

Розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку

Ярослав Кунець¹, Валерій Матус²

¹ д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: matus@iapmm.lviv.ua

Запропоновано аналітико-числовий метод дослідження усталених SH-хвильових полів у необмеженому пружному середовищі, розсіяних пружним волокном за наявності міжфазного прошарку змінної товщини та низької жорсткості. Пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву. Алгоритм дослідження базується на модифікованому методі нульового поля. Проаналізовано вплив механічних і геометричних параметрів композиту на амплітудно-частотні характеристики SH-хвиль, розсіяних волокном неканонічної форми у дальню зону.

Ключові слова: розсіяння SH-хвиль, пружне волокно неканонічної форми, міжфазний прошарок, метод нульового поля.

Вступ. Вивченню впливу тонких прошарків на межі матриця-наповнювач на хвильові явища у композитах, армованих пружними волокнами, приділяється значна увага у науковій літературі. Актуальність цих проблем пов'язана головним чином із бажанням змоделювати наявність пошкоджень міжфазних поверхонь у матричних композитах і оцінити їх подальший вплив на ефективні властивості пружних структур [1-4]. Хоча наявність міжфазних пружних прошарків може носити конструктивний характер. У переважній більшості робіт розглядалися структури із пружними наповнювачами канонічних форм (кругові [2, 3], сферичні [4]) та міжфазними прошарками сталої товщини. При цьому прошарок, в основному, розглядали як пружне тіло, що ідеально контактує з матрицею та волокном, або ж його взаємодію із зовнішнім середовищем моделювали ефективними крайовими умовами неідеального контакту на межі розділу між включенням і матрицею [5, 6]. У пропонованій статті з цією метою використано спрощені асимптотично точні умови динамічного контакту пружних середовищ через прошарок малої жорсткості [7].

Одним із ефективних інструментів дослідження задач розсіяння хвиль різної фізичної природи об'єктами складної геометрії є метод нульового поля. За його допомогою взаємодію пружних хвиль з об'ємними включеннями розглядали переважно за умов ідеального контакту між неоднорідністю й оточуючим

середовищем [8-10]. Нижче цей метод перенесено і на випадок розсіяння SH-хвиль включенням неканонічної форми за наявності тонкого міжфазного прошарку змінної товщини та малої жорсткості.

1. Формулювання задачі розсіяння

Нехай в однорідному пружному необмеженому середовищі W_1 із модулем зсуву μ_1 та густиною ρ_1 міститься волокно W_2 з відповідними параметрами μ_2 та ρ_2 . Волокно оточене тонким прошарком W_0 з параметрами μ_0 та ρ_0 . Товщина прошарку $h(\mathbf{x})$ набагато менша за характерний розмір a області W_2 :

$$\varepsilon = a^{-1} \max_{\mathbf{x} \in \partial W_2} h(\mathbf{x}) \ll 1, \quad (1)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — декартові координати; ε — малий безрозмірний параметр.

За поздовжнього зсуву й усталених коливань переміщення в композиті задовольняють рівняння Гельмгольца [2, 10]:

$$(\Delta + k_j^2)u^j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j, \quad j=1,2; \quad u^1(\mathbf{x}) = u^{sc}(\mathbf{x}) + u^{in}(\mathbf{x}); \quad (2)$$

$$(\Delta + k_0^2)u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_0. \quad (3)$$

Тут $u^j(\mathbf{x})$ та k_j ($j = \overline{0,2}$) — переміщення та хвильові числа у прошарку, матриці та волокні відповідно; $u^{in}(\mathbf{x})$ та $u^{sc}(\mathbf{x})$ — набігаюча на волокно та розсіяна ним SH-хвилі.

Умови ідеального механічного контакту між складниками композиту й умову випромінювання на безмежності запишемо у вигляді [2]:

$$u^j(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mu_j \frac{\partial u^j(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_0 \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_0, \quad j=1,2; \quad (4)$$

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_1 r + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1 r}} f(\theta) + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty; \quad (5)$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

де $f(\theta)$ — комплексна амплітуда розсіяння SH-хвилі; (r, θ) — полярні координати.

Надалі розглядаємо випадок, якщо жорсткість прошарку набагато менша за жорсткість матриці та волокна, а довжини поздовжніх хвиль у складниках композиту набагато більші за товщину прошарку, тобто:

$$\frac{\mu_0}{\mu_j} \ll 1, \quad j=1,2; \quad k_j \max_{\mathbf{x} \in \partial W_2} |h(\mathbf{x})| \ll 1, \quad j = \overline{0,2}. \quad (6)$$

За обмежень (1), (6) замість умов (4) доцільно використовувати ефективні асимптотично точні умови механічного контакту матриці та волокна через тонкий пружний прошарок, записані на ∂W_2 [5-7]:

$$\begin{aligned} \gamma \left[u^1(\mathbf{x}) - u^2(\mathbf{x}) \right] &= h(\mathbf{x}) \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \gamma_2 \frac{\partial u^1(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial u^2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2; \\ \gamma &= \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, головний член асимптотичного розкладу розв'язку розглянутої задачі (2)-(5) за параметром ε визначається розв'язком задачі (2), (5), (7).

2. Модифікований метод нульового поля розв'язку задачі

Розв'язок задачі (2), (5), (7) шукаємо за допомогою методу нульового поля (методу T -матриць), базованого на інтегральних поданнях для переміщень у складових композиту [10]:

$$\begin{aligned} \int_S \left[u^1(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - G_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} u^1(\mathbf{x}') \right] dS + u^{in}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in W_2; \\ \int_S \left[u^1(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - G_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} u^1(\mathbf{x}') \right] dS + u^{in}(\mathbf{x}) &= u^1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_1; \\ \int_S \left[u^2(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - G_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} u^2(\mathbf{x}') \right] dS &= 0, \quad \mathbf{x} \in W_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $S = \partial W_2$, $G_j(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ — фундаментальні розв'язки рівнянь (2), які подаємо у вигляді розвинень за системою циліндричних хвильових функцій [8, 11]:

$$\begin{aligned} G_j(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \frac{i}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}') \operatorname{Re} \Psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}'| > |\mathbf{x}|; \\ \Psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}) &= H_m^{(1)}(k_j r) C_{\sigma m}(\theta), \quad C_{\sigma m}(\theta) = \begin{cases} \cos(m\theta), & \sigma=1, m=0,1,\dots, \\ \sin(m\theta), & \sigma=2, m=1,2,\dots \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Набігаючу на неоднорідність плоску гармонічну SH-хвилю подамо у вигляді [11]:

$$\begin{aligned} u^{in}(\mathbf{x}) &= u_0 \exp[-ik_1(x_1 \cos \theta_{in} + x_2 \sin \theta_{in})] = u_0 \sum_{\sigma, m} \varepsilon_m b_{\sigma m}^{in} \operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}), \\ b_{\sigma m}^{in} &= (-i)^m C_{\sigma m}(\theta_{in}). \end{aligned} \quad (10)$$

У виразах (9), (10) $H_m^{(1)}(x)$ — функція Ганкеля першого роду порядку m ; u_0 та θ_{in} — амплітуда та кут падіння хвилі; $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0}$ (δ_{m0} — символ Кронекера).

Враховуючи ортогональність тригонометричних функцій $C_{\sigma m}(\theta)$, із співвідношень (8)-(10) отримуємо:

$$\int_S \left[u_1 \frac{\partial}{\partial n} \Psi_{1\sigma m} - \Psi_{1\sigma m} \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS = 4iu_0 b_{\sigma m}^{in},$$

$$\int_S \left[u_2 \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \Psi_{2\sigma m} - (\operatorname{Re} \Psi_{2\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_2 \right] dS = 0, \quad (11)$$

$$\frac{i}{4} \int_S \left[u_1 \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m} - (\operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS = f_{\sigma m}, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad \sigma = 1, 2;$$

$$u^s(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma, m} f_{\sigma m} \Psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| > r_1, \quad (12)$$

де r_1 — радіус кола, описаного навколо неоднорідності.

Невідомі переміщення та напруження на контурі волокна шукаємо у вигляді рядів за системою тригонометричних функцій:

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \gamma h^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{\sigma, m} x_{1\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad u_2(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma, m} x_{2\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad (13)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \mathbf{x} \in \partial W_2.$$

Підставивши вираз (13) у рівняння нульового поля (11), з урахуванням крайових умов (7), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів $x_{1\sigma m}, x_{2\sigma m}$ ($S = \partial W_2$):

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 4iu_0 b_{\sigma m}^{in},$$

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 0 \quad m, m' = \overline{0, \infty}, \quad \sigma, \sigma' = 1, 2; \quad (14)$$

$$a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} = \int_S \left(\frac{\partial \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} - \frac{\gamma}{h(s)} \Psi_{1\sigma m} \right) C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} = \int_S \frac{\partial \operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} = \gamma \gamma_2 \int_S \frac{1}{h(s)} \operatorname{Re}(\Psi_{2\sigma m}) C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} = \int_S \frac{\partial \operatorname{Re} \Psi_{2\sigma m}}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS.$$

Із співвідношень (5), (8), (12), (14) знаходимо

$$f(\theta) = \sum_{\sigma, m} \varepsilon_m i^{-m} A_{\sigma m} C_{\sigma m}(\theta),$$

$$A_{\sigma m} = \sum_{\sigma', m'} (x_{1\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} + x_{2\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 2\sigma' m'}). \quad (15)$$

Знаючи розв'язок системи рівнянь (14), який отримуємо числовими методами за допомогою методу редукції, із співвідношення (15) обчислюємо амплітуду розсіяння SH-хвиль $f(\theta)$.

3. Числовий аналіз прикладів

Для прикладу, розглянемо розсіяння плоских SH-хвиль (10) на волокнах, контур поперечного перерізу яких задано параметричним рівнянням:

$$r(\beta) = a\sqrt{\frac{1 + \delta^2 - 2\delta \cos[(N+1)\beta]}{1 - \delta^2 N}}, \quad \theta(\beta) = \arctg \frac{\sin \beta + \delta \sin(N\beta)}{\cos \beta - \delta \cos(N\beta)}, \quad (16)$$

$$0 \leq \beta \leq 2\pi.$$

Товщину включення приймаємо у вигляді:

$$h(x) = \varepsilon a [1 + L_1 \sin(L_2 \theta + d)], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad x \in \partial W_2. \quad (17)$$

На рис. 1 зображено спектральні залежності нормованих амплітуд розсіяння $f_0 = u_0^{-1} |f(\theta_{sc})|$ (θ_{sc} — кут спостереження SH-хвиль, розсіяних у зону Фраунгофера) у випадку скляного включення ($\mu_2 = 29,9$ ГПа, $\rho_2 = 2550$ кг/м³) в епоксидній матриці ($\mu_1 = 1,28$ ГПа, $\rho_1 = 1250$ кг/м³). Припускається, що міжфазний прошарок

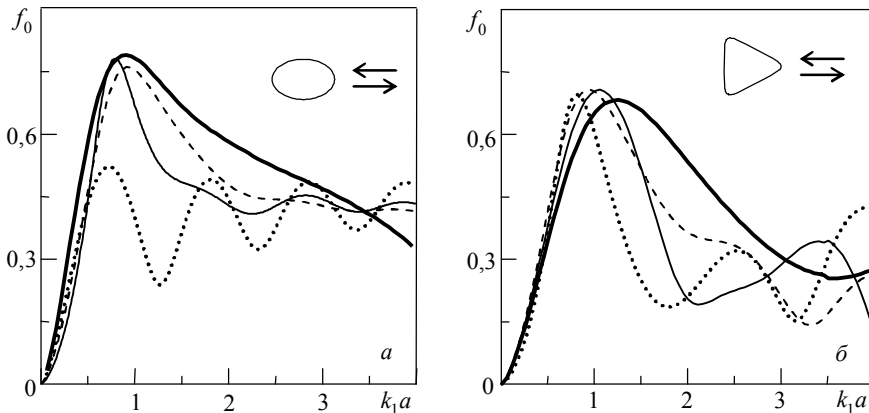


Рис. 1. Частотні залежності нормованих амплітуд розсіяння для різних форм волокна, якщо $\gamma_1 = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ і моностаціональному зондуванню ($\theta_m = \theta_{sc} = 0^\circ$): суцільні тонкі та штрихові криві відповідають значенням $\gamma_1 = 0,5$ і $\gamma_1 = 2$; суцільні жирні та точкові криві відповідають випадкам ідеального контакту матриці та волокна й отвору у матриці)

має сталу товщину $h(\mathbf{x}) = \varepsilon a$ та параметр контрастності $\gamma_1 = \mu_0 / (\varepsilon \mu_1) = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. На рис. 1а волокно еліптичної форми з відношенням півосей $b/a = 0,6$ (у співвідношенні (16) $N = 1$, $\delta = 0,25$), на рис. 1б — трикутної форми ($N = 2$, $\delta = 0,25$). За не надто малих значень параметра γ_1 у діапазонах низьких і середніх частот спектри амплітуд розсіювання не носять резонансного характеру. Причому у діапазоні середніх частот зростання жорсткості міжфазного прошарку призводить до зростання рівня нормованих амплітуд розсіювання, який, зазвичай, міститься між відповідними рівнями для випадків ідеального контакту матриці та волокна й вільного отвору у матриці. Причому, зі збільшенням хвильового розміру розсіювача $k_1 a$ різниця між цими рівнями нівелюється.

На рис. 2 зображено спектральні залежності нормованих амплітуд розсіювання f_0 за дуже малих жорсткостей міжфазних прошарків $\gamma_1 \ll 1$ і різних механічних властивостей матриці та волокна (поперечний переріз волокна — круг радіуса a). Для товщини включення у співвідношенні (17) приймалося $L_1 = 0,7$, $L_2 = 2$, $d = 0$. Отримані залежності мають чітко виражений резонансний характер у всьому розглянутому частотному діапазоні. Їхній фон для $\gamma_1 \ll 1$ практично не залежить від механічних параметрів композиту та збігається з відповідними залежностями для випадку кругового отвору радіуса a у матриці. Розміщення резонансів наближено збігається з власними частотами для областей, що визначають поперечний переріз волокон (у розглянутому випадку — з розв'язками рівняння $J_n(\gamma_2 k_1 a) = 0$; $J_n(x)$ — функція Бесселя n -ого порядку). Причому, у разі зростання параметра контрастності γ_1 спостерігається збільшення ширини резонансів і зміщення їх вправо.

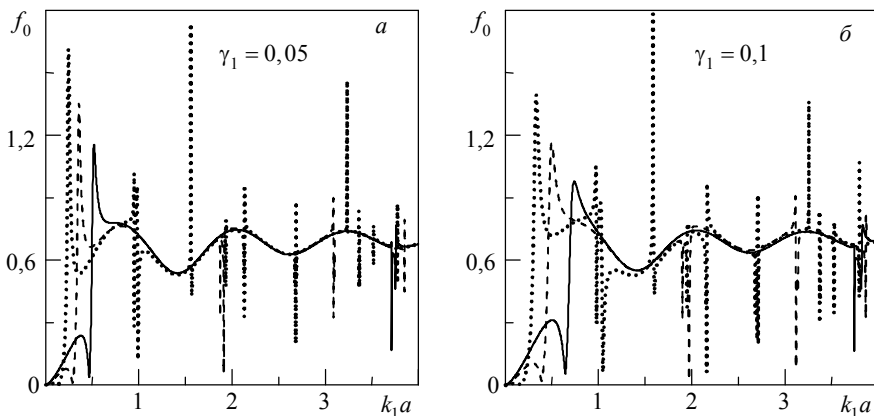


Рис. 2. Частотні залежності нормованих амплітуд розсіювання за дуже малих жорсткостей міжфазних прошарків $\gamma_1 \ll 1$ і моностатичного зондування $\theta_{in} = \theta_{sc} = 0^\circ$: суцільні, штрихові та точкові криві відповідають значенням $\gamma_2 = k_2/k_1 = 0,5, 1$ і 2

Висновки. Запропоновано методику дослідження хвильових явищ у пружному середовищі, що містить пружне волокно неканонічної форми, оточене тонким міжфазним прошарком змінної товщини та малої жорсткості. Композит перебуває в умовах поздовжнього зсуву й усталеного режиму збурення. Методика базується на асимптотично точній моделі динамічної взаємодії тонкої неоднорідності з пружним оточуючим середовищем і модифікованому методі нульового поля. Її можна перенести на випадок розповсюдження SH-хвиль у композиті із множинними розсіювачами.

З'ясовано, що за значень параметра контрастності матеріалу тонкого міжфазного прошарку $\gamma_1 = O(1)$ у діапазонах низьких і середніх частот спектри амплітуд розсіяння не мають резонансного характеру. Зі збільшенням хвильового розміру розсіювача різниця між рівнями цих амплітуд нівелюється. За дуже малих жорсткостей міжфазних прошарків $\gamma_1 \ll 1$ і різних механічних властивостей матриці та волокна спектри мають чітко виражений резонансний характер. Їхній фон практично не залежить від механічних параметрів композиту. Розміщення резонансів наближено збігається з власними частотами для областей, що визначають поперечний переріз волокон. Причому, зростання жорсткості матеріалу прошарку призводить до збільшення ширини резонансів і зміщення їх вправо.

Література

- [1] Locally resonant sonic materials / Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao et al. // Science. — 2000. — Vol. 289. — P. 1734-1736.
- [2] Cai L.-V. Scattering of antiplane shear waves by layered circular elastic cylinder // J. Acoust. Soc. Am. — 2004. — Vol. 115, No 2. — С. 515-522.
- [3] Wang X., Sudak L. J. Scattering of elastic waves by multiple elastic circular cylinders with imperfect interface // Waves in Random and Complex Media. — 2007. — Vol. 17, No 2. — P. 159-187.
- [4] Бутрак И. О., Кильнищкая Т. И., Михаськів В. В. Рассеяние гармонической упругой волны объемным включением при наличии тонкой прослойки // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76, № 3. — С. 476-483.
- [5] Mishuris G. S., Movchan N. V., Movchan A. B. Steady-state motion of a mode-III crack on imperfect interfaces // Q. J. Mech. Appl. Math. — 2006. — Vol. 59, No 4. — P. 487-516.
- [6] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [7] Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. — 1999. — Vol. 37. — P. 331-345.
- [8] Martin P. A. Multiple Scattering Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. — Cambridge University Press, Cambridge. — 2006. — 437 p.
- [9] Comprehensive T-matrix reference database: A 2004–06 update / M. I. Mishchenko, G. Videen, V. A. Babenko et al. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. — 2007. — Vol. 106. — P. 304-324.
- [10] Waterman P. C. T-matrix methods in acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Am. — 2009. — Vol. 125, No 1. — С. 42-51.
- [11] Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. — 425 p.
- [12] Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack / Y. I. Kunets, V. V. Matus, V. V. Mykhas'kiv et al. // Mech. Composite Materials. — 2008. — Vol. 44. — P. 165-172.
- [13] Wave propagation in 2-D elastic composites with partially debonded fibers by the null field approach / V. Matus, Y. Kunets, V. Mykhas'kiv et al. // Waves in Random and Complex Media. — 2009. — Vol. 19, No 4. — P. 654-669.

Scattering SH-wave by elastic fiber of noncanonical cross-section comprising a thin interphase layer

Jaroslav Kunets, Valerij Matus

An analytical-numerical method is offered to study the stationary wave fields in unlimited elastic medium, scattered by elastic fiber given an interphase layer of arbitrary thickness and low stiffness. An elastic system is under the condition of longitudinal shear. An algorithm of our study is based on the modified null-field method. The influence of mechanical and geometrical parameters of the composite on the amplitude-frequency characteristics of SH-waves scattered by a fiber of noncanonical shape into a far zone is analyzed.

Рассеяние SH-волны упругим волокном неканонического сечения при наличии тонкой межфазной прослойки

Ярослав Кунец, Валерий Матус

Предложен аналитико-численный метод исследования установившихся SH-волновых полей в неограниченной упругой среде, рассеянных упругим волокном при наличии межфазной прослойки переменной толщины и малой жесткости. Упругая система находится в условиях продольного сдвига. Алгоритм исследования базируется на модифицированном методе нулевого поля. Проанализировано влияние механических и геометрических параметров композита на амплитудно-частотные характеристики SH-волн, рассеянных волокном неканонической формы в дальнюю зону.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 22.09.14