

Про підсумовування асимптотичних доданків у розв'язках задач дифузії

Юрій Білушак¹, Євген Чапля², Ольга Чернуха³

¹ к. т. н., м. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: bil@cmm.lviv.ua

² д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів; Інститут механіки середовища і прикладної інформатики Університету Казимира Великого в Бидгощі, вул. Коперніка, 1, Бидгощ, 85-064, Польща, e-mail: chaplia@cmm.lviv.ua

³ д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: cher@cmm.lviv.ua

Робота стосується проблеми підсумовування асимптотичних доданків розв'язків крайових задач дифузії, отриманих у вигляді тригонометричних рядів Фур'є. Показано доцільність виділення у такого типу розв'язках лінійних складників та асимптотичних доданків, які можуть бути обчислені аналітично. Встановлено, що час обчислень розв'язків не залежить від безрозмірних значень часу протікання процесу дифузії та товщини шару. Час обрахунку розв'язків у вигляді ряду Фур'є зростає пропорційно до кількості розбиттів проміжку.

Ключові слова: дифузія, ряд Фур'є, асимптотичний доданок.

Вступ. Під час математичного та комп'ютерного моделювання процесів перенесення тепла, маси та заряду часто застосовуються методи інтегральних перетворень для побудови аналітичного розв'язку відповідної крайової задачі або частини комплексних аналітико-числових підходів. У результаті шукані розв'язки крайових задач отримують у вигляді розкладів у ряди, причому в багатьох випадках вони є повільно збіжними, осцилюючими або навіть розбіжними. Тоді застосовують асимптотичні методи, такі як методи Лапласа, метод стаціонарної фази, перевалу, приграничного шару [1, 2], різноманітні варіанти методу осереднення, методи багатомасштабних розкладів тощо [3]. Приклад побудови асимптот деяких рядів із використанням формули Стірлінга та методу послідовних асимптотик на основі теореми Штольца наведено в роботах [4, 5].

Для знаходження суми тригонометричних рядів Фур'є [6], в тому числі повільно збіжних, розроблені методи лінійного підсумовування [7], метод контурних інтегралів або інтегральних перетворень [8]. Аналітичне підсумовування збіжного ряду можливе у випадку, якщо сума ряду виражається функціонально у замкненому вигляді. Інакше використовують числове підсумовування рядів, попередньо пришвидшуючи збіжність і перетворюючи у числовий ряд [8].

У цій роботі для задач дифузії розпадних частинок проведено порівняльний аналіз розв'язків, поданих у вигляді повільно збіжного тригонометричного

ряду Фур'є, та запропоновано підсумовування асимптотичних доданків внаслідок виділення повільно збіжної частини ряду.

1. Формулювання задачі та її розв'язання

Розглянемо характерні проблеми підсумовування асимптотичних виразів у розв'язках крайових задач переносу (диференціальні рівняння параболічного типу або безтипні) домішкової речовини в шарі товщини z_0 , яка супроводжується розпадом мігруючих частинок за крайових умов I-го роду. Рівняння дифузії розпадної речовини в одновимірному за просторовою координатою випадку у безрозмірних змінних [9] $\tau = \lambda t$; $\xi = (\lambda/D)^{1/2} z$ має вигляд [10]

$$\frac{\partial c(\xi, \tau)}{\partial \tau} = d \frac{\partial^2 c(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \lambda c(\xi, \tau), \quad (1)$$

де $c(z, t)$ — концентрація розпадної домішкової речовини, D — коефіцієнт дифузії, λ — коефіцієнт інтенсивності розпаду частинок. Оскільки коефіцієнт λ має розмірність $[c^{-1}]$, то можемо ввести «природну» безрозмірну форму [9].

Зазначимо, що тут $d \equiv 1$, $\lambda \equiv 1$, проте це рівняння записано у загальному вигляді (3) для застосування отриманих у подальшому результатів і в розмірній формі.

Приймаємо такі крайові умови

$$c(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad c(\xi, \tau)|_{\xi=0} = c_0 \equiv const, \quad c(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (2)$$

Тут $\xi_0 = (\lambda/D)^{1/2} z_0$ — безрозмірна товщина шару.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) знаходимо за допомогою інтегральних перетворень Лапласа за часом і скінченного \sin -перетворення Фур'є [11]. У результаті отримаємо

$$c(\xi, \tau) = c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + 2c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(y_k \xi)}{k\pi} \left[\frac{\lambda}{dy_k^2 + \lambda} - \frac{dy_k^2}{dy_k^2 + \lambda} e^{-(dy_k^2 + \lambda)\tau} \right]. \quad (3)$$

В отриманому виразі можна просумувати доданок $2c_0 \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(y_k \xi)}{k\pi(dy_k^2 + \lambda)}$,

використовуючи відомі формули сумування рядів [12]

$$2c_0 \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(y_k \xi)}{k\pi(dy_k^2 + \lambda)} = c_0 \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta\xi_0)} \right\}, \quad (4)$$

де $\eta = \sqrt{\lambda/d}$.

Одержимо остаточний вираз для концентрації розпадної речовини, яка дифундує в шарі у вигляді

$$\frac{1}{c_0} c(\xi, \tau) = 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta\xi_0)} \right\} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(y_k \xi)}{k\pi(dy_k^2 + \lambda)} e^{-(dy_k^2 + \lambda)\tau} \quad (5)$$

Зауважимо появу доданка виду (4) в асимптотичній частині розв'язку для концентрації домішкових частинок, що розпадаються.

2. Комп'ютерне дослідження асимптотичного доданку

Асимптотична частина $2c_0\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \sin(y_k \xi) / [k\pi(dy_k^2 + \lambda)]$ у тригонометричному ряді

вигляду (3) є власне повільно збіжною, і під час комп'ютерних обчислень виконується велика кількість обрахункових операцій, що, своєю чергою, призводить до накопичення похибок, втрати точності, значного (стрибокподібного) збільшення часу розрахунку відповідних формул. Тому було проведено дослідження різних способів обчислення концентрації за формулами (3) і (5). При цьому приймаємо, що підсумовування рядів у виразах (3) і (5) припиняється за умови [13]

$$\frac{|a_{n+1} - a_n|}{|a_n|} < \varepsilon,$$

де a_n — n -ий член збіжного ряду, ε — задана точність обчислень ряду.

У табл. 1 наведено час обчислень $t_{обч}$ виразів у вигляді розкладу в ряд Фур'є (3) та з підсумовуванням асимптотичного доданку (5) для різних значень ε у шарі завтовшки $\xi_0 = 10$ та розбитті $n = 30$ відрізка $[0; \xi_0]$. Рис. 1 ілюструє зростання часу обчислення $t_{обч}$ (у секундах) виразу для концентрації (3), подану

Таблиця 1
Часи розрахунку концентрації $c(\xi, \tau)/c_0$,
обчисленої за формулою (3) і (5)

ε	час обчислення $c(\xi, \tau)/c_0$ за формулою (5)	час обчислення $c(\xi, \tau)/c_0$ у вигляді ряду Фур'є (3)
10^{-3}	0,2 с	24 с
10^{-4}	0,2 с	1 хв. 28 с
10^{-5}	0,2 с	1 хв. 42 с
10^{-6}	0,2 с	1 хв. 46 с
10^{-7}	0,2 с	3 хв. 08 с
10^{-8}	0,2 с	20 хв. 20 с
10^{-9}	0,3 с	1 год. 05 хв. 28 с
10^{-10}	0,3 с	3 год. 28 хв. 39 с

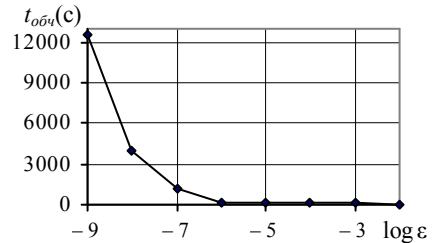


Рис. 1. Графік залежності часу розрахунку концентрації (3) від $\log \varepsilon$

Таблиця 2

Час обчислень $c(\xi, \tau)/c_0$ у вигляді ряду Фур'є (3)
 залежно від кількості розбиттів проміжку $[0; \xi_0]$

Кількість розбиттів n	Час виконання програми $t_{обч}$
1000	1 год. 31 хв.
500	44 хв.
100	8 хв. 6 с
50	4 хв. 40 с
30	3 хв. 10 с
20	2 хв. 15 с

у вигляді ряду Фур'є (остання колонка табл. 1), залежно від заданої точності обчислень ряду (в логарифмічній шкалі).

Зазначимо, що час обчислень рядів $t_{обч}$ не залежить від значень безрозмірного часу τ і безрозмірної товщини шару ξ_0 . Зважаючи на малий час обрахунку формули (5), на значення $t_{обч}$ також практично не впливає кількість розбиття n проміжку $[0; \xi_0]$. А час обрахунку $t_{обч}$ формули (3) зростає пропорційно до кількості розбиттів цього проміжку, що показано в табл. 2.

Для більшості значень параметрів задачі спостерігається добре співпадіння значень концентрації, обчисленої у вигляді ряду Фур'є та з підсумовуванням асимптотичних доданків. Проте для малих часових інтервалів протікання процесу дифузії спостерігається значна розбіжність у розрахункових значеннях функцій $c(\xi, \tau)/c_0$ за формулами у вигляді розкладу в ряд Фур'є (3) та з підсумовуванням асимптотичних доданків (5) у приповерхневих областях тіла в околі дії джерела маси. У табл. 3 наведено розрахункові дані функції концентрації $c(\xi, \tau)/c_0$, обчислені за формулами (3) та (5), на різних глибинах ξ у моменти часу $\tau = 0,00001$ та $\tau = 0,00005$ із точністю розрахунку ряду $\varepsilon = 10^{-10}$. Тут значну розбіжність даних замарковано сірим для товщини $\xi_0 = 100$ і чорним для $\xi_0 = 10$.

На рис. 2 проілюстровано розбіжність між розрахунковими значеннями функції $c(\xi, \tau)/c_0$ за формулами у вигляді розкладу в ряд Фур'є (3) (крива 1) та з підсумовуванням асимптотичних доданків (5) (крива 2) у приповерхневій області $\xi \in [0; 2,4 \cdot 10^{-2}]$ у моменти безрозмірного часу $\tau = 0,00001$ (рис. 2а) та $\tau = 0,00005$ (рис. 2б) з точністю сумування ряду $\varepsilon = 10^{-10}$ у шарі товщиною $\xi_0 = 100$.

Таблиця 3

Значення концентрації $c(\xi, \tau)/c_0$ в околі поверхні шару при $\xi_0 = 100$ та $\xi_0 = 10$

$\xi\tau$	$c(\xi, \tau)/c_0$ за формулою (5)		$c(\xi, \tau)/c_0$ у вигляді ряду Фур'є		$c(\xi, \tau)/c_0$ за формулою (5)		$c(\xi, \tau)/c_0$ у вигляді ряду Фур'є	
	$\tau = 0,00001$							
	$\xi_0 = 100$	$\xi_0 = 10$	$\xi_0 = 100$	$\xi_0 = 10$	$\xi_0 = 100$	$\xi_0 = 10$	$\xi_0 = 100$	$\xi_0 = 10$
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1
0,001	0,98870653	0,99884773	0,82306193	0,982160072	0,99239494	0,99202099	0,92034080	0,99202089
0,002	0,97765366	0,99769548	0,65471892	0,96432907	0,98483067	0,98404268	0,84147444	0,98404259
0,003	0,96708075	0,99654323	0,50233293	0,9465159	0,76417002	0,97606598	0,76416914	0,9760659
0,004	0,37107432	0,99539100	0,37109154	0,928729437	0,68914810	0,96809169	0,68914729	0,96809160
0,005	0,09479327	0,99423879	0,26355098	0,910978518	0,61706590	0,9601206	0,61706518	0,96012051
0,006	0,01782592	0,89327238	0,17971136	0,893271928	0,54849665	0,95215349	0,54849610	0,95215341
0,007	0,01131009	0,87561882	0,11752406	0,875618384	0,48391729	0,94419118	0,48391729	0,94419110
0,008	0,00924203	0,85802696	0,07363772	0,858026524	0,42369859	0,93623445	0,42370117	0,93623437
0,009	0,00917424	0,84050532	0,04417099	0,840504896	0,36809506	0,92828409	0,36811120	0,92828401
0,01	0,01219859	0,82306236	0,02534710	0,823061942	0,31723320	0,92034089	0,31730216	0,92034081
0,011	0,01818852	0,80570640	0,01390616	0,805705988	0,27110886	0,91240564	0,27132456	0,91240556
0,012	0,03223238	0,78844564	0,00729028	0,788445233	0,22959865	0,90447912	0,23013259	0,90447904
0,013	0,04235976	0,77128814	0,00365038	0,771287734	0,19248556	0,89656211	0,19359503	0,89656204
0,014	0,04960754	0,75424180	0,00174508	0,754241399	0,15948643	0,88865540	0,16150817	0,88865532
0,015	0,00771252	0,73731436	0,00079620	0,737313972	0,13027891	0,88075976	0,13360999	0,88075968
0,016	0,00929690	0,72051341	0,00034659	0,720513027	0,10453049	0,87287596	0,10959485	0,87287588
0,017	0,00111334	0,70384633	0,00014391	0,703845953	0,08190051	0,86500477	0,08912780	0,8650047
0,018	0,00129896	0,68732032	0,00005696	0,687319948	0,06207130	0,85714696	0,07185803	0,85714688
0,019	0,00147616	0,67094237	0,00002150	0,670942008	0,05748986	0,84930329	0,05743100	0,84930321
0,02	0,00311179	0,65471928	0,00000772	0,654718921	0,04561290	0,84147451	0,04549855	0,84147444
0,021	0,00647527	0,63865760	0,00000263	0,638657254	0,03593176	0,83366138	0,03572746	0,83366131
0,022	0,00465260	0,62276368	0,00000085	0,622763349	0,00498709	0,82586465	0,02780580	0,82586458
0,023	0,00542263	0,60704364	2,53387E-7	0,607043317	0,02197961	0,81808506	0,02144736	0,81808499
0,024	0,00209344	0,59150333	6,31920E-8	0,591503026	0,01357975	0,81032335	0,01639440	0,81032328
0,025	0,00688459	0,57614838	5,62636E-9	0,576148174	0,01354210	0,80258025	0,01241881	0,80258018

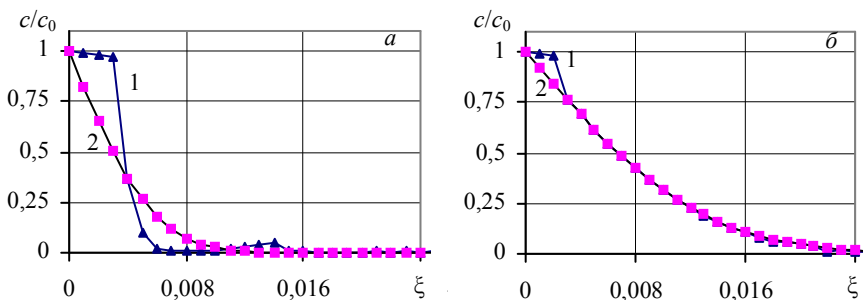


Рис. 2. Розподіли $c(\xi, \tau)/c_0$, обчислені за формулами (3) та (5) біля поверхні шару

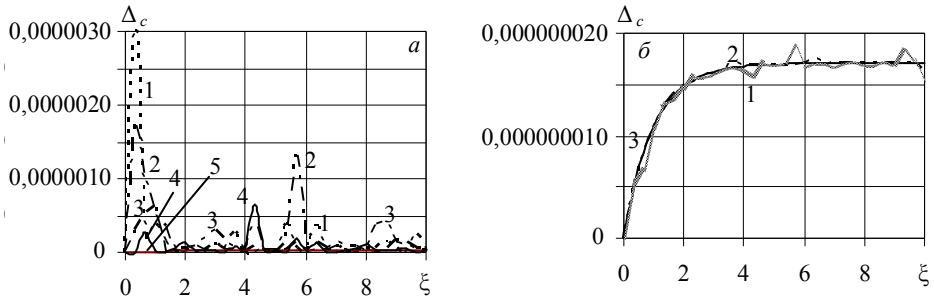


Рис. 3. Графіки відхилення значень $\Delta_c(\xi, \tau)$ для різних τ

Зазначимо, що з ростом τ різниця між відповідними розрахунковими значеннями концентрації зменшується. Зауважимо, що для великих часів, у тому числі стаціонарних, спостерігається добре співпадіння значень $c(\xi, \tau)/c_0$, розрахованих за формулами (3) та (5).

Окрім цього досліджувалася функція $\Delta_c(\xi, \tau) = |c(\xi, \tau) - c_F(\xi, \tau)|/c_0$ — абсолютне відхилення значень концентрації, розрахованих за формулами (3) та (5), у точці (ξ, τ) . Розподіли функції $\Delta_c(\xi, \tau)$ у різні моменти безрозмірного часу в шарі завтовшки $\xi_0 = 10$ наведені на рис. 3. Тут криві 1-5 відповідають значенням $\tau = 0,004; 0,005; 0,01; 0,05; 0,1$ на рис. 3а, на рис. 3б криві 1-3 відповідають $\tau = 0,5; 1; 10$ з точністю сумування ряду $\epsilon = 10^{-7}$ та за розбиття проміжку $[0, \xi_0]$ $n = 30$.

Зазначимо, що з ростом τ відхилення $\Delta_c(\xi, \tau)$ спадає, доки не вийде на усталений розподіл (крива 3, рис. 3б). При цьому найбільше значення $\Delta_c(\xi, \tau)$ для малих часів знаходиться у приповерхневій області шару.

На рис. 4 наведені розподіли концентрації в стаціонарному режимі ($\tau = 10$) для різних значень безрозмірної товщини шару $\xi_0 = 1; 1,5; 2; 2,5; 10; 100$ (криві 1-6) із точністю сумування ряду $\epsilon = 10^{-7}$ і для розбиття проміжку $n = 30$.

Зазначимо, що в околі границі шару, де підтримується стале значення концентрації, розподіли $c(\xi, \tau)/c_0$ практично співпадають (рис. 4) для $\xi_0 \geq 5$.

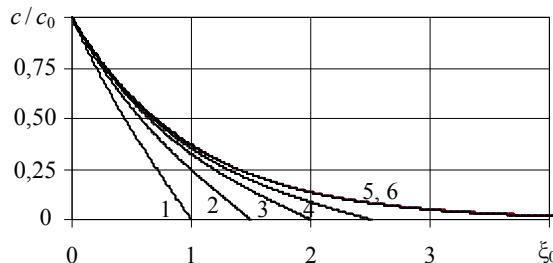


Рис. 4. Розподіли концентрації $c(\xi, \tau)/c_0$ за різних товщин шару ξ_0

Значення товщини шару ξ_0 майже не впливає на значення концентрації, оскільки у стаціонарному режимі приблизно для $\xi > 5$ функція $c(\xi, \tau)/c_0$ приймає значення в околі 0 (криві 5, 6 на рис. 3). Зауважимо, що чим менша товщина шару, в якому дифундує розпадна речовина, тим ближче розподіл концентрації наближається до лінійного (криві 1, 2 на рис. 3).

3. Класи задач переносу з повільно збіжними асимптотичними доданками

Подібні проблеми щодо повільно збіжних рядів виникають і в інших класах задач переносу. Наприклад, розв'язок системи рівнянь вертикальної гетеродифузії у середовищі з пастками [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d_1 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} - ac_1 + c_2, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \tau} &= d_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + ac_1 - (1 + a_2)c_2 + a_1c_3, \\ \frac{\partial c_3}{\partial \tau} &= a_2c_2 - a_1c_3 \end{aligned} \quad (6)$$

із крайовими умовами першого роду

$$c_i|_{\tau=0} = 0, \quad c_1|_{\xi=0} = \alpha c_0, \quad c_2|_{\xi=0} = (1 - \alpha)c_0, \quad c_1|_{\xi=\xi_0} = c_2|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (7)$$

містить складники вигляду (4)

$$I_1 = \frac{2c_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 d_1^*}{n(d^* y_n^2 + d_a)} \sin y_n \xi.$$

Після підсумовування асимптотичних доданків структуру розв'язків крайової задачі (6), (7) можна подати у вигляді [9]

$$\begin{aligned} c_1(\tau, \xi) &= \alpha c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \frac{c_0 d_1^* \alpha_1}{d_a} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi_0)} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_0}{n\pi} s^* R_{1n}(\tau) \sin y_n \xi, \\ c_2(\tau, \xi) &= (1 - \alpha)c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \frac{c_0 d_2^* \alpha_1}{d_a} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi_0)} \right\} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_0}{n\pi} s^* R_{2n}(\tau) \sin(y_n \xi), \\ c_3(\tau, \xi) &= \frac{c_0 d_2^* \alpha_1 b}{d_a} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi_0)} \right\} + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_0}{n\pi} s^* R_{3n}(\tau) \sin(y_n \xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Опис взаємозв'язаних процесів тепло- та масоперенесення з урахуванням розпаду мігруючої речовини визначає система рівнянь термодифузії розпадних частинок [10]

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_0(\xi, \tau)}{\partial \tau} &= D_0 \frac{\partial^2 c_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \lambda c_0(\xi, \tau), \\ \frac{\partial T_0(\xi, \tau)}{\partial \tau} &= \kappa_c^{(0)} \frac{\partial^2 c_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \kappa_0 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (9)$$

Для початкових

$$c_0(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad T_0(\xi, \tau)|_{\tau=0} = T^* \equiv const$$

і граничних

$$c_0(\xi, \tau)|_{\xi=0} = c^*, \quad T_0(\xi, \tau)|_{\xi=0} = T_*, \quad c_0(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad T_0(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = T^* \quad (10)$$

умов розв'язок задачі, окрім стаціонарних доданків виду $1 - \xi/\xi_0$, також містить повільно збіжні складники

$$I_2 = \frac{2c^*}{\pi} \lambda \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(y_n \xi)}{n \left[(D_0 \kappa_0 - D_T^{(0)} \kappa_c^{(0)}) y_n^2 + \lambda \kappa_0 \right]}.$$

З використанням формули (4) розв'язок задачі (9), (10) отримано у вигляді [10]

$$\begin{aligned}c_0(\xi, \tau) &= c^* \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - \frac{c^* \lambda \kappa_0}{D_0 \kappa_0 - D_T^{(0)} \kappa_c^{(0)}} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta_2(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta_2 \xi_0)} \right\} - \\ &- \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(y_n \xi)}{y_n (s_1 - s_2)} \left[\left(c^* s_1 + R_1 + \frac{R_2}{s_1} \right) e^{s_1 \tau} - \left(c^* s_2 + R_1 + \frac{R_2}{s_2} \right) e^{s_2 \tau} \right], \\ T_0(\xi, \tau) &= T^* + (T_* - T^*) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \frac{c^* \lambda \kappa_c^{(0)}}{D_0 \kappa_0 - D_T^{(0)} \kappa_c^{(0)}} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh}[\eta_2(\xi_0 - \xi)]}{\text{sh}(\eta_2 \xi_0)} \right\} - \\ &- \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(y_n \xi)}{y_n (s_1 - s_2)} \left\{ \left[(T_* - T^*) s_1 + \bar{R}_1 - \frac{\bar{R}_2}{s_1} \right] e^{s_1 \tau} - \left[(T_* - T^*) s_2 + \bar{R}_1 - \frac{\bar{R}_2}{s_2} \right] e^{s_2 \tau} \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

Зазначимо, що під час чисельного аналізу розв'язків вигляду (8) або (11) без застосування процедури підсумовування асимптотичних складників для досягнення необхідної точності потрібно взяти порядку тисячі членів ряду. Причому чим менший час протікання процесу τ , тим повільніше збігаються відповідні ряди.

Висновки. Таким чином показано доцільність виділення у розв'язках виду (3) відповідних крайових задач лінійних складників та асимптотичних доданків вигляду (4), які можна обчислити аналітично. Встановлено, що час обчислень розв'язків не залежить від значень безрозмірних часу протікання процесу дифузії та товщини шару. Час обрахунку розв'язків у вигляді ряду Фур'є зростає пропорційно до кількості розбиттів проміжку.

Під час обчислень конкретних рядів виду (3) для покращення їх точності бажано виділяти принаймні лінійну частину або асимптотичні вирази, якщо їх вдається просумувати. Варто зазначити, що асимптотичні вирази відповідають стаціонарному стану процесу перенесення.

Література

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — Москва: Высшая школа, 1990. — 208 с.
- [2] Боголюбов Н. М., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. — Москва: Наука, 1974. — 409 с.
- [3] Каценко И. С. Асимптотические разложения решений. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 44 с.
- [4] Челкак С. И., Чистяков В. М. Элементарное построение асимптотик некоторых сумм // Математика в вузе. — http://www.spbstu.ru/publications/m_v/N_002/frame_N02.html.
- [5] Калинин В. М. Новые формулы квадратур на базе формул Эйлера-Маклорена с произвольным параметром // Научно-технические ведомости СПбГТУ. — 2004. — № 4. — С. 59-67.
- [6] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах. Том 1. — Москва: Мир, 1985. — 400 с.
- [7] Грегуль Ю. О., Клесов О. І. Збіжність узагальнених рядів Спіцера // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2012. — № 4. — С. 34-38.
- [8] Захарія Й. А. Про числове підсумовування нескінченних рядів // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». — 2012. — № 738. — С. 186-188.
- [9] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 125 с.
- [10] Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах / Є. Чапля, О. Чернуха, В. Гончарук, А. Торський. — Львів: Євровіт, 2009. — 261 с.
- [11] Снеддон И. Преобразования Фурье. — Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. — 667 с.
- [12] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — Москва: Наука, 1981. — 798 с.
- [13] Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. — Київ: Видавнича група BNV, 2006. — 480 с.

On summation of asymptotic addends in solutions of diffusion problems

Yurii Bilushchak, Yevhen Chaplya, Olha Chernukha

The work is devoted to summation of asymptotic addends of solutions of the initial-boundary value problems of diffusion, which is obtained in the form of Fourier trigonometric series. In such kind of solutions, the expedience of separation of the linear components and asymptotic addends that can be calculated analytically is shown. It is established that time of solution calculations does not depend on values of both dimensionless time of the diffusion process running and the layer thickness. Time of calculation of the solutions in the form of Fourier series increases proportionally to a number of an interval partitions.

Юрій Білушак, Євген Чапля, Ольга Чернуха
Про підсумовування асимптотичних доданків у розв'язках задач дифузії

О суммировании асимптотических слагаемых в решениях задач диффузии

Юрий Билушак, Евгений Чапля, Ольга Чернуха

Работа посвящена суммированию асимптотических слагаемых решений краевых задач диффузии, полученных в виде тригонометрических рядов Фурье. Показана целесообразность выделения в такого типа решениях линейных составляющих и асимптотических слагаемых, которые могут быть вычислены аналитически. Установлено, что время вычислений решений не зависит от значений безразмерных времени протекания процесса диффузии и толщины слоя. Время расчета решений в виде рядов Фурье возрастает пропорционально количеству разбиений интервала.

Отримано 19.05.14