УДК 519.86

# Дослідження стійкості системної моделі енергозалежної економіки

Олена Гайдучок

К. е. н., Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: olena.gaiduchok@gmail.com

*Описано системну модель економіки як нелінійну систему диференціальних рівнянь для основних макроекономічних показників енергозалежної економіки — потужностей секторів, капіталу, ціни продукту, цін газу, нафти, вугілля, заробітної плати. Для дослідження стійкості системи запропоновано використання системи першого наближення. Побудовано лінеаризовану систему. Досліджено стійкість розв'язків системи на основі аналізу власних значень системи першого наближення. Встановлено області стійкості системної моделі економіки.*

**Ключові слова**: системний аналіз, енергозалежна економіка, система диференціальних рівнянь, система першого наближення, власні значення, стійкість.

**Вступ.** Для дослідження впливу ціни на імпортовані енергоресурси, на діяльність економіки в цілому використано системний підхід до моделювання економіки. Функціонування економіки як системи описується системою диференціальних рівнянь складного вигляду. Для того, щоб коректно зробити прогнози про значення економічних показників (ціни на продукт, заробітної плати, ціни на газ, тощо) потрібно дослідити систему диференціальних рівнянь на стійкість. У тому випадку, якщо розв'язок системи диференціальних рівнянь є нестійкий, то виникають точки біфуркації, які вказують на можливі різні варіанти прогнозних траєкторій розвитку системи.

## 1. Системна модель економіки

*Виробництво* розділено на два сектори. У першому секторі виробляється однорідний кінцевий продукт, частина якого використовується як споживчий продукт для населення, а частина — як фондоутворювальний продукт для створення виробничих потужностей. У другому секторі виробляється однорідний продукт — енергія (нафта, газ і вугілля), частина якої витрачається першим сектором у процесі виробництва, а частина — для кінцевого споживання населенням.

*Населення* поділяється на працівників і власників. І працівники, і власники споживають продукт першого сектора й енергію (нафтопродукт, газ і вугілля) у фіксованих пропорціях, тому що вважається, що споживання енергії доповнює споживання кінцевого продукту. Доходом працівників є заробітна плата, вона витрачається на споживання.

*Ринок енергії.* Енергія не запасається, тому ціна на енергію коливається залежно від співвідношення попиту та пропозиції на неї. Вважається, що виробники створюють єдину систему забезпечення енергією. Тому, коли попит менший від пропозиції, ціна на енергію зменшується значно повільніше, ніж вона зростає, коли пропозиція менша, ніж попит.

*Банківська система.* Вважається, що банківська система зобов'язана резервувати депозити золотом, золото складає фіксовану вартісну частку виробленого продукту. Враховується той факт, що енергетична сировина імпортується ззовні. Щоб забезпечити надходження імпортної сировини, банківська система повинна дати доручення зовнішній банківській системі оплатити виробникам енергетичної сировини імпорт в їх власній валюті. Для цього зовнішня банківська система відкриває депозитний кореспондентський рахунок у нашій банківській системі. На цей рахунок перераховується сума, рівна вартості імпортованої сировини за ціною, яка дорівнює ціні сировини (газу, нафти та вугілля разом) на зовнішньому ринку.

Із врахуванням усіх вище перелічених міркувань (а також результатів робіт [1-3]) отримано замкнуту систему диференціально-функціональних рівнянь для потужностей секторів і капіталу та ціни на продукт першого сектора, заробітної плати, цін на газ, нафту, вугілля. Виведення всіх основних змінних повністю подано в роботі [1]:

$$\frac{dM_1}{dt} = \left( \frac{kk_1}{p_1 b_1} f_1\left(x_1^1, x_1^G, x_1^N, x_1^V\right) - \mu_1 \right) M_1 +$$

$$+ \frac{k_1}{p_1 b_1}\left( \mu_1^* K_1 + \mu_{2,G}^* K_2^G + \mu_{2,N}^* K_2^N + \mu_{2,V}^* K_2^v \right);$$

$$\frac{dM_2^G}{dt} = I_2^G - \mu_2^G M_2^G; \qquad \frac{dM_2^N}{dt} = I_2^N - \mu_2^N M_2^N; \qquad \frac{dM_2^V}{dt} = I_2^V - \mu_2^V M_2^V;$$

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{k_1 k}{\xi^*} M_1 f_1\left(x_1^1, x_1^G, x_1^N, x_1^V\right) - \left(1 - k_1\right)\mu_1^* K_1 +$$

$$+ k_1\left( \mu_{2,G}^* K_2^G + \mu_{2,N}^* K_2^N + \mu_{2,V}^* K_2^V \right);$$

$$\frac{dK_2^G}{dt} = I_2^G p_2^G b_2^G - \mu_{2,G}^* K_2^G; \qquad \frac{dK_2^N}{dt} = I_2^N p_2^N b_2^N - \mu_{2,N}^* K_2^N;$$

$$\frac{dK_2^V}{dt} = I_2^V p_2^V b_2^V - \mu_{2,V}^* K_2^V; \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{Q_1}{M_1} p_1;$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = M_1 f_1\left(x_1^1, x_1^G, x_1^N, x_1^V\right)\left(1 - \frac{k_1 k}{p_1 \xi^*}\right) -$$

$$- \frac{k_1}{p_1}\left( \mu_1^* K_1 + \mu_{2,G}^* K_2^G + \mu_{2,N}^* K_2^N + \mu_{2,V}^* K_2^V \right) - \frac{p_2^G b_2^G I_2^G + p_2^V b_2^V I_2^V + p_2^N b_2^N I_2^N}{p_1} -$$

$$-\frac{1}{p_1 + c^{0,G} p_2^G + c^{0,N} p_2^N + c^{0,V} p_2^V} \times$$

$$\times \left( c_0 p_1 M_1 f_1 \left( x_1^1, x_1^G, x_1^N, x_1^V \right) + s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\} \right);$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta} \max \left\{ 0, \frac{M_1 x_1^1}{P_0^A e^{\lambda_p t} U} - 1 \right\};$$

$$\frac{dp_2^G}{dt} = -\alpha_2 \left( M_2^G f_2 \left( \frac{V_E^G}{M_2^G} \right), M_1 x_1^G + \frac{c^{L,G} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\} + c^{0,G} c^0 p_1 M_1 f_1}{p_1 + c^{L,G} p_2^G} \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{M_1 x_1^G + c^{L,G} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\} \Big/ \left( p_1 + c^{L,G} p_2^G \right)}{M_2^G f_2 \left( V_E^G / M_2^G \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{p_2^g c^{0,G} c^0 p_1 M_1 f_1 \left( x_1^1, x_1^G, x_1^V, x_1^N \right)}{M_2^G f_2 \left( V_E^G / M_2^G \right) \left( p_1 + c^{0,G} p_2^G \right)} \right);$$

$$\frac{dp_2^N}{dt} = -\alpha_2 \left( M_2^N f_2 \left( \frac{V_E^N}{M_2^N} \right), M_1 x_1^N + \frac{c^{L,N} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\}}{p_1 + c^{L,N} p_2^N} + \frac{c^{0,N} c^0 p_1 M_1 f_1}{p_1 + c^{0,N} p_2^N} \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{M_1 x_1^N + \dfrac{c^{L,N} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\}}{p_1 + c^{L,N} p_2^N} + \dfrac{c^{0,N} c^0 p_1 M_1 f_1 \left( x_1^1, x_1^G, x_1^V, x_1^N \right)}{p_1 + c^{0,N} p_2^N}}{M_2^N f_2 \left( \dfrac{V_E^N}{M_2^N} \right)} \right) p_2^N;$$

$$\frac{dp_2^V}{dt} = -\alpha_2 \left( M_2^V f_2 \left( \frac{V_E^V}{M_2^V} \right), M_1 x_1^V + \frac{c^{L,V} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\}}{p_1 + c^{L,V} p_2^V} + \frac{c^{0,V} c^0 p_1 M_1 f_1}{p_1 + c^{0,V} p_2^V} \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{M_1 x_1^V + \dfrac{c^{L,V} s \min \left\{ M_1 x_1^1, P_0^A U e^{\lambda_p t} \right\}}{p_1 + c^{L,V} p_2^V} + \dfrac{c^{0,V} c^0 p_1 M_1 f_1 \left( x_1^1, x_1^G, x_1^V, x_1^N \right)}{p_1 + c^{0,V} p_2^V}}{M_2^V f_2 \left( \dfrac{V_E^V}{M_2^V} \right)} \right) p_2^V;$$

$$\frac{dk_1}{dt} = \delta \left[ p_2^G b_2^G I_2^G \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2^G} \right) + p_2^V b_2^V I_2^V \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2^V} \right) + p_2^N b_2^N I_2^N \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2^N} \right) - \right.$$

$$-\frac{s\min\left\{M_1x_1^1, P_0^A Ue^{\lambda_p t}\right\}}{K_1}+\frac{kk_1}{K_1\xi^*}M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^N,x_1^V\right)-\left(1-k_1\right)\mu_1^*+\mu_{2,G}^*\left(1+\frac{k_1K_2^G}{K_1}\right)+$$

$$+\mu_{2,N}^*\left(1+\frac{k_1K_2^N}{K_1}\right)+\mu_{2,V}^*\left(1+\frac{k_1K_2^V}{K_1}\right)-\frac{M_1}{K_1}\left(p_2^Gx_1^G+p_2^Nx_1^N+p_2^Vx_1^V\right)-\frac{1}{K_2^G}\Big[p_2^G\times$$

$$\times\left(M_1x_1^G+\frac{c^{L,G}s\min\left\{M_1x_1^1,P_0^AUe^{\lambda_p t}\right\}}{p_1+c^{L,G}p_2^G}+\frac{c^{0,G}c^0p_1M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{p_1+c^{0,G}p_2^G}\right)+p_E^GM_2^Gx_2^G\Big]-$$

$$-\frac{1}{K_2^N}\left[p_E^NM_{f2}^Nx_2^N+p_2^N\left(M_1x_1^N+\frac{c^{L,N}s\min\left\{M_1x_1^1,P_0^AUe^{\lambda_p t}\right\}}{p_1+c^{L,N}p_2^N}+\frac{c^{0,N}c^0p_1Y_1}{p_1+c^{0,N}p_2^N}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{K_2^V}\left[p_2^V\left(M_1x_1^V+\frac{c^{L,V}s\min\left\{M_1x_1^1,P_0^AUe^{\lambda_p t}\right\}}{p_1+c^{L,V}p_2^V}+\frac{c^{0,V}c^0p_1M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{p_1+c^{0,V}p_2^V}\right)\right]+$$

$$+\frac{p_1}{K_1}\left(\frac{c_0p_1M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^N,x_1^V\right)+s\min\left\{M_1x_1^1,P_0^AUe^{\lambda_p t}\right\}}{p_1+c^{0,G}p_2^G+c^{0,N}p_2^N+c^{0,V}p_2^V}\right)+\frac{2D^0}{\frac{1}{\xi^*}\Omega^B\left(\frac{\beta}{\xi^*}\Omega^B+D^0\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{k}{\xi^*}M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^N,x_1^V\right)+\eta p_1M_1f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^N,x_1^V\right)-p_E^GM_2^Gx_2^G-p_E^NM_2^Nx_2^N-\right.$$

$$\left.-p_E^VM_2^Vx_2^V\right)-\left(p_2^Gb_2^GI_2^G+p_2^Vb_2^VI_2^V+p_2^Nb_2^NI_2^N\right)\left(\frac{1}{K_2^G}+\frac{1}{K_2^N}+\frac{1}{K_2^V}\right);$$

$$\frac{\partial f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{\partial x_1^1}=\frac{s}{p_1},\qquad \frac{\partial f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{\partial x_1^G}=\frac{p_2^G}{p_1},$$

$$\frac{\partial f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{\partial x_1^V}=\frac{p_2^V}{p_1},\qquad \frac{\partial f_1\left(x_1^1,x_1^G,x_1^V,x_1^N\right)}{\partial x_1^N}=\frac{p_2^N}{p_1}. \qquad (1)$$

## 2. Дослідження стійкості отриманої системи диференціальних рівнянь

Оскільки ця система диференціальних рівнянь є нелінійна складного вигляду, то важко дослідити аналітично її стійкість. У попередніх роботах [1] стійкість розв’язку системи досліджувалося програмно, за результатами комп’ютерного моделювання. Доведено, що за першого набору параметрів системи вона є стійка.

Для спроби аналітичного дослідження побудуємо лінійну систему першого наближення до системи (1).

Для цього автономну систему звичайних диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = f(x)$ запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \quad A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad R(x) = f(x) - Ax.$$

Далі використаємо твердження [4], що незбурений розв'язок системи диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами тоді і тільки тоді є:

а) стійкий, якщо дійсні частини характеристичного рівняння недодатні;

б) асимптотично стійкий, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння всі від'ємні.

Побудовано систему першого наближення до системи (1). Всі нелінійні функції розкладено у ряд Тейлора, згруповано подібні доданки. Отримано систему з 15 лінійних диференціальних рівнянь із 15 невідомими. Вона має вигляд:

$$\frac{dM}{dt} = M\lambda_1 - p\lambda_5 - p_1\lambda_6 + s\lambda_9 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 +$$
$$+K\lambda_{11} + K_1\lambda_{12} + K_2\lambda_{13} + K_3\lambda_{14} + k_1\lambda_{10} + \lambda_{21};$$
$$\frac{dM_1}{dt} = \lambda_{21} - \lambda_2 M_1; \quad \frac{dM_2}{dt} = \lambda_{21} - \lambda_3 M_2; \quad \frac{dM_3}{dt} = \lambda_{21} - \lambda_4 M_3;$$
$$\frac{dK}{dt} = k_{10}\lambda_1 - p\lambda_5 + M\lambda_1 + s\lambda_9 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 +$$
$$+K_1\lambda_{12} + K_2\lambda_{13} + K_3\lambda_{14} - \lambda_{21};$$
$$\frac{dK_1}{dt} = \lambda_6 p_1 - \lambda_{11}K_1; \quad \frac{dK_2}{dt} = \lambda_7 p_2 - \lambda_{12}K_2; \quad \frac{dK_3}{dt} = \lambda_8 p_3 - \lambda_{13}K_3;$$
$$\frac{dp}{dt} = Q\lambda_{11} + p\lambda_5 - M\lambda_1;$$
$$\frac{dQ}{dt} = M\lambda_1 + p\lambda_5 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 + k_1\lambda_{10} +$$
$$+s\lambda_9 + K_1\lambda_{12} + K_2\lambda_{13} + K_3\lambda_{14} + \lambda_{21};$$
$$\frac{ds}{dt} = \lambda_1 M + \lambda_9 s - \lambda_5 p;$$
$$\frac{dp_1}{dt} = M\lambda_1 + M_1\lambda_2 + p\lambda_5 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 + s\lambda_9 + \lambda_{21};$$
$$\frac{dp_2}{dt} = M\lambda_1 + M_2\lambda_3 + p\lambda_5 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 + s\lambda_9 + \lambda_{21};$$
$$\frac{dp_3}{dt} = M\lambda_1 + M_3\lambda_4 + p\lambda_5 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 + s\lambda_9 + \lambda_{21};$$

$$\frac{dk_1}{dt} = M\lambda_1 + p\lambda_5 + p_1\lambda_6 + p_2\lambda_7 + p_3\lambda_8 +$$
$$+s\lambda_9 + K\lambda_{11} + \lambda_{21} + K_1\lambda_{12} + K_2\lambda_{13} + K_3\lambda_{14} + k_1\lambda_{10}. \quad (2)$$

Систему подано лише для основних змінних, формули для обчислення констант не наводяться через надзвичайну громіздкість.

Для дослідження стійкості обрано виробничі функції квадратичного типу такого вигляду:

$$f_1(x, x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x^2 + a_2x_1^2 + a_3x_2^2 + a_4x_3^2.$$

Для перевірки стійкості обчислено власні значення системи за деяких наборів значень параметрів виробничих функції. Параметри системи обиралися близькими до сучасного економічного стану України упродовж останніх років. Дійсні частини власних значень перевірялися на додатність/від'ємність.

Встановлено, що для стійкості розв'язку системи необхідна близькість параметрів усіх виробничої функції до одиниці (більше 0,9). Якщо тільки один параметр є більшим від 0,95, то відразу порушується умова недодатності власних значень системи, тобто отриманий розв'язок не буде стійким. Тобто виникають точки біфуркації, опис яких потребує подальшого дослідження. Результати дослідження на стійкість підтверджуються ідеями, описаними у праці [5].

Умова одночасної близькості параметрів виробничої функції до одиниці є цілком реальна та близька до ринкових умов.

**Висновки.** Для дослідження стійкості системної моделі економіки побудовано систему першого наближення, здійснено аналіз її власних значення. Перевірено, що за умов, близьких до реальних, ця система є стійка. Тобто, за певного набору вхідних керуючих параметрів, системна модель економіки показує себе стійкою системою, відсутність точок біфуркацій у цьому випадку свідчить про єдиноможливий варіант прогнозних значень траєкторій системи. Отже, можна моделювати динаміку основних економічних агентів двохсекторної економіки на основі наведеної системи диференціальних рівнянь і досліджувати різні сценарії розвитку економіки.

## Література

[1] *Костробій П., Гайдучок О.* Математичне моделювання енергозалежної економіки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014 . — Вип. 19. — С. 74-83.

[2] *Гайдучок О.* Системне прогнозування двохсекторної економіки // Економіка: проблеми науки і практики; збірник наукових праць. — ДНУ, 2007. — Вип. 230, т. II. — С. 495-510.

[3] *Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А.* Опыт математического моделирования экономики. — Москва: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.

[4] *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Теорія стійкості: навч. посіб. Ч. 1. — Київ: Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2002. — 64 с.

[5] *Петров А. А.* Об экономике языком математики. — Москва: ФАЗИС, 2003. — 112 с.

## Investigation of the stability of energy-dependent economics system model

Olena Gaiduchok

*The system model of energy-dependent economics is described as a nonlinear system of differential equations for main macroeconomic indicators — investment capacity, capital, product price, gas-, oil-, coal prices, and wages are investigated. The first approximation system is suggested for investigating the stability of the system. The linearization of the system has been carried out. The stability of the solutions of the system is shown by analysing the eigenvalues of the first approximation system. The domain of the system model stability is established.*

## Исследование устойчивости системной модели энергозависимой экономики

Олена Гайдучок

*Описана системная модель экономики как нелинейная система дифференциальных уравнений для основных макроэкономических показателей энергозависимой экономики — мощностей секторов, капитала, цены продукта, цен газа, нефти, угля, заработной платы. Предложено применение системы первого приближения для исследования устойчивости системы. Построена линеаризованная система. Исследована устойчивость решений системы на основе анализа собственных значений системы первого приближения. Установлено области устойчивости системной модели экономики.*

**Представлено професором П. Костробієм**

Отримано 19.11.14