УДК 539.3

Структура розв'язків базових крайових задач теорії пружності для призматичних тіл у функціях двох комплексних змінних

Віктор Пабирівський[1], Неля Пабирівська[1], Володимир Гладун[1]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: pabvic@ukr.net, nelyapab@gmail.com, v_hladun@yahoo.com

Робота стосується побудови розв'язків базових крайових задач теорії пружності для призматичних тіл у голоморфних функціях двох комплексних змінних z_1 і z_2. Основою методики побудови розв'язків є формулювання комплексно-спряжених крайових задач на вищезгадані функції та представлення базових станів для комплексного тензора напружень порядку n шляхом подання скалярної та векторної голоморфних функцій у формі многочленів порядку n за степенями комплексних змінних z_1 і z_2. Для заданого призматичного тіла подано структуру базових розв'язків нульового, першого та другого порядків.

Ключові слова: тензор напружень, вектор переміщень, вектор напружень, базові розв'язки, крайові задачі, комплексні змінні, голоморфна функція.

Вступ. У роботах [1, 2] розроблено підхід до формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних і запропоновано методику побудови базових розв'язків цих задач на основі подання вищезгаданих голоморфних функцій у формі многочленів порядку *n* за степенями комплексних змінних z_1 і z_2. В основі такої методики лежить подання комплексних вектора переміщень і тензора напружень через скалярну $\Phi_0(z_1, z_2)$ та векторну $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ голоморфні функції двох комплексних змінних.

У цій праці застосовано вищезгадану методику для побудови базових розв'язків задач теорії пружності для призматичних тіл. Сформульовано відповідні граничні умови для базових розв'язків і сконкретизовано додатково інтегральні умови рівності нулеві головного моменту вектора напружень на бічній поверхні призматичного тіла.

1. Вихідні співвідношення та формулювання крайової задачі

Розглядається пружне призматичне тіло X прямокутного поперечного перерізу зі сторонами $-a \le x_1 \le a,\ b \le x_2 \le b,\ -c \le x_3 \le c$, що віднесене до прямокутної декартової системи координат, початок якої знаходиться в геометричному центрі тіла. Тіло перебуває під дією стаціонарного силового навантаження, яке прикладене до бокової поверхні $\partial X \equiv \sum_{j=1}^{3} \partial \mathrm{X}_j \bigcup \partial \mathrm{X}_{-j}$.

У роботі [1] на основі зображення вектора переміщень у формі Папковича-Нейбера через скалярну та векторну гармонічні функції [3, 4] і шляхом узагальнення умов Коші-Рімана комплексний вектор переміщень $\vec{w}\left(z_1,z_2,z_3\right)$ та комплексний тензор напружень $\hat{P}\left(z_1,z_2,z_3\right)$ подано через голоморфні функції $\Phi_0\left(z_1,z_2\right), \vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)$ двох комплексних змінних $\left(z_1,z_2\right)$:

$$\vec{w}\left(z_1,z_2,z_3\right)=\vec{\nabla}^*\Phi_0\left(z_1,z_2\right)+\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\right)\cdot\vec{r}\left(z_1,z_2,z_3\right)-(3-4\nu)\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right) \quad (1)$$

$$\hat{P}\left(z_1,z_2,z_3\right)=2\mu\ \Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\Phi_0\left(z_1,z_2\right)+\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\right)\cdot\vec{r}\left(z_1,z_2,z_3\right)-$$
$$-\left(1-2\nu\right)\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)+\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\otimes\vec{\nabla}^*\right)-2\nu\ \left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\right)\ \hat{I}\Big], \quad (2)$$

де $\vec{\nabla}^*\equiv\vec{e}_i\nabla_i^*=\vec{e}_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\vec{e}_2\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)+\vec{e}_3\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)$ — оператор Гамільтона; $\vec{r}\left(z_1,z_2,z_3\right)=\dfrac{(1+i)}{2}\left[\left(z_1-iz_2-z_3\right)\vec{e}_1+\left(z_2-iz_3-z_1\right)\vec{e}_2+\left(z_3-iz_1-z_2\right)\vec{e}_3\right]\equiv r_k\vec{e}_k\left(k=\overline{1,3}\right)$.

На основі подання (1), (2) сформульовано крайову задачу теорії пружності, яку зведено до знаходження голоморфних функцій $\Phi_0\left(z_1,z_2\right),\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)$, що задовольняють рівняння Лапласа:

$$\Delta\Phi_0\left(z_1,z_2\right)=0,\quad \Delta\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)=0, \quad (3)$$

крайові умови:

$$\vec{P}_n\left(z_1,z_2,z_3\right)\ \equiv\left(\vec{n}\cdot\hat{P}\right)\Big|_{\partial X}=2\mu\Big\{\vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\Phi_0\left(z_1,z_2\right)+$$
$$+\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\right)\cdot\vec{r}\left(z_1,z_2,z_3\right)-\left(1-2\nu\right)\Big(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)+$$
$$+\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\otimes\vec{\nabla}^*\Big)-2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)\right)\hat{I}\Big]\Big\}\Big|_{\partial X}=\vec{P}_n^+\left(z_1,z_2,z_3\right), \quad (4)$$

а також відповідні інтегральні умови статичної рівноваги пружного тіла:

$$\int\limits_{\partial X}\left(\vec{r}\times\vec{P}_n^+\right)d\Sigma=0,$$

де $\Delta\equiv\vec{\nabla}^*\cdot\vec{\nabla}^*=2i\dfrac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}$ — оператор Лапласа.

Вихідним для формулювання структури граничних умов на боковій поверхні тіла ∂X з нормаллю $\vec{n}$ є вираз вектора напружень на цій поверхні:

$$\vec{P}_n\equiv\left(\vec{n}\cdot\hat{P}\right)\Big|_{\partial X}\equiv\left(n_j\vec{e}_j\cdot P_{ik}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_k\right)\Big|_{\partial X}=\left(n_jP_{jk}\vec{e}_k\right)\Big|_{\partial X}\ =\left(P_{n_{(k)}}\vec{e}_k\right)\Big|_{\partial X}. \quad (5)$$

Для заданого призматичного тіла вектори нормалей $\vec{n} = n_i \vec{e}_i \left(i = \overline{1,3} \right)$ до поверхонь $\partial X_{\pm i}$ відповідно мають спрямування паралельно базисних орт $\vec{e}_i$ декартової системи координат, тобто:

$$\vec{n}_{\pm i} = \pm \vec{e}_i \quad \text{для кожного} \quad i = \left(\overline{1,3} \right), \tag{6}$$

а радіус-вектор $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$, залежно від поверхні $\partial X_{\pm i}$ матиме відповідну фіксовану координату.

Нагадаємо, що граничними умовами на боковій поверхні тіла ∂X є умови зрівноваження вектора напружень $\vec{P}_n \equiv \vec{n} \cdot \hat{P}$ із заданим вектором зовнішнього навантаження $\vec{P}_n^{(+)}$:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_n^{(+)}. \tag{7}$$

У відповідності до вихідного формулювання крайової задачі про рівновагу пружного призматичного тіла на боковій поверхні тіла ∂X повинні додатково виконуватися інтегральні умови статичної рівноваги тіла, тобто рівність нулеві головного моменту зовнішнього навантаження:

$$\sum_i \int_{\partial X_{\pm i}} \left(\vec{r} \times \vec{P}^{(+)}_{n_{\pm i}} \right) d\Sigma_{\pm i} = 0 \quad \left(i = \overline{1,3} \right). \tag{8}$$

У розгорнутій формі умови (8) матимуть вигляд:

$$\sum_i \int_{\partial X_{\pm i}} \left[\vec{r} \times \vec{P}_{n_{(\pm i)}} \right] d\Sigma_{\pm i} = \sum_i \int_{\partial X_{\pm i}} \left[\left(\vec{P}_{n_{(\pm i),3}} \, x_2 - \vec{P}_{n_{(\pm i),2}} \, x_3 \right) \vec{e}_1 + \right.$$
$$\left. + \left(\vec{P}_{n_{(\pm i),1}} \, x_3 - \vec{P}_{n_{(\pm i),3}} \, x_1 \right) \vec{e}_2 + \left(P_{n_{(\pm i),2}} x_1 - P_{n_{(\pm i),1}} x_2 \right) \vec{e}_3 \right] d\Sigma_{\pm i} = 0. \tag{9}$$

З урахуванням подання (6) вектора нормалі $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ та радіус-вектора $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$ до відповідних поверхонь $\partial X_{\pm i}$ система рівнянь (9) запишеться у вигляді:

$$a \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} P_{12}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_1 = a} dx_3 dx_2 - b \int_{-a}^{a} \int_{-c}^{c} P_{21}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_2 = b} dx_3 dx_1 = 0,$$
$$b \int_{-c}^{c} \int_{-a}^{a} P_{23}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_2 = b} dx_1 dx_3 - c \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} P_{32}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_3 = c} dx_1 dx_2 = 0,$$
$$c \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} P_{31}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_3 = c} dx_2 dx_1 - a \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} P_{13}\left(z_1, z_2, z_3\right)\Big|_{x_1 = a} dx_2 dx_3 = 0. \tag{10}$$

2. Загальна структура розв'язків базових крайових задач

Структуру комплексного тензора напружень $\hat{P}^{(k)}$ порядку k (*базового стану порядку* k), в рамках підходу, запропонованого у праці [2], визначають скалярна голоморфна функція $\Phi_0\left(z_1, z_2\right)$ у формі однорідного многочлена $Q_0^{(k)}\left(z_1, z_2\right)$ степені $k+2$ та голоморфна векторна функція $\vec{\Phi}\left(z_1, z_2\right)$ у формі векторного однорідного многочлена $\vec{Q}^{(k)}\left(z_1, z_2\right)$ степені $k+1$ відповідно:

$$\begin{aligned}
&Q_0^{(k+2)}\left(z_1, z_2\right) = a^{((k+2)0)} z_1^{k+2} + a^{(0(k+2))} z_2^{k+2}, \\
&\vec{Q}^{(k+1)}\left(z_1, z_2\right) = \vec{b}^{((k+1)0)} z_1^{k+1} + \vec{b}^{(0(k+1))} z_2^{k+1},
\end{aligned} \tag{11}$$

де $a^{((k-j)j)} = \alpha_{(k-j)j} + i\beta_{(k-j)j}$, $\vec{b}^{((k-j)j)} = b_m^{((k-j)j)} \vec{e}_m = \left(\xi_m^{((k-j)j)} + i\eta_m^{((k-j)j)}\right)\vec{e}_m$,

$\alpha_{(k-j)j}$, $\beta_{(k-j)j}$, $\xi_m^{((k-j)j)}$, $\eta_m^{((k-j)j)}$ — дійсні числа; $m = \overline{1,3}$; $j, k = \overline{0,n}$; $n \in N$.

При цьому, комплексний тензор напружень $\hat{P}^{(k)}$ виражається через однорідні многочлени $Q_0^{(k)}\left(z_1, z_2\right)$ та $\vec{Q}^{(k)}\left(z_1, z_2\right)$ таким чином:

$$\begin{aligned}
\hat{P}^{(k)} = 2\mu\Big[&\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* Q_0^{(k+2)} + \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \otimes \vec{Q}^{(k+1)}\right) \cdot \vec{r} - (1-2\nu) \times \\
&\times \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{Q}^{(k+1)} + \vec{Q}^{(k+1)} \otimes \vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{Q}^{(k+1)}\right)\hat{I}\Big].
\end{aligned} \tag{12}$$

Тут компоненти тензора напружень подаються через коефіцієнти відповідних однорідних многочленів [2].

Подамо принципову схему послідовнісної побудови векторів напружень $\vec{P}_n^{(k)}$ для відповідних базових станів заданого призматичного тіла.

Умови рівності нулеві головного моменту зовнішнього навантаження для кожного базового стану $\hat{P}^{(k)}$ (12) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
&b\int_{-c}^{c}\int_{-a}^{a}\Big[A_1\left(x_1 + ib\right)^n + A_2\left(b + ix_3\right)^n + A_3\left(b + ix_3\right)^{n-1}\left(x_1 + ib\right) + \\
&+ A_4\left(b + ix_3\right)^{n-1}\left(x_3 + ix_1\right)\Big]dx_1 dx_3 - c\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\Big[A_1\left(x_1 + ix_2\right)^n + A_2\left(x_2 + ic\right)^n + \\
&+ A_3\left(x_2 + ic\right)^{n-1}\left(x_1 + ix_2\right) + A_4\left(x_2 + ic\right)^{n-1}\left(c + ix_1\right)\Big]dx_1 dx_2 = 0; \\
&c\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Big[B_1\left(x_1 + ix_2\right)^n + B_2\left(x_2 + ic\right)^n\Big]dx_2 dx_1 - \\
&- a\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\Big[B_1\left(a + ix_2\right)^n + B_2\left(x_2 + ix_3\right)^n\Big]dx_2 dx_3 = 0,
\end{aligned}$$

$$a\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\Big[C_1\left(a+ix_2\right)^n+C_2\left(x_2+ix_3\right)^n+C_3\left(a+ix_2\right)^{n-1}\left(x_2+ix_3\right)+$$

$$+C_4\left(a+ix_2\right)^{n-1}\left(x_3+ia\right)\Big]dx_3\,dx_2-b\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c}\Big[C_1\left(x_1+ib\right)^n+C_2\left(b+ix_3\right)^n+$$

$$+C_3\left(x_1+ib\right)^{n-1}\left(b+ix_3\right)+C_4\left(x_1+ib\right)^{n-1}\left(x_3+ix_1\right)\Big]dx_3dx_1=0\,, \qquad (13)$$

де коефіцієнти A_i, B_i, C_i виражаються через відповідні коефіцієнти однорідних многочленів $\vec{Q}^{(k)}\left(z_1,z_2\right)$ та $Q_0^{(k)}\left(z_1,z_2\right)$.

Умови (13) є додатковими в’язями на коефіцієнти подання (11) скалярного $Q_0\left(z_1,z_2\right)$ та векторного $\vec{Q}\left(z_1,z_2\right)$ голоморфних однорідних многочленів.

Базовий стан $\hat{P}^{(0)}$ нульового порядку визначається тензором напружень:

$$\hat{P}^{(0)}=2\mu\Big[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*Q_0^{(2)}-(1-2\nu)\times\left(\vec{\nabla}^*\otimes\vec{Q}^{(1)}+\vec{Q}^{(1)}\otimes\vec{\nabla}^*\right)-2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{Q}^{(1)}\right)\hat{I}\,\Big].$$

На поверхнях ∂X_i компоненти вектора напружень для цього базового стану подаються через коефіцієнти однорідних многочленів $Q_0^{(2)}\left(z_1,z_2\right)$, $\vec{Q}^{(1)}\left(z_1,z_2\right)$ таким чином:

$$P_{n_1,1}^{(0)}=2\mu\Big[2a^{(20)}-2(1-\nu)b_1^{(10)}-2\nu\left(ib_2^{(10)}+b_2^{(01)}+ib_3^{(01)}\right)\Big],$$
$$P_{n_1,2}^{(0)}=2\mu\Big[2ia^{(20)}-(1-2\nu)\left(ib_1^{(10)}+b_1^{(01)}+b_2^{(10)}\right)\Big],$$
$$P_{n_1,3}^{(0)}=2\mu\Big[-(1-2\nu)\left(ib_1^{(01)}+b_3^{(10)}\right)\Big];$$
$$P_{n_2,1}^{(0)}=2\mu\Big[2ia^{(20)}-(1-2\nu)\left(ib_1^{(10)}+b_1^{(01)}+b_2^{(10)}\right)\Big],$$
$$P_{n_2,2}^{(0)}=2\mu\Big[-2a^{(20)}+2a^{(02)}-2\nu\left(b_1^{(10)}+ib_3^{(01)}\right)-2(1-\nu)\left(ib_2^{(10)}+b_2^{(01)}\right)\Big],$$
$$P_{n_2,3}^{(0)}=2\mu\Big[2ia^{(02)}-(1-2\nu)\left(ib_2^{(01)}+ib_3^{(10)}+b_3^{(01)}\right)\Big];$$
$$P_{n_3,1}^{(0)}=2\mu\Big[-(1-2\nu)\left(ib_1^{(01)}+b_3^{(10)}\right)\Big],$$
$$P_{n_3,2}^{(0)}=2\mu\Big[2ia^{(02)}-(1-2\nu)\left(ib_2^{(01)}+ib_3^{(10)}+b_3^{(01)}\right)\Big],$$
$$P_{n_3,3}^{(0)}=2\mu\Big[2a^{(20)}-2\nu\left(b_1^{(10)}+ib_2^{(10)}+b_2^{(01)}\right)-2i(1-\nu)b_3^{(01)}\Big]. \qquad (14)$$

З умов (13) рівності нулеві головного моменту зовнішнього навантаження для базового стану $\hat{P}^{(0)}$ нульового порядку отримаємо умови симетрії компонент тензора напружень: $P_{23}=P_{32}$; $P_{31}=P_{13}$; $P_{12}=P_{21}$, тобто ця умова задовольняється тотожно.

Для базового стану $\hat{P}^{(1)}$ першого порядку умови (13) рівності нулеві головного моменту зовнішнього навантаження подаються у вигляді системи рівнянь:

$$3(ib+c)a^{(03)}+\left[-2ib\nu-c(1-2\nu)\right]b_2^{(02)}+b(1-2\nu)b_3^{(20)}+\left[b(-1+2\nu)-2ic\nu\right]b_3^{(02)}=0,$$
$$cb_1^{(02)}+ab_3^{(20)}=0,$$
$$3(ia+b)a^{(30)}+\left[2ia\nu-b(1-2\nu)\right]b_1^{(20)}+b(1-2\nu)b_1^{(02)}+\left[a(-1+2\nu)-2ib\nu\right]b_2^{(20)}=0.$$

Із цієї системи отримаємо такі в'язі на коефіцієнти однорідних многочленів $Q_0^{(3)}(z_1,z_2)$ і $\vec{Q}^{(2)}(z_1,z_2)$, зокрема:

$$a^{(03)}=\frac{\left[c+2\nu(ib-c)\right]b_2^{(02)}}{3(ib+c)}+\frac{\frac{cb}{a}(1-2\nu)b_1^{(02)}}{3(ib+c)}+\frac{\left[b+2\nu i(ib+c)\right]b_3^{(02)}}{3(ib+c)},$$
$$b_3^{(20)}=-\frac{c}{a}b_1^{(02)},$$
$$a^{(30)}=\frac{\left[b-2\nu(ia+b)\right]b_1^{(20)}}{3(ia+b)}-\frac{b(1-2\nu)b_1^{(02)}}{3(ia+b)}+\frac{\left[a-2\nu i(ia-b)\right]b_2^{(20)}}{3(ia+b)}. \tag{15}$$

Враховуючи співвідношення (15), подамо комплексний тензор напружень $\hat{P}^{(1)}$ у вигляді:

$$\hat{P}^{(1)}=2\mu\left(\hat{K}^1z_1+\hat{K}^2z_2+\hat{K}^3z_3\right). \tag{16}$$

Тут $\hat{K}^j=K_{mn}^j\,\vec{e}_m\otimes\vec{e}_n\left(j,m,n=\overline{1,3}\right)$ — сталі тензори в декартовому базисі $\vec{e}_m\otimes\vec{e}_n$, які виражаються через коефіцієнти $b_1^{(20)}, b_1^{(02)}, b_2^{(20)}, b_2^{(02)}, b_3^{(02)}$ таким чином:

- для тензора $\hat{K}^1$:

$$K_{11}^1=\left(-\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+i\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right)b_1^{(20)}+\left[-2\frac{(1-2\nu)b^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a}+\right.$$
$$\left.+i\left(2\frac{(1-2\nu)ab}{a^2+b^2}+\frac{c}{a}\right)\right]b_1^{(02)}+i\left(-\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+i\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right)b_2^{(20)};$$
$$K_{22}^1=\left(-\frac{a^2+3b^2}{a^2+b^2}-i\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right)b_1^{(20)}+\left[1-2\frac{(1-2\nu)b^2}{a^2+b^2}+\frac{c}{a}+\right.$$
$$\left.+i\left(1-2\frac{(1-2\nu)ab}{a^2+b^2}-\frac{c}{a}\right)\right]b_1^{(02)}+i\left[-2\frac{ab}{a^2+b^2}-i\frac{\left(a^2+3b^2\right)}{a^2+b^2}\right]b_2^{(20)}-$$
$$-(1+i)b_2^{(02)}+(1-i)b_3^{(02)};$$

$$K_{33}^1 = -4\nu b_1^{(20)} - (1+i)b_1^{(02)} - 4\nu i b_2^{(20)} + (1+i)b_2^{(02)} - (1-i)b_3^{(02)};$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1 = \left(\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} + i\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right)b_1^{(20)} + \left[-2\frac{(1-2\nu)ab}{a^2+b^2} - \frac{c}{a} + \right.$$

$$\left. + i\left(-2\frac{(1-2\nu)b^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a}\right)\right]b_1^{(02)} + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - i\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right)b_2^{(20)};$$

$$K_{23}^1 = K_{32}^1 = \left\{-1 + i\left[1 + 2(1-2\nu)\frac{c}{a}\right]\right\}b_1^{(02)} + (1-i)b_2^{(20)} + (1+i)b_3^{(02)};$$

$$K_{31}^1 = K_{13}^1 = 2(1-2\nu)\frac{c}{a}b_1^{(02)};$$

- для тензора $\hat{K}^2$:

$$K_{11}^2 = (1-i)b_1^{(20)} + (1+i)\frac{c}{a}b_1^{(02)} + (1+i)b_2^{(20)} - 4\nu b_2^{(02)} - 4i\nu b_3^{(02)};$$

$$K_{22}^2 = -\left(1-i\right)b_1^{(20)}b_1^{(20)} + \left\{1 + 2\frac{(1-2\nu)bc^2}{a\left(a^2+b^2\right)} - \frac{c}{a} + \right.$$

$$\left. + i\left[1 + 2\frac{(1-2\nu)cb^2}{a\left(a^2+b^2\right)} + \frac{c}{a}\right]\right\}b_1^{(02)} - (1+i)b_2^{(20)} +$$

$$+ i\left\{2\frac{(4\nu-1)b^2}{b^2+c^2} - 1 + i\left[2\frac{(4\nu-1)bc}{b^2+c^2} + 1\right]\right\}b_2^{(02)} + \left[-\frac{(b-c)^2}{b^2+c^2} - i\frac{3b^2+c^2}{b^2+c^2}\right]b_3^{(02)};$$

$$K_{33}^2 = \left\{-2\frac{(1-2\nu)bc^2}{a\left(b^2+c^2\right)} - 1 + i\left[2\frac{(1-2\nu)b^2c}{a\left(b^2+c^2\right)} + 1\right]\right\}b_2^{(02)} + \left[\frac{(c-b)^2}{b^2+c^2} - \right.$$

$$\left. - i\frac{b^2+3c^2}{b^2+c^2}\right]b_3^{(02)} + (1+i)b_2^{(20)} + i\left\{-2\frac{4\nu b^2+c^2}{\left(b^2+c^2\right)} - 1 - i\left[2\frac{(4\nu-1)cb}{\left(b^2+c^2\right)} + 1\right]\right\}b_2^{(02)};$$

$$K_{12}^2 = K_{21}^2 = -(1+i)b_1^{(20)} - \left[(1-i)\frac{c}{a} + 2(1-2\nu)\right]b_1^{(02)} - (1-i)b_2^{(20)};$$

$$K_{23}^2 = K_{32}^2 = \left\{2\frac{(1-2\nu)b^2c}{a\left(b^2+c^2\right)} - 1 + i\left[2\frac{(1-2\nu)bc^2}{a\left(b^2+c^2\right)} + 1\right]\right\}b_1^{(02)} +$$

$$+ \left\{2\frac{(1-4\nu-1)cb}{\left(b^2+c^2\right)} - 1 + i\left[2\frac{4\nu b^2+c^2}{\left(b^2+c^2\right)} - 1\right]\right\}b_2^{(02)} + \left[\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} - i\frac{(b-c)^2}{b^2+c^2}\right]b_3^{(02)};$$

$$K_{31}^2 = K_{13}^2 = -2(1-2\nu)\, ib_1^{(02)};$$

- для тензора $\hat{K}^3$:

$$K_{11}^3 = -(1+i)b_1^{(20)} - (1+i)\frac{c}{a}b_1^{(02)} + (1-i)b_2^{(20)}; \qquad K_{31}^3 = K_{13}^3 = 0;$$

$$K_{22}^3 = (1+i)b_1^{(20)} + (1+i)\left(-1+\frac{c}{a}\right)b_1^{(02)} - (1-i)b_2^{(20)} + (1-i)b_2^{(02)} + (1+i)b_3^{(02)};$$

$$K_{33}^3 = (1+i)b_1^{(02)} - (1-i)b_2^{(02)} - (1+i)b_3^{(02)};$$

$$K_{12}^3 = K_{21}^3 = (1-i)b_1^{(20)} - (1-i)\frac{c}{a}b_1^{(02)} + (1+i)b_2^{(20)};$$

$$K_{23}^3 = K_{32}^3 = (1-i)b_1^{(02)} + (1+i)b_2^{(02)} - (1-i)b_3^{(02)}.$$

Побудуємо вектори напружень для цього базового стану, які подаються через коефіцієнти $b_1^{(20)}, b_1^{(02)}, b_2^{(20)}, b_2^{(02)}, b_3^{(02)}$ на поверхнях $\partial X_{\pm 1}\left(x_{\pm 1} = \pm a\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 1}}^{(1)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 1}\cdot \hat{P}^{(1)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 1}} = \left\{\left(\pm\vec{e}_1\right)\left[2\mu\left(\hat{K}_{jm}^1\, z_1 + \hat{K}_{jm}^2 z_2 + \hat{K}_{jm}^3 z_3\right)\vec{e}_j\otimes\vec{e}_m\right]\right\}\Big|_{x_1=\pm a} =$$

$$= \pm 2\mu\left\{\hat{K}_{1m}^1\left[\left(\pm a\right) + ix_2\right] + \hat{K}_{1m}^2\left(x_2 + ix_3\right) + \hat{K}_{1m}^3\left[x_3 + i\left(\pm a\right)\right]\right]\vec{e}_m\ \right\};$$

- на поверхнях $\partial X_{\pm 2}\left(x_{\pm 2} = \pm b\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(1)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 2}\cdot \hat{P}^{(1)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 2}} = \left\{\left(\pm\vec{e}_2\right)\left[2\mu\left(\hat{K}_{jm}^1\, z_1 + \hat{K}_{jm}^2 z_2 + \hat{K}_{jm}^3 z_3\right)\vec{e}_j\otimes\vec{e}_m\right]\right\}\Big|_{x_1=\pm b} =$$

$$= \pm 2\mu\left\{\hat{K}_{2m}^1\left[x_1 + i\left(\pm b\right)\right] + \hat{K}_{2m}^2\left[\left(\pm b\right) + ix_3\right] + \hat{K}_{2m}^3\left(x_3 + ix_1\right)\right\}\vec{e}_m;$$

- на поверхнях $\partial X_{\pm 3}\left(x_{\pm 3} = \pm c\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 3}}^{(1)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 3}\cdot \hat{P}^{(1)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 2}} = \left[\left(\pm\vec{e}_3\right)2\mu\left(\hat{K}_{jm}^1\, z_1 + \hat{K}_{jm}^2 z_2 + \hat{K}_{jm}^3 z_3\right)\vec{e}_j\otimes\vec{e}_m\right]\Big|_{x_1=\pm c} =$$

$$= \left[\hat{K}_{3m}^1\left(x_1 + ix_2\right) + \hat{K}_{3m}^2\left(x_2 + i\left(\pm c\right)\right) + \hat{K}_{3m}^3\left(\left(\pm c\right) + ix_1\right)\right]\vec{e}_m. \qquad (17)$$

Розглянемо базовий стан $\hat{P}^{(2)}$ другого порядку. При цьому умови (13) рівності нулеві головного моменту зовнішнього навантаження для цього базового стану подаються у вигляді системи рівнянь:

$$4i\left(b^2 + c^2\right)a^{(04)} + i\left[(1+2\nu)b^2 - (1-2\nu)c^2\right]b_2^{(03)} +$$

$$+i(1-2\nu)b^2 b_3^{(30)} + \left[(-1+2\nu)b^2 + (1+2\nu)c^2\right]b_3^{(03)} = 0,$$

$$i\,c^2 b_1^{(03)} + a^2 b_3^{(30)} = 0,$$

$$4i\left(a^2+b^2\right)a^{(40)}+i\left[(1+2\nu)a^2-(1-2\nu)b^2\right]b_1^{(30)}+$$
$$+(1-2\nu)\,b^2b_1^{(03)}+\left[(-1+2\nu)a^2+(1+2\nu)b^2\right]b_2^{(30)}=0\,.$$

Ця система рівнянь встановлює зв'язки між коефіцієнтами $a^{(40)}$, $a^{(04)}$, $b_1^{(30)}$, $b_1^{(03)}$, $b_2^{(30)}$, $b_2^{(03)}$, $b_3^{(03)}$, $b_3^{(30)}$, а саме:

$$a^{(04)}=\frac{\left[(1-2\nu)c^2-(1+2\nu)b^2\right]b_2^{(03)}}{4\left(b^2+c^2\right)}+\frac{i(1-2\nu)b^2\dfrac{c^2}{a^2}b_1^{(03)}}{4\left(b^2+c^2\right)}+$$
$$+\frac{i\left[(-1+2\nu)b^2+(1+2\nu)c^2\right]b_3^{(03)}}{4\left(b^2+c^2\right)},$$

$$b_3^{(30)}=-i\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)},$$

$$a^{(40)}=\frac{\left[(1-2\nu)b^2-(1+2\nu)a^2\right]b_1^{(30)}}{4\left(a^2+b^2\right)}+\frac{i(1-2\nu)b^2b_1^{(03)}}{4\left(a^2+b^2\right)}+$$
$$+\frac{i\left[(-1+2\nu)a^2+(1+2\nu)b^2\right]b_2^{(30)}}{4\left(a^2+b^2\right)}.$$

З урахуванням цих в'язів, комплексний тензор напружень $\hat{P}^{(2)}$ подається у такому вигляді:

$$\hat{P}^{(2)}=2\mu\left(\hat{B}^1z_1^2+\hat{B}^2z_2^2+\hat{B}^3z_1z_2+\hat{B}^4z_2z_3+\hat{B}^5z_3z_1\right), \tag{18}$$

де $\hat{B}^j=B_{mn}^j\,\vec{e}_m\otimes\vec{e}_n\left(j=\overline{1,5};\,m,n=\overline{1,3}\right)$ — сталі тензори, які в декартовому базисі $\vec{e}_m\otimes\vec{e}_n$ виражаються через коефіцієнти $b_1^{(30)}$, $b_1^{(03)}$, $b_2^{(30)}$, $b_2^{(03)}$, $b_3^{(03)}$ так:

- для тензора $\hat{B}^1$:

$$B_{11}^1=3\left\langle\left(-\frac{2a^2}{a^2+b^2}+i\right)b_1^{(30)}+\left\{-\frac{c^2}{a^2}+i\left[\frac{b^2(1-2\nu)}{a^2+b^2}-\frac{c^2}{a^2}\right]\right\}b_1^{(03)}-\right.$$
$$\left.-\left(1+i\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)b_2^{(30)}\right\rangle;$$

$$B_{22}^1=3\left\langle\left(-\frac{2b^2}{a^2+b^2}-i\right)b_1^{(30)}+\left\{\frac{c^2}{a^2}+i\left[-\frac{b^2(1-2\nu)}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2}\right]\right\}b_1^{(03)}+\right.$$

$$+\left(1-i\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)b_2^{(30)}\Bigg\rangle;$$

$$B_{33}^1=-6\nu\left(b_1^{(30)}+ib_2^{(30)}\right)\;;$$

$$B_{12}^1=B_{21}^1=3\left\{\left[-1-2i\left(2\nu-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\right]b_1^{(30)}+\left[\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2(1-2\nu)}{a^2+b^2}-i\frac{c^2}{a^2}\right]b_1^{(03)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-i\right)b_2^{(30)}\right\};$$

$$B_{23}^1=B_{32}^1=-3(1-2\nu)\,\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)};\quad B_{31}^1=B_{13}^1=3(1-2\nu)\,i\,\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)};$$

- для тензора $\hat{B}^2$:

$$B_{11}^2=-6\nu\left(b_2^{(30)}+ib_3^{(03)}\right)\;;\qquad B_{33}^2=-6\nu\left(b_1^{(30)}+ib_2^{(03)}\right)\;;$$

$$B_{22}^2=3\Bigg\langle\left\{1+i\left[\frac{(1-2\nu)b^2c^2}{a^2\left(b^2+c^2\right)}-1\right]\right\}b_1^{(03)}+\left(-\frac{2b^2}{b^2+c^2}+i\right)b_2^{(03)}+$$

$$+i\left(-\frac{2b^2}{b^2+c^2}+i\right)b_3^{(03)}\Bigg\rangle;$$

$$B_{12}^2=B_{21}^2=3\left\{\left[-1-2i\left(2\nu-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\right]b_1^{(30)}+\left[\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2(1-2\nu)}{a^2+b^2}-i\frac{c^2}{a^2}\right]b_1^{(03)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-i\right)b_2^{(30)}\right\};$$

$$B_{23}^2=B_{32}^2=3\Bigg\langle\left\{\left[-\frac{(1-2\nu)b^2c^2}{a^2\left(b^2+c^2\right)}+1\right]+i\right\}b_1^{(03)}-i\left(\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}-i\right)b_2^{(03)}+$$

$$+\left(\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}-i\right)b_3^{(03)}\Bigg\rangle;$$

$$B_{31}^2=B_{13}^2=-3(1-2\nu)\,i\,b_1^{(03)};$$

- для тензора $\hat{B}^3$:

$$B_{11}^3=3\left[(1-i)b_1^{(30)}-(1-i)\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)}+(1+i)b_2^{(30)}\right]\;;$$

$$B_{22}^3 = 3\left\{-(1-i)b_1^{(30)} + \left[1+\frac{c^2}{a^2}+i\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\right]b_1^{(03)} - (1+i)b_2^{(30)} - \right.$$
$$\left. -(1+i)b_2^{(03)} + (1-i)b_3^{(03)}\right\};$$
$$B_{33}^3 = 3\left[-(1+i)b_1^{(03)} + (1+i)b_2^{(03)} - (1-i)b_3^{(03)}\right];$$
$$B_{12}^3 = B_{21}^3 = 3\left[(1+i)b_1^{(30)} - (1+i)\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)} - (1-i)b_2^{(30)}\right];$$
$$B_{23}^3 = B_{32}^3 = 3\left[-(1-i)b_1^{(03)} + (1-i)b_2^{(03)} + (1+i)b_3^{(03)}\right]; \quad B_{31}^3 = B_{13}^3 = 0;$$

- для тензора $\hat{B}^4$:

$$B_{11}^4 = 0; \quad B_{12}^4 = B_{21}^4 = 0; \quad B_{31}^4 = B_{13}^4 = 0;$$
$$B_{22}^4 = 3\left[-(1+i)b_1^{(03)} + (1-i)b_2^{(03)} + (1+i)b_3^{(03)}\right];$$
$$B_{33}^4 = 3\left[(1+i)b_1^{(03)} - (1-i)b_2^{(03)} - (1+i)b_3^{(03)}\right];$$
$$B_{23}^4 = B_{32}^4 = 3\left[(1-i)b_1^{(03)} + (1+i)b_2^{(03)} - (1-i)b_3^{(03)}\right];$$

- для тензора $\hat{B}^5$:

$$B_{11}^5 = 3\left[-(1+i)b_1^{(30)} + (1-i)\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)} + (1-i)b_2^{(30)}\right];$$
$$B_{22}^5 = 3\left[(1+i)b_1^{(30)} - (1-i)\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)} - (1-i)b_2^{(30)}\right];$$
$$B_{12}^5 = B_{21}^5 = 3\left[(1-i)b_1^{(30)} + (1+i)\frac{c^2}{a^2}b_1^{(03)} + (1+i)b_2^{(30)}\right];$$
$$B_{23}^5 = B_{32}^5 = 0; \quad B_{31}^5 = B_{13}^5 = 0; \quad B_{33}^5 = 0.$$

Вектори напружень для цього базового стану подаються таким чином:

- на поверхнях $\partial X_{\pm 1}\left(x_1 = \pm a\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm1}}^{(2)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm1}\cdot\hat{P}^{(2)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm1}} = \pm 2\mu\Big[\hat{B}_{1m}^1\left[\left(\pm a\right)+ix_2\right]^2 + \hat{B}_{1m}^2\left(x_2+ix_3\right)^2 +$$
$$+\hat{B}_{1m}^3\left[\left(\pm a\right)+ix_2\right]\left(x_2+ix_3\right) + \hat{B}_{1m}^4\left(x_2+ix_3\right)\left[x_3+i\left(\pm a\right)\right] +$$
$$+\hat{B}_{1m}^5\left[x_3+i\left(\pm a\right)\right]\left[\left(\pm a\right)+ix_2\right]\vec{e}_m\Big];$$

- на поверхнях $\partial X_{\pm 2}\left(x_2=\pm b\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(2)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 2}\cdot\hat{P}^{(2)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 2}} == \pm 2\mu\Big\{\hat{B}_{2m}^{1}\left[x_1+i\left(\pm b\right)\right]^2+\hat{B}_{2m}^{2}\left[\left(\pm b\right)+ix_3\right]^2+$$
$$+\hat{B}_{2m}^{3}\left[x_1+i\left(\pm b\right)\right]\left[\left(\pm b\right)+ix_3\right]+\hat{B}_{2m}^{4}\left[\left(\pm b\right)+ix_3\right]\left(x_3+ix_1\right)+$$
$$+\hat{B}_{2m}^{5}\left(x_3+ix_1\right)\left[x_1+i\left(\pm b\right)\right]\Big\}\vec{e}_m\,;$$

- на поверхнях $\partial X_{\pm 3}\left(x_3=\pm c\right)$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 3}}^{(2)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 3}\cdot\hat{P}^{(2)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 3}} = \pm 2\mu\Big[\hat{B}_{3m}^{1}\left(x_1+ix_2\right)^2+\hat{B}_{3m}^{2}\left[x_2+i\left(\pm c\right)\right]^2+$$
$$+\hat{B}_{3m}^{3}\left(x_1+ix_2\right)\left[x_2+i\left(\pm c\right)\right]+\hat{B}_{3m}^{4}\left[x_2+i\left(\pm c\right)\right]\left[\left(\pm c\right)+ix_1\right]+$$
$$+\hat{B}_{3m}^{5}\left[\left(\pm c\right)+ix_1\right]\left(x_1+ix_2\right)\Big]\vec{e}_m \qquad \left(m=\overline{1,3}\right).$$

Висновки. На основі методики побудови базових станів для комплексного тензора напружень порядку k, який базується на поданні скалярної $\Phi_0\left(z_1,z_2\right)$ та векторної $\vec{\Phi}\left(z_1,z_2\right)$ голоморфних функцій у формі однорідних многочленів порядку k стосовно змінних z_1 і z_2 запропоновано схему конструктивної побудови структури базових розв'язків k-ого порядку для призматичних тіл. Для формулювання відповідних крайових задач теорії пружності, додатково конкретизується умова рівності нулеві головного моменту вектора зовнішніх навантажень на бічній поверхні тіла. У цьому зв'язку, граничними умовами для базового напруженого стану $\hat{P}^{(k)}$ порядку k на бокових поверхнях тіла $\partial X_{\pm i}$ є умови зрівноваження векторів напружень $\vec{P}_{n_i}^{(k)}$ із заданим вектором зовнішнього навантаження $\vec{P}_{n_i}^{(k)(+)}$: $\vec{P}_{n_i}^{(k)(+)}=\vec{P}_{n_i}^{(k)}$. Подано структуру базових розв'язків нульового, першого та другого порядків крайових задач для заданого призматичного тіла.

Література

[1] *Пабирівський В., Пабирівська Н.* Про формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функцій двох комплексних змінних // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 100-107.

[2] *Пабирівський В., Пабирівська Н., Гладун В.* Побудова розв'язків базових крайових задач просторової теорії пружності з використанням голоморфних функцій // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 146 -157.

[3] *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. — Москва: Гостехиздат, 1955. — 492 с.

[4] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — Москва: Наука, 1975. — 575 с.

Solution structure of basic boundary value problems of elasticity theory for prismatic bodies using functions of two-complex variables

Viktor Pabyrivskyi, Nelya Pabyrivska, Volodymyr Hladun

The work is devoted to the construction of solutions of the basic boundary value problems of elasticity theory for prismatic bodies in a holomorphic function of two complex variables z_1 and z_2. The technique of constructing solutions is based on the formulation of complex-conjugate boundary value problems on the aforementioned functions and representation of a complex displacement vector and stress tensor with the help of scalar and vector holomorphic functions in the form of polynomials of order n in a series of complex variables z_1 and z_2. For a given prismatic body there is presented a composition of the basic solutions of the zero, first and second order.

Структура решений базовых граничных задач теории упругости для призматических тел в функциях двух комплексных переменных

Виктор Пабыривский, Неля Пабыривска, Владимир Гладун

Работа посвящена построению решений базовых краевых задач теории упругости для призматических тел в голоморфных функциях двух комплексных переменных z_1 и z_2. Основой методики построения решений является формулировка комплексно-сопряженных краевых задач на вышеупомянутые функции и представления базовых состояний для комплексного тензора напряжений порядка n путем подачи скалярной и векторной голоморфных функций в форме многочленов порядка n по степеням комплексных переменных z_1 и z_2. Для заданного призматического тела приведена структура базовых решений нулевого, первого и второго порядков.

Представлено професором П. Костробієм

Отримано 03.11.14