

## **Моделювання процесу польоту безпілотного квадрокоптера з урахуванням часової затримки в керуванні**

**Богдан Благітко<sup>1</sup>, Юрій Мочульський<sup>1</sup>, Ігор Заячук<sup>2</sup>, Любомира Кіт<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> к. т. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. генерала Тарнавського, 107, Львів, 79017, e-mail: blagitko@electronics.lnu.edu.ua, mochulsky@ukr.net

<sup>2</sup> к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: igorzaj@mail.ru

<sup>3</sup> Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005

*Наведено результати досліджень впливу величини часової затримки у мікроконтролері між моментами подачі вхідної інформації про положення безпілотного квадрокоптера в просторі та видачею обчисленої напруги на чотири електродвигуни для оптимального виведення безпілотного квадрокоптера на задану траєкторію польоту з урахуванням нелінійності характеристик електродвигунів. Математичну модель безпілотного квадрокоптера подано системою диференціальних рівнянь у формі Коші 16-го порядку. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ристання та зміни їх у часі. Пропорційно-диференціальний (ПД)-регулятор, який змінює силу тяги гвинтів, задаючи напруги чотирьох електродвигунів, реалізовано на мікроконтролері. Розглянуто тестовий приклад автоматичного виконання фігури простого пілотажу — горизонтальної вісімки з правим і з лівим поворотами та вертикальними злетом і приземленням.*

**Ключові слова:** безпілотний квадрокоптер, керування, ПД-регулятор, час затримки.

**Вступ.** У процесах передачі маси, енергії, інформації, тощо необхідно враховувати фактор запізнювання. До причин запізнення можна віднести обмеженість швидкості поширення взаємодії (наприклад, електричного сигналу), «немиттєвість» нервової та м'язової реакції в системах «людина–машина», наявність інерційності деяких елементів, обмеженість швидкості протікання технологічних процесів (наприклад, горіння в камері двигуна).

У багатьох випадках виключення запізнювання з розгляду дозволяє адекватно описувати реальні процеси. Але іноді нехтування фактором запізнювання призводить до абсурдних (або, у крайньому випадку, не еквівалентних реальності) висновків.

Динамічна модель руху безпілотного квадрокоптера в повітрі розглядалася у роботах [1, 2]. Різноманітні методи автоматичного управління польотом квадрокоптера, включаючи використання ПД-регуляторів, описані у роботах [3-6]. Значну увагу в цитованих працях приділено особливостям моделювання руху безпілотного квадрокоптера, а питання, які стосуються шляхів врахування запізнювання команди управління на політ безпілотного квадрокоптера, на наш погляд, висвітлені недостатньо.

## 1. Методика оцінки впливу величини часової затримки на процес керування вертикальним злетом і приземленням безпілотного квадрокоптера

Систему звичайних диференціальних рівнянь можна записати так:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, t). \quad (1)$$

Тут  $f(\bar{X}, t)$  — задана вектор-функція, а  $\bar{X}(t)$  — вектор розв'язку рівняння.

Перехід до системи звичайних диференціальних рівнянь із затримкою означає, що замість рівняння (1) слід розглядати рівняння [7, 8]

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, (t - \tau)), \quad \tau > 0, \quad (2)$$

де  $\tau$  — час затримки.

Зауважимо, що для системи (1) похідна у довільний момент часу визначається станом системи в той же момент часу, а для системи (2) — її станом в один із попередніх моментів. Тоді стає зрозумілою вимога невід'ємності запізнювання  $\tau$ , тобто затримки; адже швидкість процесу не може визначатися станом системи в наступні моменти часу.

У разі використання регулятора вектор вхідних сигналів  $\bar{U}$  обчислюється мікроконтролером на основі змінних стану, отриманих у момент часу  $t_i$ , а результати обчислень отримуються із запізненням  $\tau$ , тобто в момент часу  $t_i + \tau$ . Це означає, що рух системи на відрізку часу від  $t_i$  до  $t_{i+1} = t_i + \tau$  у разі використання регулятора із запізненням описується лінійним рівнянням

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}) + b_m \bar{U}[\bar{X}(t_i)]. \quad (3)$$

На рис. 1 наведено блок-схему взаємодії системи та регулятора.

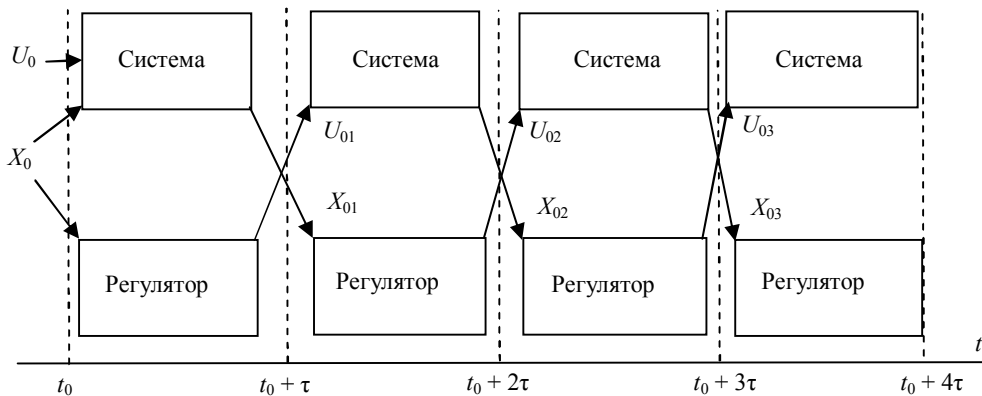


Рис. 1. Блок-схема взаємодії системи і регулятора

У момент часу  $t_0$  динамічна система перебуває у стані, який визначається вектором змінних стану  $\bar{X}_0$ , і на неї подаються вхідні сигнали  $\bar{U}_0$ . Ці ж вхідні сигнали (або частина з них) подаються на регулятор. Упродовж певного часу  $\tau$  регулятор обчислює величину вхідних сигналів  $\bar{U}_{01}$ , які необхідно подати для виходу системи на заданий режим із стану  $\bar{X}_0$ . Динамічна система упродовж цього часу рухається, виходячи з початкових умов  $\bar{X}_0$  і вхідних сигналів  $\bar{U}_0$ . У момент часу  $t_1 = t_0 + \tau$  регулятор передає системі обчислену величину вхідних сигналів  $\bar{U}_{01}$ . У цей же момент часу на вхід регулятора поступає інформація про значення складових вектора змінних стану  $\bar{X}_{01}$ . Далі регулятор до моменту часу  $t_2 = t_1 + \tau$  обчислює значення вхідних сигналів  $\bar{U}_{02}$  на основі вектора  $\bar{X}_{01}$ . Одночасно на відрізку часу від  $t_1$  до  $t_2 = t_1 + \tau$  система рухається, виходячи з початкових умов  $\bar{X}(t_1) = \bar{X}_{01}$ . У подальшому цей процес періодично повторюється з періодом  $\tau$ .

Конструктивно в структурі безпілотного квадрокоптера поєднано дві системи. Одну з них — електромеханічну — реалізовано у вигляді хрестоподібної балочної конструкції з прикріпленими до кінців балок електричними двигунами постійного струму з повітряними пропелерами. Кут атаки повітряних пропелерів незмінний, тобто сили тяги всіх чотирьох пар «електричний двигун–пропелер» направлені перпендикулярно до площини балочної конструкції. Окрім того двигуни на сусідніх кінцях балок мають різні пропелери — один із них оснащено правим пропелером, інший — лівим. Ця підсистема характеризується масою, моментом інерції та габаритними розмірами. Швидкості обертання роторів електродвигунів і, відповідно, сили тяги пропелерів змінюються шляхом зміни напруг, які подаються на обмотки електродвигунів.

Іншу складову — електронну — реалізовано як модуль управління силою тяги електродвигунів. За допомогою модуля визначаються напруги, які необхідно подати на обмотки відповідних електродвигунів для переміщення безпілотного квадрокоптера за заданою траєкторією. Обчислення необхідних значень напруг виконує мікроконтролер за законом ПД-регулятора, порівнюючи біжучі виміряні значення із заданими. Отже, затримку в керуванні безпілотним квадрокоптером обумовлює процес обчислення у мікроконтролері величин сигналів управління.

Як показано у роботі [9], для квадрокоптера вектор змінних стану має вигляд

$$\bar{X} = [X \ Y \ Z \ V_x \ V_y \ V_z \ \gamma \ \theta \ \phi \ \omega_\gamma \ \omega_\theta \ \omega_\phi \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^T,$$

вектор-функція

$$f(\bar{X}) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ F(\cos\phi \sin\gamma \cos\theta - \sin\phi \sin\theta)/m - AxV_x/m \\ F(-\sin\phi \sin\gamma \cos\theta - \cos\phi \sin\theta)/m - AyV_y/m \\ -g + F \cos\theta \cos\gamma/m - AzV_z/m \\ \omega_\gamma \\ \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ [(J_y - J_z)\omega_\theta\omega_\phi - J_\Gamma\omega_\theta\omega_\Gamma + M_\gamma]/J_x \\ [(J_z - J_x)\omega_\gamma\omega_\phi + J_\Gamma\omega_\gamma\omega_\Gamma + M_\theta]/J_y \\ [(J_x - J_y)\omega_\gamma\omega_\theta + M_\phi]/J_z \\ -a_0 - a_1\omega_1 - a_2\omega_1^2 \\ -a_0 - a_1\omega_2 - a_2\omega_2^2 \\ -a_0 - a_1\omega_3 - a_2\omega_3^2 \\ -a_0 - a_1\omega_4 - a_2\omega_4^2 \end{bmatrix},$$

а вектор вхідних сигналів —  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$ .

У векторі змінних стану  $X, Y, Z$  — просторові координати;  $V_x, V_y, V_z$  — проекції швидкості безпілотної квадрокоптера на осі координат;  $\gamma, \theta, \psi$  — кути крену, тангажу та ристання;  $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\psi$  — кутові швидкості;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  — кутові швидкості роторів двигунів.  $F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$  — сумарна сила тяги всіх пропелерів;  $A_x, A_y, A_z$  — коефіцієнти, які враховують опір повітря;  $m$  — маса безпілотної квадрокоптера;  $g$  — прискорення земного тяжіння;  $J_x, J_y, J_z$  — моменти інерції безпілотної квадрокоптера щодо осей  $x, y, z$  відповідно;  $M_\gamma = kL(\omega_4^2 - \omega_2^2)$ ,  $M_\theta = kL(\omega_1^2 - \omega_3^2)$ ,  $M_\phi = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$  — моменти сил крену, тангажу та ристання відповідно.

Кожен із чотирьох двигунів описується диференціальним рівнянням  $d\omega_n/dt + a_1\omega_n + a_2\omega_n^2 + a_0 = b_m U_n$ ,  $n = \overline{1, 4}$ .

У цьому рівнянні коефіцієнт  $a_0$  враховує те, що внаслідок сухого тертя ротор починає обертатися лише за напруги, більшої, ніж  $U_{nop} = a_0/b_m$ . За меншої напруги швидкість обертання приймається рівною нулю.

Процес обертання пропелерів можна спостерігати, скориставшись залежністю з рис. 2. Ротор двигуна безпілотної квадрокоптера починає обертатися

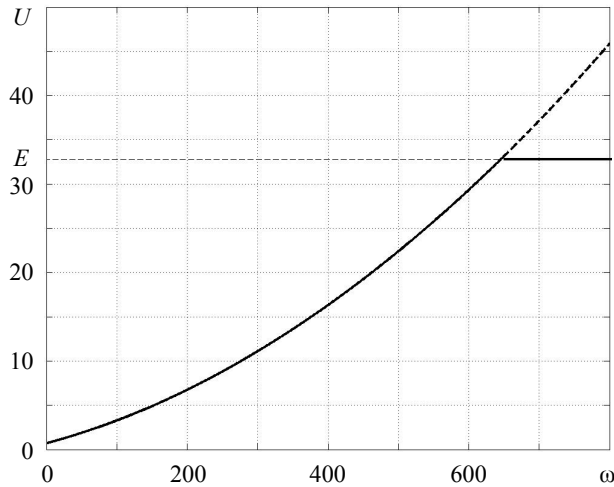


Рис. 2. Залежність напруги, прикладеної до двигуна, від заданої швидкості обертання ротора

за напруги 0,7 В. Максимальна швидкість обертання ротора обмежена максимальною напругою акумулятора ( $E = 33,3$  В) і дорівнює 650 рад/с.

Для оцінки процесу польоту безпілотного квадрокоптера задано такі параметри моделі:

$g = 9,81$ м/с <sup>2</sup>	$k = 2,98 \cdot 10^{-6}$	$J_x = J_y = 4,856 \cdot 10^{-3}$ кг·м <sup>2</sup>
$m = 0,468$ кг	$b = 1,14 \cdot 10^{-7}$	$J_z = 9,801 \cdot 10^{-3}$ кг·м <sup>2</sup>
$L = 0,225$ м	$J_{\Gamma} = 3,357 \cdot 10^{-5}$ кг·м <sup>2</sup>	$A_x = A_y = A_z = 0,25$ кг/с

Окрім того параметри електродвигунів:  $a_0 = 189,63$  с<sup>-2</sup>,  $a_1 = 6,0612$  с<sup>-1</sup>,  $a_2 = 0,0122$ ,  $b_m = 280,19$  В<sup>-1</sup>с<sup>-2</sup>. Максимальне значення напруги живлення двигунів 33,3 В.

Положення безпілотного квадрокоптера задається шістьма величинами: просторовими координатами  $X, Y, Z$  і кутами  $\theta, \gamma, \psi$ . Але змінювати їх можна лише за допомогою чотирьох величин  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  та  $\omega_4$ . Тому для регулятора необхідно обрати чотири змінні:  $Z, \theta, \gamma$  та  $\psi$ , тобто висоту польоту безпілотного квадрокоптера та значення кутів тангажу, крену, ристання.

Для дослідження моделі безпілотного квадрокоптера, як динамічної системи із затримкою, було вибрано фігуру простого пілотажу — горизонтальну вісімку. Під час виконання цієї фігури безпілотний квадрокоптер повинен у горизонтальній площині виконати повне коло, а після цього зробити друге коло у протилежному напрямку, для того, щоб повернутися в початкову точку. Для руху по колу на заданій висоті до квадрокоптера потрібно прикласти направлену догори вертикальну силу, яка дорівнює  $mg$ , та горизонтальну доцентрову силу, величину якої визначатиме радіус кола. Щоб створити доцентрову силу необхідно

нахилити безпілотний квадрокоптер, тобто задати ненульовий кут тангажу, або крену, або обидва кути одночасно. Тоді силу тяги пропелерів можна розкласти на два складники — горизонтальний і вертикальний. Під час руху по колу вектор доцентрової сили рівномірно змінює свій напрям. Таку доцентрову силу можна створити, задавши певний постійний кут тангажу або крену та рівномірно в часі змінювати кут рискання. Після того, як безпілотний квадрокоптер, описавши коло, повернеться в початкову точку, необхідно поміняти напрям зміни кута рискання на протилежний і описати ще одно коло.

Для регулювання польоту безпілотного квадрокоптера використаємо пропорційно-диференціальний регулятор, який описується такими рівняннями

$$\begin{cases} F = \frac{mg + K_{Zp}(Z_d - Z) + K_{Zd}(\dot{Z}_d - \dot{Z})}{\cos \gamma \cos \theta}, \\ M_\theta = K_{\theta p}(\theta_d - \theta) + K_{\theta d}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}), \\ M_\gamma = K_{\gamma p}(\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d}(\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma}), \\ M_\phi = K_{\phi p}(\phi_d - \phi) + K_{\phi d}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}), \end{cases} \quad (4)$$

У цих формулах  $Z_d$  та  $\dot{Z}_d$  — задані значення висоти та вертикальної швидкості;  $\theta_d, \gamma_d, \phi_d, \dot{\theta}_d, \dot{\gamma}_d, \dot{\phi}_d$  — відповідно задані кути тангажу, крену та рискання і швидкості їх зміни;  $K_{Zp}, K_{\theta p}, K_{\gamma p}, K_{\phi p}$  — коефіцієнти пропорційного регулятора;  $K_{Zd}, K_{\theta d}, K_{\gamma d}, K_{\phi d}$  — коефіцієнти диференціального регулятора.

Для аналізу використовувався неявний метод Рунге-Кутта. На першому етапі розрахунку крок визначається за методом трапецій, а на другому — зворотною формулою диференціювання 2-го порядку. Провівши аналіз впливу параметрів регулятора на швидкість перехідного процесу, для регулятора виберемо  $K_{Zd} = 4$ ;  $K_{Zp} = 12$ ;  $K_{\gamma d} = K_{\psi d} = K_{\theta d} = 10$ ;  $K_{\gamma p} = K_{\psi p} = K_{\theta p} = 35$ .

Під час моделювання руху безпілотного квадрокоптера по горизонтальній вісімці розглянутому вище регулятору задавалася стала висота  $Z_d = 5$  м, кут крену постійно дорівнював нулю, а кут тангажу задавався рівним  $0,05$  радіана. Функція регулювання задає закон зміни кута рискання спочатку  $\phi_d = 0,19t$  до  $33$  с, а після цього —  $\phi_d = 2\pi - 0,19(t - 33)$ . На рис. 3 наведено графік зміни кута рискання. За таких даних безпілотний квадрокоптер виконує політ у вигляді фігури простого пілотажу — горизонтальної вісімки з радіусом біля  $5$  м. Якщо задати кут тангажу  $0,1$  радіана, то радіус вісімки збільшиться вдвічі.

Для дослідження впливу затримки на процес польоту безпілотного квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки величина затримки змінювалася, починаючи від  $\tau = 0$  с до  $\tau = 0,32$  с. Результати досліджень наведені нижче на графіках.

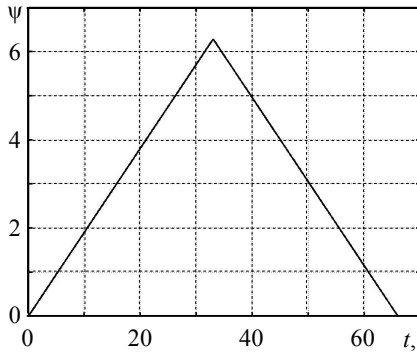


Рис. 3. Графік зміни кута рискання

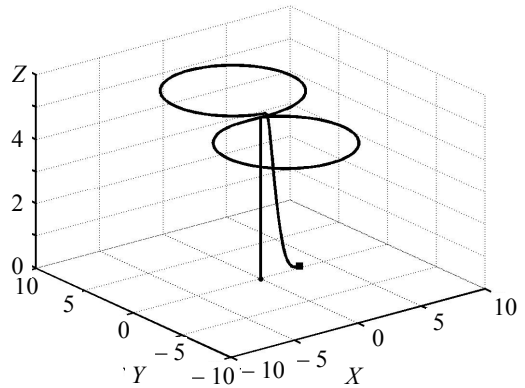


Рис. 4. Політ квадрокоптера для  $\tau = 0,05$  с

На рис. 4 показано результат польоту безпілотного квадрокоптера для значення величини затримки  $\tau = 0,05$  с. За менших значень  $\tau$  графіки майже не відрізняються, тобто політ із затримкою до величини  $\tau = 0,05$  с є нормальне.

На рис. 5 наведено результат польоту безпілотного квадрокоптера для затримки 0,15 с. Як видно з графіку, висота польоту безпілотного квадрокоптера коливається в околі заданої висоти 5 м, хоча характер траєкторії витримується.

На рис. 6 наведено результат польоту квадрокоптера для значення величини затримки  $\tau = 0,191$  с. Як видно з графіку затримка, більша 0,19 с призводить до ненормального польоту, за якого безпілотний квадрокоптер може впасти на землю.

Слід відзначити, що між нормальним польотом і катастрофічним, тобто між стійким і нестійким польотом квадрокоптера, немає строго точно визначеної величини затримки. Тут існує деяка перехідна область  $\tau$ , за якої політ за маршрутом відбувається, але деякі параметри польоту не відповідають заданим. Наприклад, висота польоту набуває коливного характеру з усе зростаючою амплітудою коливань із ростом величини часу затримки.

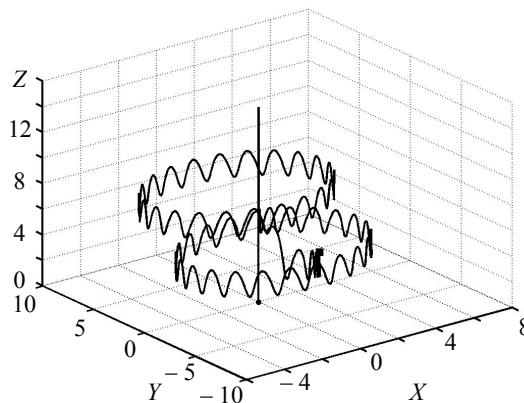


Рис. 5. Політ квадрокоптера для  $\tau = 0,15$  с

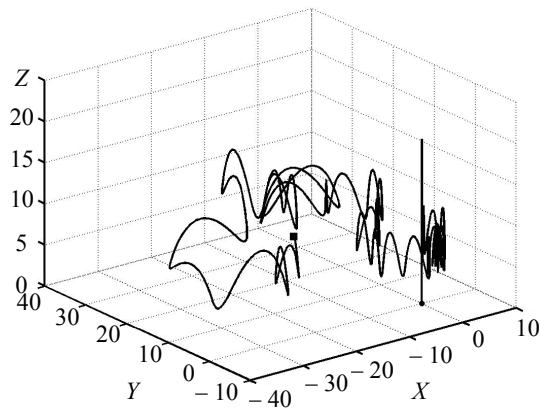


Рис. 6. Політ квадрокоптера для  $\tau = 0,191$  с

Таким чином, динамічна система із затримкою, як модель польоту безпілотного квадрокоптера, залежно від величини часу затримки може перебувати у трьох суттєво різних областях, а саме:

- для  $\tau < 0,05$  с спостерігається повна відповідність параметрів польоту квадрокоптера щодо заданих;
- для  $0,05 \text{ с} \leq \tau \leq 0,15$  с спостерігається часткова втрата керованості, внаслідок чого загальний маршрут горизонтальної вісімки квадрокоптер пролітає, але деякі параметри не відповідають заданим, наприклад, висота польоту змінюється періодично з доволі значною амплітудою;
- для  $\tau > 0,19$  с спостерігається повна втрата керованості польотом.

Розглянуті вище процеси відбуваються за умови, що динамічна система без затримки забезпечує стійкий розв'язок і, відповідно, нормальний політ квадрокоптера [6].

**Висновки.** Розроблено модель для опису процесу польоту безпілотного квадрокоптера, яка враховує часову затримку в керуванні. За результатами досліджень впливу часу затримки на процес польоту безпілотного квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки зроблено аналіз критичних ситуацій, що можуть виникати у процесі польоту.

### Література

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — Москва: Мир, 1967. — 548 с.
- [2] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — Москва: Наука, 1972. — 360 с.
- [3] Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment / G. M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, C. J. Tomlin // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 2007. — P. 322-326.
- [4] Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, C. J. Tomlin // IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2009. — P. 3277-3282.



- [5] *Tayebi A., McGilvray S.* Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot // 43rd IEEE Conference on Decision and Control. — 2004. — Vol. 2. — P. 1216-1221
- [6] *Dikmen I. C., Arisoy A., Temelta H.* Attitude control of a quadrotor // 4<sup>th</sup> International Conference on Recent Advances in Space Technologies. — 2009. — P. 722-727.
- [7] *Castillo P., Lozano R., Dzul A.* Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors // IEEE Control Systems Magazine. — Dec. 2005. — P. 45-55.
- [8] Моделювання процесу керування вертикальним зльотом і приземленням безпілотного квадрокоптера / Б. Благітко, Ю. Мочульський, Л. Кім, І. Заячук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 23-31.
- [9] Моделювання процесу стабілізації та керованості безпілотного квадрокоптера у польоті / Б. Благітко, Ю. Мочульський, Л. Кім, І. Заячук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 21-31.

## Mathematical modelling of unmanned quadcopter flight with taking into account the time delay in its control

Bogdan Blahitko, Yurii Mochulsky, Igor Zayachuk, Lyubomyra Kit

*In this paper, the results of investigation of the influence of the value of the microcontroller time delay since the instant of input of information on the quadcopter position in space till the feed of the calculated voltage to the four electric motors for optimal putting the quadcopter into the given trajectory of flight with taking into account nonlinearity of the electric motors characteristics are given. The mathematical model of the quadcopter is represented by a system of 16th order differential equations in Cauchy form. The input information consists of the value of quadcopter flight altitude, values of angles of pitch, roll, yaw and their changes in time. The PD controller, which is implemented in the microcontroller, changes the airscrew propulsion by means of voltage setting to the four electric motors. The test flight of standard aerobatics figure self-acting — horizontal figure 8 with right and left turns and vertical take-off and landing — is considered.*

## Моделирование процесса полёта беспилотного квадрокоптера с учётом временной задержки в управлении

Богдан Благітко, Юрій Мочульський, Ігор Заячук, Любомира Кит

*Приведены результаты исследований влияния величины временной задержки в микроконтроллере между моментами подачи входной информации о положении беспилотного квадрокоптера в пространстве и выдачей вычисленного напряжения на четыре электродвигателя для оптимального вывода беспилотного квадрокоптера на заданную траекторию полета с учетом нелинейности характеристик электродвигателей. Математическая модель беспилотного квадрокоптера представлена системой дифференциальных уравнений в форме Коши 16-го порядка. Входной информацией является значение высоты полета беспилотного квадрокоптера, значения углов тангажа, крена, рыскания и изменения их во времени. Пропорционально-дифференциальный (ПД)-регулятор реализован на микроконтроллере и изменяет силу тяги винтов, задавая напряжения четырех электродвигателей. Рассмотрен тестовый пример автоматического выполнения фигуры простого пилотажа — горизонтальной восьмерки с правым и левым поворотами, вертикальным взлетом и приземлением.*

Представлено професором Т. Нагірним

Отримано 26.05.14