a_\omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \alpha_{t\omega} \theta - \alpha_{m\omega} (\rho - \rho_*) - \alpha_{\omega\omega} \phi \right] = 0 ,$$
$$\alpha_{mm} \nabla^2 (\rho - \rho_*) + \alpha_{mt} \nabla^2 \theta + \alpha_{m\omega} \nabla^2 \phi - (3\lambda + 2\mu) a_m \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) -$$
$$- \frac{1}{g_{mm}} (\rho - \rho_*) = - \frac{1}{g_{mm}} d_{\sigma m} ,$$
$$\lambda_{\omega s} \nabla^2 \theta + \lambda_{\omega\omega} \nabla^2 \phi - \frac{\lambda_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \left[(3\lambda + 2\mu) a_\omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \alpha_{t\omega} \theta - \alpha_{m\omega} (\rho - \rho_*) - \alpha_{\omega\omega} \phi \right] = 0 . \tag{20}$$

До цієї системи рівнянь поряд зі співвідношенням (18) необхідно приєднати також умову електронейтральності тіла

$$\int\limits_{(V)} \omega \, dV = 0 . \tag{21}$$

Якщо подіяти оператором div на перше рівняння системи (20), то внаслідок цього одержуємо

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (3\lambda + 2\mu) \left[a_m \nabla^2 (\rho - \rho_*) + a_t \nabla^2 \theta + a_\omega \nabla^2 \phi \right] = 0 .$$

Використовуючи це співвідношення, третє рівняння системи (20) перетворюємо до вигляду

$$\left(\alpha_{mm} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 a_m^2}{\lambda + 2\mu} \right) \nabla^2 (\rho - \rho_*) + \left(\alpha_{mt} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 a_m a_t}{\lambda + 2\mu} \right) \nabla^2 \theta +$$
$$+ \left(\alpha_{m\omega} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 a_m a_\omega}{\lambda + 2\mu} \right) \nabla^2 \phi - \frac{1}{g_{mm}} (\rho - \rho_*) = - \frac{1}{g_{mm}} d_{\sigma m} . \tag{22}$$

3. Електропровідне неферомагнітне пружне тіло

Якщо знехтувати впливом температури на термодинамічний електричний потенціал і механічні поля, то для вивчення стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного пружного тіла маємо таку систему рівнянь

$$\mu\nabla^2\vec{u}+(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)-(3\lambda+2\mu)\left[a_m\vec{\nabla}(\rho-\rho_*)+a_\omega\vec{\nabla}\phi\right]=0\,,$$

$$\left[\alpha_{mm}-\frac{(3\lambda+2\mu)^2a_m^2}{\lambda+2\mu}\right]\nabla^2(\rho-\rho_*)+\left[\alpha_{m\omega}-\frac{(3\lambda+2\mu)^2a_ma_\omega}{\lambda+2\mu}\right]\nabla^2\phi-$$

$$-\frac{1}{g_{mm}}(\rho-\rho_*)=-\frac{1}{g_{mm}}d_{\sigma m}\,,$$

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{\varepsilon_0}\left[(3\lambda+2\mu)a_\omega\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\alpha_{m\omega}(\rho-\rho_*)-\alpha_{\omega\omega}\phi\right]=0\,, \tag{23}$$

до якої необхідно приєднати умови (16), (19).

Якщо за визначальні функції вибрати тензор напружень $\hat{\sigma}$, збурення густини $\rho-\rho_*$ та термодинамічний електричний потенціал ϕ, то ключова система рівнянь моделі є така

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}=0\,,$$

$$\vec{\nabla}\times\left\{\frac{1}{2\mu}\hat{\sigma}-\left[\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma-a_m(\rho-\rho_*)-a_\omega\phi\right]\hat{I}\right\}\times\vec{\nabla}=0\,,$$

$$\nabla^2\phi+\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\left[\alpha_{\omega\omega}-3(3\lambda+2\mu)a_\omega^2\right]\phi+\left[\alpha_{m\omega}-3(3\lambda+2\mu)a_\omega a_m\right](\rho-\rho_*)-a_\omega\sigma\right\}=0\,,$$

$$\left(\alpha_{mm}-\frac{(3\lambda+2\mu)^2a_m^2}{\lambda+2\mu}\right)\nabla^2(\rho-\rho_*)+\left(\alpha_{m\omega}-\frac{(3\lambda+2\mu)^2a_ma_\omega}{\lambda+2\mu}\right)\nabla^2\phi-$$

$$-\frac{1}{g_{mm}}(\rho-\rho_*)=-\frac{1}{g_{mm}}d_{\sigma m}\,. \tag{24}$$

Як і раніше до цієї системи рівнянь необхідно приєднати умови (18), (21).

Аналізуючи системи рівнянь (22), (24) бачимо, що у разі нехтування впливом деформації та напружень на термодинамічний електричний потенціал, дослідження рівноважного стану електропровідного неферомагнітного пружного тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі взаємозв'язаної системи рівнянь і подальшого вивчення напружено-деформованого стану. Якщо ж додатково знехтувати впливом термодинамічного електричного потенціалу на густину, то вивчення рівноважного стану тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі неоднорідних рівнянь Гельмгольца за подальшого визначення напружено-деформованого стану.

На завершення зазначимо, що умова (21) за відомих параметрів моделі дозволяє визначити значення термодинамічного електричного потенціалу, який встановлюється на поверхні тіла.

Висновки. Із використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів сформульовано систему рівнянь, яка описує стаціонарний стан електропровідного неферомагнітного термопружного твердого тіла. У моделі враховано, що структура матеріалу та приповерхнева неоднорідність густини раптово виникають у початковий момент часу. Виникнення структури матеріалу враховано шляхом постулювання необоротного складника вектора потоку маси. Джерела маси дозволяють коректно врахувати «приповерхневий дефект маси», властивий відомим моделям, побудованим за локально градієнтного підходу у термомеханіці. У разі нехтування впливом деформації та напружень на термодинамічний електричний потенціал, дослідження рівноважного стану електропровідного неферомагнітного пружного тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі взаємозв'язаної системи рівнянь і подальшого вивчення напружено-деформованого стану.

Література

[1] *Непийко С. А.* Физические свойства малых металлических частиц. — Киев: Наук. думка, 1985. — 246 с.
[2] *Cleland A. N.* Foundations of Nanomechanics from Solid-State Theory to Device Applications. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. — 436 p.
[3] *Shaofan Li, Xin-Lin Gao.* Handbook of Micromechanics and Nanomechanics. — CRC Press, 2013. — 1256 p.
[4] *Gubicza J.* Defect structure in nanomaterials. — Cambridge: Woodhead Publishing, 2012. — 358 p.
[5] *Бурак Я. И., Нагирный Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3-23.
[6] Фізико-математичне моделювання складних систем */ Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний* та ін.; під ред. *Я. Бурака, Є. Чаплі.* — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
[7] *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Interface Phenomena and Interaction Energy at the Surface of Electroconductive Solids // Computational Methods in Science and Technology. — 2008. — Vol. 14(2). — P. 105-110.
[8] *Нагірний Т., Червінка К.* Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки І. — Львів: Сполом, 2012. — 264 с.
[9] *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Structural inhomogeneity and size effects in thermoelastic solids // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. — 2013. — Vol. 1, No 2. — P. 216-223.
[10] *Burak Y., Nahirnyj T., Tchervinka K.* Local Gradient Thermomechanics. Encyclopedia of Thermal Stresses; ed. *R. B. Hetnarski*. — Springer, 2014. — P. 2794-2801.
[11] *Нагірний Т. С., Червінка К. А., Бойко З. В.* До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 199-206.
[12] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* До опису рівноважного стану електропровідного неферомагнітного локально неоднорідного твердого тіла / I Міжнар. XX Всеукр. Наук. Конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», Львів, 7-9 квітня 2014 р. — С. 110-111.
[13] *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical Modeling of Structural and Near-Surface Non-Homogeneities in Thermoelastic Thin Films / Int. J. Solids Struct. (у друці)
[14] *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — Київ: Наукова думка, 1978. — 229 с.
[15] *Нагірний Т. С.* До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища // ДАН України. — 1992. — № 2. — С. 49-53.
[16] *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.* Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з врахуванням електромагнітних процесів // Вісник АН УРСР. — 1970. — № 12. — С. 18-31.

Modelling of steady state of locally non-homogeneous electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid

Taras Nahirnyj, Yuliya Senyk, Kostiantyn Tchervinka

Within the local gradient approach, in therms of mechanics there is formulated a key set of equations for studying the locally non-homogeneous electroconductive non-ferromagnetic solid steady state. An arbitrary chosen subdomain within the body is considered as a thermodynamically open system that can share mass with its environment. It is assumed that such exchange occurs suddenly at the initial time when body structure originates instantly. For the actual and reference body state agreement, the mass sources are introduced which are related to the method of forming the body surface.

Моделирование стационарного состояния локально неоднородного электропроводящего неферромагнитного термоупругого тела

Тарас Нагирный, Юлия Сеньк, Константин Червинка

В рамках локально градиентного подхода в термомеханике сформулированы ключевые системы уравнений для изучения равновесного состояния локально неоднородного электропроводного неферромагнитнитного твердого тела. Произвольно выделенная подобласть тела рассматривается как термодинамически открытая система, которая может обмениваться массой с окружением. Принято, что такой обмен происходит внезапно в начальный момент времени, когда мгновенно устанавливается структура тела. Для согласования актуального и отсчетного состояний в рассмотрение введены источники массы, которые связаны со способом формирования поверхности тела.

Отримано 23.04.14