УДК 539.374

Конвективне осушення зернистого матеріалу з урахуванням двошарової структури окремої зернини

Богдана Гайвась[1], Євген Чапля[2]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: haj@cmm.lviv.ua
[2] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна; Інститут механіки і прикладної інформатики, Університет Казимира Великого в Бидгощи, вул. Коперніка, 1, Бидгощ, 85-064, Польща, e-mail: czapla@ukw.edu.pl

Розглянуто задачу осушення шару зернистого неоднорідного матеріалу в усталеному режимі його продуву. Враховано суттєво різні інтенсивності процесів переносу вологості в міжзерновому просторі й окремому зерні. Побудовано аналітичні розв'язки для розподілу поля вологовмісту в окремому зерні залежно від глибини його знаходження в шарі. Досліджено закономірності змін вологості окремих зернин шару в часі та їх залежність від параметрів зміни неоднорідності, швидкості продуву, місцезнаходження зерна в шарі, початкової вологості в зерні та в міжзерновому середовищі.

Ключові слова: зернистий шар, конвективне осушення, розподіл вологи, напружено-деформований стан зерен.

Вступ. Зерно за структурою є капілярно-пористе колоїдне тіло [1], в якому механізм масопереносу під час обезводнення визначається формою і енергією зв'язку вологи з матеріалом, його структурою, вологовмістом та умовами сушіння. У роботах [1, 2] проведено аналіз факторів, які визначають технологічні властивості зерна у процесі післяжнивної обробки. Фізико-хімічні властивості зерна залежать від зовнішніх умов, які змінюються у процесі сушіння, гідротермічної обробки та зберігання зерна. Зерно — фізіологічна культура, яка складається із зародка, ендосперму (ядра) й оболонок [4]. Морфологічна будова (товщина оболонок та алейронового шару), скловидність, хімічний склад (вміст білкових речовин і крохмалу) зерна пшениці вивчалися також у роботі [1, 5, 6]. Внутрішнє вологопереносення в зерні носить чисто дифузійний характер [2-3]. Проникність води змінює структурно-механічні властивості ендосперму, сприяє утворенню мікротріщин і його розрихленню. Різниця в будові оболонок і ендосперму впливає не тільки на поглинання або видалення вологи, але і на фізико-хімічні процеси, які змінюють об'єм зерна та структуру ендосперму. У зерні містяться білок, крохмал і жири [2]. Білок здатний набухати, що позитивно впливає на проростання насіння. За вищої від допустимої температури білок піддається денатурації, при цьому знижується здатність до набухання. Крохмал у воді не розчиняється, але в гарячій воді набухає та за підвищеної температури клейстаризується і частково розпадається. При перегріві крохмалу можлива карамелізація цукру. Жири у воді не розчиняються, але за температури 60-70 ºС частково розпадаються, що призводить до утворення жирних кислот. При осушенні зерна сушильний агент фільтрується через міжзернове середовище. Для врахування інтенсивності випаровування води Nu_m з поверхні нерухомого шару сферичних частинок у сушильний агент побудовано різні аналітичні залежності [9-13], зокрема, $Nu_m = 2,2\,\mathrm{Re}^{0,5}\,\mathrm{Pr}_m^{0,33}$, $\mathrm{Re} = 2\cdot 10^3 \div 8\cdot 10^4$, де визначальним розміром є діаметр сфер, а швидкість повітря віднесено до повного перетину апарату. Основні теоретичні положення та способи моделювання конвективного сушіння викладено також у працях [7-13].

1. Формулювання задачі та ключова система рівнянь

Розглядаємо шар завтовшки L, який певним чином складено з однакових вологих зернин радіуса R і віднесено до декартової системи координат так, що вісь Oz є перпендикулярна до його поверхонь. Кожну зернину вважаємо двошаровою кулею, так званого, еквівалентного об’єму [1], яку віднесено до сферичної системи координат із початком у її центрі ($r = 0$). Процес осушення кулі відбувається через її зовнішню поверхню контакту $r = R$ з міжзерновим середовищем. Концентрація вологи c_z у місці знаходження вибраної кульки за товщиною шару z визначиться з розв’язку задачі масопереносу в міжзерновому просторі, де пароповітряна суміш фільтрується рівномірно в режимі повного витіснення.

Кожен підшар кулі вважаємо двокомпонентним твердим розчином, що складається з частинок основної компоненти (матриці) та води. За ізотермічних умов визначальними функціями приймаємо вектор радіальних переміщень $u_r^{(i)}$ і концентрацію $c^{(i)}$ вологи [3, 4]. Тоді для окремої кульки ці функції знаходимо з розв’язку взаємозв’язаних рівнянь механодифузії, які у сферичній системі координат мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 u_r^{(i)}\right)}{\partial r}\right] - \xi^{(i)}\beta^{(i)}\frac{\partial c^{(i)}}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(rc^{(i)}\right)}{\partial\tau} = D^{(i)}\frac{\partial^2\left(rc^{(i)}\right)}{\partial r^2} - D_\varepsilon^{(i)}\frac{\partial^2\left(r\varepsilon^{(i)}\right)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

де $\xi^{(i)} = 3K^{(i)}\Big/\left(3K^{(i)} + 4G^{(i)}\right)$ — механічна стала, $\varepsilon^{(i)} = \partial u_r^{(i)}\big/\partial r + 2u_r^{(i)}\big/r$; $D^{(i)}$ — коефіцієнт дифузії; $D_\varepsilon^{(i)}$ — коефіцієнт впливу градієнта поля об’ємної деформації на масовий потік; $K^{(i)}$ — модуль всестороннього об’ємного стиску; $G^{(i)}$ — модуль зсуву; $\beta^{(i)}$ — концентраційний коефіцієнт об’ємного розширення; τ — час. При цьому індекс $i = 1$ відповідає внутрішній області $\left(0 \le r \le r_*\right)$, а $i = 2$ — зовнішній області $\left(r_* \le r \le R\right)$ кульки.

Вважаємо, що в початковий момент часу $(\tau = 0)$ радіальні переміщення є нульові, а концентрації — сталі

$$u_r^{(i)} = 0, \quad c^{(i)} = c_0^{(i)} \quad (i = 1, 2). \tag{2}$$

На поверхні кулі $r = R$, яка вільна від зовнішніх навантажень, умову $\hat{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{n} = 0$, де $\hat{\sigma}^{(2)}$ — тензор напружень, $\vec{n}$ — нормаль до поверхні, запишемо так [4]:

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + 2\left(K^{(2)} - \frac{2}{3} G^{(2)} \right) \frac{u_r^{(2)}}{r} - \beta^{(2)} K^{(2)} c^{(2)} = 0. \tag{3}$$

Приймемо, що густина дифузійного потоку на поверхні кульки $J_R^{(2)}$ пропорційна до різниці концентрацій вологи на поверхні зернини $c_R^{(2)}$ і у міжзерновому просторі c_z, тобто

$$-D^{(2)} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=R} + D_\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varepsilon^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = k\left(c^{(2)} - c_z \right). \tag{4}$$

Тут k — коефіцієнт масовіддачі.

Рівняння масопереносу вологи в міжзерновому просторі шару має вигляд:

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial c_z}{\partial z} = D_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} + J, \tag{5}$$

де υ — швидкість руху пароповітряної суміші у шарі; D_z — коефіцієнт дифузії вологи в міжзерновому середовищі; $J = \alpha J_R^{(2)}$ — інтенсивність локального джерела вологи внаслідок випаровування з окремих зернин, α — коефіцієнт, що залежить від розміру кульок (радіуса) та їх упакування (кубічне просте, об'ємоцентроване чи гранецентроване тощо) [5].

Процес конвективної дифузії в міжзерновому просторі шару, складеного з однакових зернин, є швидким порівняно із процесом дифузії вологи з об'єму зерна до його поверхні [1]. Тому подальший аналіз процесу осушення шару виконаємо в квазістатичному наближенні, тобто концентрацію вологи c_z будемо визначати з розв'язку рівняння

$$D_z \frac{d^2 c_z}{dz^2} - \upsilon \frac{dc_z}{dz} + J = 0, \tag{6}$$

в якому функція J є відомою функцією часу. Рівняння (6) будемо розв'язувати за граничних умов:

$$c_z\big|_{z=0} = 0, \quad c_z\big|_{z=L} = c_z^n. \tag{7}$$

Тут c_z^n — концентрація насиченої пари за вибраної температури.

2. Розв'язок задачі для вологовмісту

Означивши функцію

$$\vartheta^{(i)}(r,z,\tau)=c_z(z)-c^{(i)}(r,z,\tau)\,, \qquad (8)$$

систему рівнянь (1) запишемо так

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2u_r^{(i)}\right)}{\partial r}\right]=\frac{\partial\varepsilon^{(i)}}{\partial r},\quad \frac{\partial\varepsilon^{(i)}}{\partial r}=-\xi^{(i)}\beta^{(i)}\frac{\partial\vartheta^{(i)}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial\left(r\vartheta\right)^{(i)}}{\partial\tau}=\tilde{D}^{(i)}\frac{\partial^2\left(r\vartheta\right)^{(i)}}{\partial r^2}, \qquad (9)$$

де $\tilde{D}^{(i)}=D^{(i)}-\xi^{(i)}\beta^{(i)}D_\varepsilon^{(i)}$ — ефективний коефіцієнт дифузії. При цьому початкові та граничні умови набувають вигляду

$$\vartheta^{(i)}\Big|_{\tau=0}=c_z(z)-c^{(i)}\Big|_{\tau=0},\quad \vartheta^{(1)}\Big|_{r=0}\neq\infty,\quad \left.\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=R}+H\vartheta^{(2)}\Big|_{r=R}=0\,. \qquad (10)$$

Тут $H=kR/D^{(2)}$.

Рівність потоків на межі контактів підшарів кульки $r=r_*$ запишемо так

$$\tilde{D}^{(1)}\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial r}=\tilde{D}^{(2)}\frac{\partial\vartheta^{(2)}}{\partial r}. \qquad (11)$$

Розв'язок крайової задачі (9)-(11) шукаємо у вигляді

$$r\vartheta^{(i)}=\Theta^{(i)}(r)T^{(i)}(\tau)\,. \qquad (12)$$

Для функцій $\Theta^{(i)}$, $T^{(i)}$ знайдемо

$$\frac{d^2\Theta^{(i)}}{dr^2}+\frac{\mu^2}{\tilde{D}^{(i)}}\Theta^{(i)}=0\,,\qquad \frac{dT^{(i)}}{dr}+\mu^2T^{(i)}=0\,, \qquad (13)$$

де μ — параметр задачі.
Розв'язками цих рівнянь будуть функції

$$\Theta^{(i)}=\tilde{A}^{(i)}\cos\left(\lambda^{(i)}r\right)+\tilde{B}^{(i)}\sin\left(\lambda^{(i)}r\right),\quad T^{(i)}\left(\tau\right)=\tilde{K}^{(i)}e^{-\mu^2\tau},$$

які з використанням безрозмірної змінної $\overline{r}=r/R$ запишемо так

$$\Theta^{(i)}=\tilde{A}^{(i)}\cos\left(\lambda_R^{(i)}\overline{r}\right)+\tilde{B}^{(i)}\sin\left(\lambda_R^{(i)}\overline{r}\right),\quad T^{(i)}\left(\tau\right)=\tilde{K}^{(i)}e^{-\mu^2\tau},$$

де $\tilde{A}^{(i)},\tilde{B}^{(i)},\tilde{K}^{(i)}$ — сталі, $\lambda_j^{(i)}=\mu_j\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(i)}}$, $\lambda_R^{(i)}=\lambda^{(i)}R$.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2014, вип. 20, 69-80

Для області $0 \le r < r_*$ з урахуванням обмеженості розв'язку $\vartheta^{(1)}(r,\tau)$, якщо $r = 0$, покладаємо $A_j^{(1)} = 0$ і можемо записати

$$\vartheta^{(1)}(r,\tau) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)} \sin\left(\lambda_R^{(1)} \overline{r}\right) e^{-\mu_j^2 \tau}, \tag{14}$$

а в області $r_* \le r \le R$ відповідно

$$\vartheta^{(2)}\left(r,\tau\right) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_j^{(2)} \cos\left(\lambda_j^{(2)} r\right) + B_j^{(2)} \sin\left(\lambda_j^{(2)} r\right)\right] e^{-\mu_j^2 \tau}. \tag{15}$$

Тут $A_j^{(i)}, B_j^{(i)}$ — коефіцієнти розкладу $\tilde{A}^{(i)}, \tilde{B}^{(i)}$ у ряд за власними значеннями μ_j відповідного характеристичного рівняння, яке отримуємо з умов (9), (10). Маємо

$$\begin{aligned} &p_{11}A_j^{(2)} + p_{12}B_j^{(2)} = 0, \quad p_{21}A_j^{(2)} + p_{22}B_j^{(2)} + a_{11}p_{23}B_j^{(1)} = 0, \\ &p_{33}B_j^{(1)} - \left(c_z - c_0^{(1)}\right) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

де $c_0^{(1)}$ — значення концентрації $c^{(1)}$ для $r = 0,\ \tau = 0$.

$$\begin{aligned} &p_{11} = a_{21}\cos\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)} \sin\lambda_{Rj}^{(2)}, \quad p_{12} = a_{21}\sin\lambda_{Rj}^{(2)} - \lambda_{Rj}^{(2)} \cos\lambda_{Rj}^{(2)}, \\ &p_{21} = \cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}\right)_* + \lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}_* \sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}_*\right), \quad p_{22} = \sin\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}_* - \lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}_* \cos\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}_*, \\ &p_{23} = -a_{11}\left[\sin\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\overline{r}\right)_* - \lambda_{Rj}^{(1)}\overline{r}_* \cos\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\overline{r}_*\right)\right], \quad p_{33} = \lambda_j^{(1)}, \\ &a_{21} = \left(-1 + \frac{kR}{\tilde{D}^{(2)}}\right), \quad a_{11} = d^2, \quad \mu_j r_* \big/ \sqrt{\tilde{D}^{(1)}} = d\lambda_{Rj}^{(2)}\,\overline{r}_*, \quad \overline{r} = r/R, \\ &\mu_j r_* \big/ \sqrt{\tilde{D}^{(2)}} = \lambda_{Rj}^{(2)}\,\overline{r}_*, \quad d = \sqrt{\tilde{D}^{(2)}/\tilde{D}^{(1)}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Визначник системи (16) є

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} p_{12} \\ p_{21} p_{22} \end{vmatrix} p_{33}. \tag{18}$$

Розкриваючи визначник (18), отримуємо характеристичне рівняння задачі

$$\mathrm{tg}\left[\lambda_{Rj}^{(2)}\left(1 - \overline{r}_*\right)\right] = \lambda_{Rj}^{(2)} \frac{\left(1 - \overline{r}_*\right)}{\left[a_{21} + \left(\lambda_{Rj}^{(2)}\right)^2 \overline{r}_*\right]}. \tag{19}$$

Зазначимо, що коли $\overline{r}_*$ прямує до нуля отримуємо характеристичне рівняння [3] для однорідної кульки. За коренями $\lambda_{Rj}^{(2)}$ цього рівняння знаходимо $\mu_j = \lambda_j^{(2)}\sqrt{\tilde{D}^{(2)}}$ та відповідно $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}$.

Корені $\mu_1, \mu_2, ...\mu_j$ характеристичного рівняння (19) є дійсні величини [15], кожному кореню відповідає такий розв’язок рівнянь (14) і (15)

$$\vartheta^{(i)}(r,\tau) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}\Theta_j^{(i)} e^{-\mu_j^2\tau},$$

де

$$\Theta_j^i = A_j^{(i)}\cos\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(i)}}\right) + B_j^{(i)}\sin\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(i)}}\right),$$
$$A_j^{(1)} = 0, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2...\infty. \tag{20}$$

У безрозмірному вигляді маємо:

$$\vartheta^{(1)}\left(\overline{r},\overline{z}\right) = \frac{1}{\overline{r}}\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)}\sin\left(\lambda_R^{(1)}\overline{r}\right),$$
$$B_j^{(1)} = \vartheta^{(1)}\left(0,\overline{z},0\right) = \left(c_z\left(\overline{z},0\right) - c\left(0,\overline{z},0\right)\right)\Big/\lambda_j^{(1)};$$
$$\vartheta^{(2)}\left(\overline{r},0\right) = \frac{1}{\overline{r}}\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_j^{(2)}\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}\right) + B_{Rj}^{(2)}\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\overline{r}\right)\right].$$

Для визначення $A_j^{(2)}, B_j^{(2)}, B_j^{(1)}$ позначимо через $\Delta_k\left(\mu_j\right)\left(k=\overline{1,3}\right)$ алгебраїчні доповнення Δ_{il} l-ого елемента p_{il} i-ого рядка визначника $\Delta\left(\mu_j\right)$ відповідно. Зокрема,

$$\Delta_1\left(\mu_j,1,\overline{r}_*\right) = f\,p_{12}p_{23}, \quad \Delta_2\left(\mu_j,1,\overline{r}_*\right) == -f\,p_{11}p_{23},$$
$$\Delta_3\left(\mu_j,1,\overline{r}_*\right) == f\,\left(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}\right), \quad f = \vartheta^{(1)}\left(0,\overline{z},0\right). \tag{21}$$

Неважко бачити, що сталі $A_j^{(2)}$, $B_j^{(2)}, B_j^{(1)}$, які відповідають кореневі μ_j, зв’язані з алгебраїчними доповненнями співвідношеннями [15]:

$$\frac{A_j^{(2)}}{\Delta_1\left(\mu_j\right)} = \frac{B_j^{(2)}}{\Delta_2\left(\mu_j\right)} = \frac{B_j^{(1)}}{\Delta_3\left(\mu_j\right)} = M_j.$$

Звідки $A_j^{(2)} = M_j\Delta_1\left(\mu_j\right)$, $B_j^{(2)} = M_j\Delta_2\left(\mu_j\right)$, $B_j^{(1)} = M_j\Delta_3\left(\mu_j\right)$. Підставивши ці значення сталих у співвідношення (14), (15), отримаємо

$$\vartheta^{(1)}(r,\tau)=\frac{1}{r}\left[\sum_{j=1}^{\infty}M_j\Delta_3\left(\mu_j\right)\sin\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(1)}}\right)\right]e^{-\mu_j^2\tau},$$

$$\vartheta^{(2)}(r,\tau)=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}M_j\left[\Delta_1\left(\mu_j\right)\cos+\Delta_2\left(\mu_j\right)\sin\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(2)}}\right)\right]e^{-\mu_j^2\tau}.$$

Для визначення $M_j^{(i)}$ використаємо початкову умову

$$\vartheta_0^{(i)}(r,0)=c_z(z,0)-c^{(i)}(r,z,0);$$

$$\vartheta_0^{(1)}(r,0)=\frac{1}{r}\left[\sum_{j=1}^{\infty}M_j\Delta_3\left(\mu_j\right)\sin\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(1)}}\right)\right];$$

$$\vartheta_0^{(2)}(r,0)=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}M_j\Theta_j^{(2)}\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{\tilde{D}^{(1)}}}r\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}M_j\left[\Delta_1\left(\mu_j\right)\cos\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(2)}}\right)+\Delta_2\left(\mu_j\right)\sin\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^{(2)}}\right)\right]. \quad (22)$$

Відомо, що ортонормовані розв'язки диференціальних рівнянь є фундамент-тальними. Так знайдені функції $\vartheta_j^i\left(\mu_j r\Big/\sqrt{\tilde{D}^i}\right)$ не є ортогональними в межах кожної області. Ортогоналізуємо їх сукупність у межах радіуса всієї кульки. Для цього знайдемо такі сталі множники N_i, щоб

$$N_1\int_0^{r_*}\bar{r}^2\vartheta_j^{(1)}\vartheta_k^{(1)}dr+N_2\int_{r_*}^{R}\bar{r}^2\vartheta_j^{(2)}\vartheta_k^{(2)}dr=\begin{cases}0 & \text{для} \quad j\neq k;\\ \tilde{Q}_j & \text{для} \quad j=k,\end{cases}$$

де $\tilde{Q}_j=N_1\int_0^{r_*}r^2\left(\vartheta_j^{(1)}\right)^2dr+N_2\int_{r_*}^{R}r^2\left(\vartheta_j^{(2)}\right)^2dr$.

Застосуємо формулу Остроградського для спряжених операторів [10], [15-17], отримаємо для $j\neq k$ [11]:

$$N_1\int_0^{r_*}\bar{r}^2\vartheta_j^{(1)}\vartheta_k^{(1)}dr+N_2\int_{r_*}^{R}\bar{r}^2\vartheta_j^{(2)}\vartheta_k^{(2)}dr=$$

$$=\frac{\bar{r}_*^2}{\mu_j^2-\mu_k^2}\left(N_1\tilde{D}_i^{(1)}-N_2\tilde{D}_i^{(2)}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)\left(\vartheta_j^{(1)}\frac{d\vartheta_k^{(1)}}{d\bar{r}}-\vartheta_k^{(1)}\frac{d\vartheta_j^{(1)}}{d\bar{r}}\right)_{\bar{r}=\bar{r}_*}+$$

$$+N_2\tilde{D}_i^{(2)}\vartheta_j^{(2)}\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{\tilde{D}_i^{(2)}}}R\right)\left(\frac{d\vartheta_k^{(2)}}{d\bar{r}}+\frac{kR}{\tilde{D}_i^{(2)}}\vartheta_j^{(2)}\right)_{\bar{r}=1},$$

де $a_{11} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = \dfrac{\tilde{D}^{(1)}}{\tilde{D}^{(2)}}$. Для того, щоб цей вираз дорівнював нулеві, необхідно покласти $N_1 \tilde{D}_i^{(1)} - N_2 \tilde{D}_i^{(2)} \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = N_1 \tilde{D}_i^{(1)} - N_2 \tilde{D}_i^{(1)} = 0$, тобто $N_1 = N_2 = C$ де C — довільна стала. Використовуючи поняття ортогональності власних функцій (20) для $\vartheta^{(i)}(r,z,0) = c_z(z,0) - c_0{}^{(i)}(r,z,0) = const$, знаходимо коефіцієнти M_j:

$$M_j = \frac{N_1 \left[c_{z0}^{(1)}(\bar{z}) - c_0^{(1)}(\bar{r},\bar{z}) \right] \int\limits_0^{\bar{r}_*} \bar{r}^2 \vartheta_j^{(1)} d\bar{r} + N_2 \left[c_{z0}^{(2)}(\bar{z}) - c_0^{(2)}(\bar{r},\bar{z}) \right] \int\limits_{\bar{r}_*}^{1} \bar{r}^2 \vartheta_j^{(2)} d\bar{r}}{N_1 \int\limits_0^{\bar{r}_*} \bar{r}^2 \left(\vartheta_j^{(1)} \right)^2 d\bar{r} + N_2 \int\limits_{\bar{r}_*}^{1} \bar{r}^2 \left(\vartheta_j^{(2)} \right)^2 d\bar{r}}. \quad (23)$$

За сталою M_j, визначеною зі співвідношення (23), знаходимо $A_j^{(2)}$, $B_j^{(2)}$, $B_j^{(1)}$. Концентрація вологи в окремій зернині залежно від координати $\bar{z}$ її розміщення в шарі визначається за формулою (8): $c^{(i)}(r,\bar{z},\tau) = c_z(\bar{z}) - \vartheta^{(i)}(r,\bar{z},\tau)$. Для визначення $c_z(z)$ необхідно розв’язати рівняння (6) із відповідними граничними умовами [3].

3. Масоперенос у міжзерновому середовищі та зерні

За прийнятих припущень процес конвективної дифузії в міжзерновому просторі шару завтовшки $z = L$, складеного з однакових зернин, є швидким порівняно з процесом дифузії вологи з об’єму зерна до його поверхні. Тому подальший аналіз процесу осушення виконаємо в квазістатичному наближенні, тобто з розв’язку задачі для рівняння

$$D_z \frac{d^2 c_z}{\partial z^2} - \upsilon \frac{dc_z}{\partial z} + J(\tau) = 0, \qquad J(\tau) = c_z J_0(\tau) - c_0 J_0(\tau). \quad (24)$$

Тут $J_0(\tau) = -\alpha \tilde{D}^{(2)} \left. \dfrac{\partial c^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R} = -\alpha \tilde{D}^{(2)} \left. \dfrac{\partial c^{(2)}}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1}$, $\left. \dfrac{\partial c^{(2)}}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1}$ визначається за формулою

$$\frac{\partial c^{(2)}(r,\tau)}{\partial r}\Big|_{\bar{r}=1} = \sum_{j=1}^{n} M_j e^{-\mu_j^2 \tau} \left[\Delta_1 \left(\cos\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)} \sin\lambda_{Rj}^{(2)} \right) - \Delta_2 \left(-\sin\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)} \cos\lambda_{Rj}^{(2)} \right) \right].$$

Рівняння (24) будемо розв’язувати за граничних умов:

$$c_z\big|_{z=0} = 0, \qquad c_z\big|_{z=L} = c_z^n, \quad (25)$$

де c_z^n — концентрація насиченої пари.

Розв'язок задачі (24), (25) шукаємо методом варіації сталих [16]. Після відповідних обчислень маємо [3].

$$c_z(z,\tau) = -K_1 e^{\lambda_1 z} + K_2 e^{\lambda_2 z} + c_0 . \tag{26}$$

Тут $K_1 = \left(c_0 e^{\lambda_2 L} + c_z^n - c_0\right)\Delta^{-1}$, $K_2 = \left(c_0 e^{\lambda_1 L} + c_z^n - c_0\right)\Delta^{-1}$, $\Delta = e^{\lambda_2 L} - e^{\lambda_1 L}$, $\lambda_{1/2} = \left[\upsilon \pm \left(\upsilon^2 - 4D_z J_0(\tau)\right)^{1/2}\right] \Big/ \left(2D_z\right)$, υ — швидкість конвективного продуву зернового шару [3].

Надалі зручно використовувати безрозмірну координату $\bar{z} = z/L$. Тоді

$$c_z\left(\bar{z},\tau\right) = -K_1 e^{\bar{\lambda}_1 \bar{z}} + K_2 e^{\bar{\lambda}_2 \bar{z}} + c_0 , \tag{27}$$

де $\bar{\lambda}_i = L\lambda_i$, при цьому $\vartheta^{(1)}(r,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{1j}(\tau) \frac{\sin\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}\right)}{\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}\right)}$; $c^{(1)}\left(\bar{r},\bar{z},\tau\right) = c_z\left(\bar{z},\tau\right) - \sum_{j=1}^{\infty} A_{1j}(\tau) \frac{\sin\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}\right)}{\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}\right)}$, $\vartheta^{(2)}(r,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{2j}(\tau)\frac{\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right)}{\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right)} + A_{3j}(\tau)\frac{\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right)}{\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right)}\right]$; $c^{(2)}\left(\bar{r},\bar{z},\tau\right) = c_z\left(\bar{z},\tau\right) - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}}\left[A_{2j}(\tau)\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right) + A_{3j}(\tau)\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}\right)\right]$; $A_{1j}(\tau) = \lambda_{Rj}^{(1)} M_j \Delta_3\left(\mu_j\right) e^{-\mu_j \tau}$, $A_{2j}(\tau) = \lambda_{Rj}^{(2)} M_j \Delta_1\left(\mu_j\right) e^{-\mu_j \tau}$, $A_{3j}(\tau) = M_j \Delta_2\left(\mu_j\right) e^{-\mu_j \tau}$.

На основі цих розв'язків досліджено зміни концентрації вологи в зерні залежно від швидкості продуву шару, місця розміщення зернини в шарі, товщини ендосперму пшениці сорту ОД-16. Для розрахунку взято такі експериментальні дані: концентрація вологи у початковий момент часу $c_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$; товщина шару зерна L = 1000 мм; об'єм зернини V = 16,77 мм^3; швидкість продуву $\upsilon = 1$ мм/с, 10 мм/с; ефективний коефіцієнт дифузії вологи $\tilde{D}^{(2)} = 1{,}34 \cdot 10^{-3}$ мм^2/с; приведений коефіцієнт масообміну $H = 10^{-7}$; еквівалентний радіус зернини $R = 2{,}00086$ мм; критерій Фур'є $Fo = 2{,}00086 \cdot 10^{-7}$; коефіцієнт дифузії $D_z = 10^2$ мм^2/с; концентрація насиченої пари $c_z^n = 1{,}34 \cdot 10^{-3}$; механічна стала $\xi = 3K/\left(3K + G\right) = 0{,}5$; коефіцієнт Пуассона ν = 0,2; модуль Юнга $E = 16{,}4 \cdot 10^3$ г/мм^2; концентраційний коефіцієнт об'ємного розширення $\beta = -2{,}71389 \cdot 10^{-4}$ мм/с; модуль зсуву $G = 6{,}8333 \cdot 10^3$ г/мм^2; модуль всестороннього об'ємного стиску $K = 9{,}11111 \cdot 10^3$ г/мм^2; межа неоднорідності $r_* = 0{,}9R$. Результати розрахунку наведені у таблиці.

Таблиця

Зміна концентрації вологи в зерні пшениці з урахуванням неоднорідності структурної будови залежно від місця розміщення зернини за товщиною зернового шару за різних швидкостей продуву

$\bar{z}^* = 0{,}1$; $\bar{r}^* = 0{,}9$; $\upsilon = 1$ мм/с	$\bar{r} = 0{,}1$`	$\bar{r} = 0{,}5$`	$\bar{r} = 0{,}9$`	$\bar{r} = 0{,}91$	$\bar{r} = 0{,}95$	$\bar{r} = 0{,}97$
τ год	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$1.2044\cdot10^{-4}$	$1.34388\cdot10^{-5}$	$8.63073\cdot10^{-6}$	$3.6326\cdot10^{-5}$	$3.2406\cdot10^{-4}$	$5.72048\cdot10^{-5}$
1	$9.28728\cdot10^{-5}$	$1.12229\cdot10^{-5}$	$7.4007\cdot10^{-6}$	$3.80581\cdot10^{-5}$	$2.58654\cdot10^{-4}$	$5.82528\cdot10^{-5}$
2	$7.29057\cdot10^{-5}$	$9.36625\cdot10^{-6}$	$6.27566\cdot10^{-6}$	$3.69094\cdot10^{-5}$	$2.07899\cdot10^{-4}$	$5.50942\cdot10^{-5}$
3	$5.80433\cdot10^{-5}$	$7.80641\cdot10^{-6}$	$5.28397\cdot10^{-6}$	$3.41572\cdot10^{-5}$	$1.68038\cdot10^{-4}$	$4.99059\cdot10^{-5}$
4	$4.67148\cdot10^{-5}$	$6.49633\cdot10^{-6}$	$4.42883\cdot10^{-6}$	$3.06474\cdot10^{-5}$	$1.36411\cdot10^{-4}$	$4.39692\cdot10^{-5}$
$\upsilon = 10$мм/с	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$1.20472\cdot10^{-4}$	$1.34708\cdot10^{-5}$	$8.66273\cdot10^{-6}$	$3.6358\cdot10^{-5}$	$3.24092\cdot10^{-4}$	$5.72368\cdot10^{-5}$
1	$9.29204\cdot10^{-5}$	$1.12705\cdot10^{-5}$	$7.4831\cdot10^{-6}$	$3.81057\cdot10^{-5}$	$2.58702\cdot10^{-4}$	$5.83004\cdot10^{-5}$
2	$7.29641\cdot10^{-5}$	$9.42473\cdot10^{-6}$	$6.33414\cdot10^{-6}$	$3.69094\cdot10^{-5}$	$2.07958\cdot10^{-4}$	$5.51527\cdot10^{-5}$
3	$5.81092\cdot10^{-5}$	$7.87228\cdot10^{-6}$	$5.34983\cdot10^{-6}$	$3.4223\cdot10^{-5}$	$1.68104\cdot10^{-4}$	$4.99718\cdot10^{-5}$
4	$4.67855\cdot10^{-5}$	$6.56701\cdot10^{-6}$	$4.49951\cdot10^{-6}$	$3.0718\cdot10^{-5}$	$1.36481\cdot10^{-4}$	$4.40399\cdot10^{-5}$
$\bar{z} = 0{,}5$ $\bar{r}^* = 0{,}9$ $\upsilon = 1$ мм/с	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$1.29165\cdot10^{-4}$	$2.21639\cdot10^{-5}$	$1.73558\cdot10^{-5}$	$4.50511\cdot10^{-5}$	$3.32785\cdot10^{-4}$	$6.59299\cdot10^{-5}$
1	$1.0153\cdot10^{-4}$	$1.98803\cdot10^{-5}$	$1.60581\cdot10^{-5}$	$4.67155\cdot10^{-5}$	$2.67311\cdot10^{-4}$	$6.69102\cdot10^{-5}$
2	$8.15159\cdot10^{-5}$	$1.79765\cdot10^{-5}$	$1.48859\cdot10^{-5}$	$4.55196\cdot10^{-5}$	$2.1651\cdot10^{-4}$	$6.37044\cdot10^{-5}$
3	$6.66215\cdot10^{-5}$	$1.63846\cdot10^{-5}$	$1.38621\cdot10^{-5}$	$4.27354\cdot10^{-5}$	$1.76616\cdot10^{-4}$	$5.84841\cdot10^{-5}$
4	$5.52722\cdot10^{-5}$	$1.50536\cdot10^{-5}$	$1.29861\cdot10^{-5}$	$3.92047\cdot10^{-5}$	$1.44968\cdot10^{-4}$	$5.25265\cdot10^{-5}$
$\upsilon = 10$мм/с	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$1.29322\cdot10^{-4}$	$2.23208\cdot10^{-5}$	$1.75127\cdot10^{-5}$	$4.5208\cdot10^{-5}$	$3.32942\cdot10^{-4}$	$6.60868\cdot10^{-5}$
1	$1.01764\cdot10^{-4}$	$2.01137\cdot10^{-5}$	$1.629151\cdot10^{-5}$	$4.69489\cdot10^{-5}$	$2.67545\cdot10^{-4}$	$6.71436\cdot10^{-5}$
2	$8.18027\cdot10^{-5}$	$1.82632\cdot10^{-5}$	$1.51727\cdot10^{-5}$	$4.58064\cdot10^{-5}$	$2.16796\cdot10^{-4}$	$6.39912\cdot10^{-5}$
3	$6.66445\cdot10^{-5}$	$1.67076\cdot10^{-5}$	$1.41851\cdot10^{-5}$	$4.30584\cdot10^{-5}$	$1.76939\cdot10^{-4}$	$5.88071\cdot10^{-5}$
4	$5.56188\cdot10^{-5}$	$1.54002\cdot10^{-5}$	$1.33327\cdot10^{-5}$	$3.95513\cdot10^{-5}$	$1.45314\cdot10^{-4}$	$5.28731\cdot10^{-5}$
$\bar{z}^* = 0{,}9$; $\bar{r}^* = 0{,}9$ $\upsilon = 1$ мм/с	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$6.13116\cdot10^{-4}$	$5.06115\cdot10^{-4}$	$5.01307\cdot10^{-4}$	$5.29002\cdot10^{-4}$	$8.16736\cdot10^{-4}$	$5.49881\cdot10^{-4}$
1	$5.85481\cdot10^{-4}$	$5.03831\cdot10^{-4}$	$5.00009\cdot10^{-4}$	$5.30666\cdot10^{-4}$	$7.51262\cdot10^{-4}$	$5.50861\cdot10^{-4}$

2	$5.65456\cdot10^{-4}$	$5.01927\cdot10^{-4}$	$4.98836\cdot10^{-4}$	$5.2947\cdot10^{-4}$	$7.0046\cdot10^{-4}$	$5.47655\cdot10^{-4}$
3	$5.50572\cdot10^{-4}$	$5.00335\cdot10^{-4}$	$4.97813\cdot10^{-4}$	$5.26686\cdot10^{-4}$	$6.60567\cdot10^{-4}$	$5.42435\cdot10^{-4}$
4	$5.39223\cdot10^{-4}$	$4.99004\cdot10^{-4}$	$4.96936\cdot10^{-4}$	$5.23155\cdot10^{-4}$	$6.28918\cdot10^{-4}$	$5.36477\cdot10^{-4}$
$\upsilon = 10$мм/с	$c^{(1)}$			$c^{(2)}$		
0	$6.13274\cdot10^{-4}$	$5.06272\cdot10^{-4}$	$5.01464\cdot10^{-4}$	$5.2916\cdot10^{-4}$	$8.16894\cdot10^{-4}$	$5.50038\cdot10^{-4}$
1	$5.85715\cdot10^{-4}$	$5.04065\cdot10^{-4}$	$5.00243\cdot10^{-4}$	$5.309\cdot10^{-4}$	$7.51496\cdot10^{-4}$	$5.51095\cdot10^{-4}$
2	$5.65754\cdot10^{-4}$	$5.02215\cdot10^{-4}$	$4.99124\cdot10^{-4}$	$5.29758\cdot10^{-4}$	$7.00748\cdot10^{-4}$	$5.47655\cdot10^{-4}$
3	$5.50896\cdot10^{-4}$	$5.00659\cdot10^{-4}$	$4.98137\cdot10^{-4}$	$5.2701\cdot10^{-4}$	$6.60891\cdot10^{-4}$	$5.42759\cdot10^{-4}$
4	$5.3957\cdot10^{-4}$	$4.99352\cdot10^{-4}$	$4.97284\cdot10^{-4}$	$5.23503\cdot10^{-4}$	$6.29266\cdot10^{-4}$	$5.36825\cdot10^{-4}$

Висновки. Результати обчислень показали, що з підвищенням швидкості υ продуву шару зерна пшениці інтенсивність випаровування вологи з зернини збільшується. Такий підхід дозволяє визначити залежність концентрації пароповітряної суміші від коефіцієнтів дифузії в зерні та міжзерновому середовищі шару, розмірів зернини для різних сортів зерна, для яких можна виділити ядро (ендосперму) й оболонку, оскільки відомо, що для різних культур характеристики ядра й оболонок різні (зокрема, для рису, кукурудзи, ячменю, жита тощо). У наведеному числовому прикладі прийнято, що безрозмірна товщина ядра становить $0{,}9R$, а товщина оболонки становить $0{,}1R$. Відношення коефіцієнта ефективної дифузії до коефіцієнта дифузії міжзернового середовища становить $1{,}34\cdot10^{-5}$. Ефективний радіус зернини визначався за формулою $r=\sqrt{3V/(4S)}$ [1], де V — об'єм і S — площа поверхні зернини. Розрахунки проведено для часів процесу осушення – 0,1,2,3,4 години. Показано, що для зерна, оболонка якого більш розрихлена, ніж ядро, йде спад концентрації вологи за радіусом в ядрі, а у разі переходу через поверхню неоднорідності концентрація пари збільшується, йде зростання концентрації і дальший спад вологи за товщиною оболонки. З часом концентрація вологи в зернині зменшується.

Отримані результати дозволяють визначити напружено-деформований стан у зернині довільної культури залежно від всіх параметрів і підібрати оптимальний режим сушіння зерна для його збереження.

Література

[1] *Егоров Г. А.* Технологические свойства зерна. — Москва: Агропромиздат, 1985. — 334 с.

[2] *Егоров Г. А.* О некоторых особенностях увлажнения и обезвоживания зерна // Изв. вузов. Пищевая технология. — 1964. — № 1. — С. 13-18.

[3] *Гайвась Б.,Чапля Є., Логін Г.* Конвективне осушення шару зернистого матеріалу в усталеному режимі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 51-61.

[4] Уточнение расчетных формул площади внешней поверхности и обьема единичного зерна / *Г. А. Єгоров, Е. Д. Казаков, В. Т. Любушкин, Ж. П. Широкова* // Изв. вузов. Пищевая технология. — 1969. — № 4. — С. 34-37.

[5] *Беркутова Н. С., Казаков Е. Д.* О морфологическом строении оболочек и химическом составе зерна пшеницы целинного края // Изв. вузов. Пищевая технология. — 1964. — № 4. — С. 17-19.

[6] *Петренко Т. П., Костров В. И., Егоров Г. А.* Расчетно-аналитический метод определения эндосперма в зерне пшеницы // Изв. вузов. Пищевая технология. — 1992. — № 2. — С. 77-79.

[7] *Егоров Г. А.* Теплофизические свойства единичного зерна. — ЦНИТЭИХлебпролинформ, Информационный сборник. Научно технические достижения и передовой опыт в области хлебопродуктов. — Москва: 1996. — 68 с.
[8] *Зимин Е. М., Крутов В. С.* Движение влаги в зерновке при сушке // Механизация и электрификация сел. хоз-ва. — 2001. — № 4. — С. 11-13.
[9] *Муштаев В. И.* Основные теоретические положения конвективной сушки и уточненный метод расчета сушильных аппаратов. — Москва: МИХМ, 1971. — 81 с.
[10] *Фролов В. Ф.* Моделирование сушки дисперсных материалов. — Ленинград: Химия, 1987. — 206 с.
[11] *Krischer O., Kast W.* Die Wissenschaftlich Girunlagen der Trockungstechnik. 3 Aufl. — Berlin: Springer. 1978. — 489 s.
[12] *Рудобашта С. П.* Массоперенос в системах с твердой фазой. — Москва: Химия, 1980. — 248 с.
[13] *Плановский А. Н., Муштаев В. И., Ульянов В. М.* Сушка дисперсных материалов в химической промышленности. — Москва: Химия, 1979. — 288 с.
[14] *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. — Київ: Наук. думка, 2006. — 272 с.
[15] *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. — Москва: Гостехиздат, 1956. — 386 с.
[16] *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — Москва: Высшая школа, 1964. — 559 с.
[17] *Комаров Г. Н.* Нестационарная теплопроводность многослойных систем. Институт механики АН УССР. Доклады совещания. — 1967. — Вып. 7. — С. 35-38.

Convective drying of granular material with taking into account two-layered structure of an individual grain

Bohdana Hayvas, Yevhen Chaplya

The problem of drying the layer of inhomogeneous granular material blown through in steady state is considered. Significantly different intensities of the processes of moisture transport in intergranular medium and in a separate grain are taken into account. We have found analytical solutions for the moisture content field distribution in a single grain depending on the depth of its location in the layer. The patterns of moisture changes of individual grains of the layer in time and their dependence on parameters of changes of blowing through heterogeneity, blowing through speed, grain location in the layer, the initial moisture content both of the grain and the intergranular medium are studied.

Конвективная сушка зернистого материала с учетом двухслойной структуры отдельной зерновки

Богдана Гайвась, Евгений Чапля

Рассмотрена задача сушки слоя зернистого неоднородного материала в установившемся режиме его продува. Учтены существенно различные интенсивности процессов переноса влаги в межзеренном пространстве и отдельной зерновке. Найдены аналитические решения для распределения поля влагосодержания в отдельном зерне в зависимости от глубины его расположения в слое. Исследованы закономерности изменения влажности отдельных зерен слоя во времени и их зависимость от параметров неоднородности, скорости продува, месторасположения зерновки в слое, начальной влажности в зерне и межзеренной среде.

Отримано 26.09.14