

Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя

Любов Піскозуб

Українська академія друкарства, вул. Підголюско, 19, Львів,
e-mail: piskozub@uad.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Побудовано точний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу з міжфазною тріщиною, навантаженого неоднорідним нормальним стиском і циклічною зосередженою силою в поздовжньому напрямку. Методом функцій стрибка задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для стрибків зміщень і напружень у зонах проковзування з тертям. Аналізується вплив параметрів навантажування та тертя на розміри цих зон. Відзначається гістерезисна поведінка стрибків зміщень і напружень у цих областях.

Ключові слова: тертя, міжфазна тріщина, розсіяння енергії, коефіцієнт інтенсивності напружень, антиплоска деформація, поздовжній зсув, біматеріал, функції стрибка.

Вступ. Вивчення контактних явищ з урахуванням тертя є однією з найактуальніших проблем у машинобудуванні, гірничій справі тощо [1-5].

Проблему контакту берегів тріщин з урахуванням контактної взаємодії вивчено недостатньо. Найбільші здобутки у цьому напрямі належать теорії вивчення тріщин на межі поділу двох середовищ, яка для усунення фізично некоректної осцилюючої особливості широко застосовує модель локального контакту берегів безпосередньо біля вістря [2, 6-8]. Широкий клас задач про вплив сил тертя на контактні напруження між півплощинами із неглибокими гладкими виїмками на поверхні досліджено в роботах [9, 10]. У цьому напрямку варто звернути увагу також на праці [11-16].

У цій публікації пропонується методика дослідження впливу тертя у разі циклічного деформування за типом поздовжнього зсуву (антиплоска задача) тіла з налягаючою тріщиною зосередженою силою на формування зон проковзування та розсіювання енергії. В основу підходу покладено метод функцій стрибка й апарат сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

1. Формулювання задачі

Розглянемо безмежний ізотропний масив, що складається з двох півпросторів із пружними сталими E_k, ν_k , взаємно притиснутих до межі поділу нормальними напруженнями: рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^{\infty} < 0$ і двома зрівноваженими

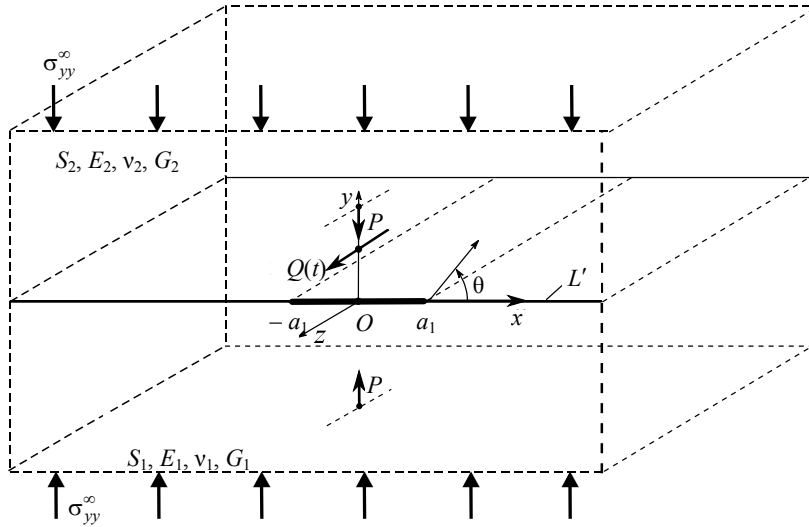


Рис. 1. Силова та геометрична схема задачі

зосередженими силами $P_k = \mp iP$ у точках $z_k = \pm ih \in S_k$ ($k=1,2$). Тут введено у розгляд систему координат $Oxyz$ із початком у площині контакту півпросторів xOz .

Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу тіла площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k=1,2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис. 1). Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі Oz і комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Будемо вважати, що величина та напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично (настільки повільно, щоб не було необхідності враховувати інерційні члени) за певним законом, який може бути різним. Нехай зовнішнє навантаження визначає монотонно змінна в часових проміжках $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$ покрокова послідовність зосереджених сил інтенсивності $Q(t) = \sum_p Q_{(p)}(t)$ у точці $z_{*2} \in S_2$, (p) — номер кроку циклу.

Зазначимо, що позитивний напрям векторів сил обрано уздовж осі Oz (так, щоб з осями Ox , Oy утворювалася права система).

Контакт між півпросторами уздовж лінії L здійснюється згідно із законами дотикового механічного контакту, за якого тіла контактують механічно ідеально до моменту, коли може початися взаємне проковзування поверхонь, що дотикаються [17, 18].

Таким чином, отримуємо задачу поздовжнього зсуву від дії зусиль $Q(t)$ з додатковим впливом неоднорідного розподілу стискувальних нормальних

напружень, а також сил тертя на межі поділу матеріалів, які на тих поверхнях, де відбувається проковзування, можуть спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо.

Наявність зони проковзування (тріщини з контактуючими (налягаючими) берегами) на кожному кроці циклу можна моделювати стрибком компонент векторів напружень і переміщень на $L'_{(p)}$ [17, 19, 20], що з урахуванням закону Гука дає:

$$[\sigma_{yz}]_{L'_{(p)}} \equiv \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t),$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'_{(p)}} \equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{L'_{(p)}} \equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L'_{(p)}; \quad (1)$$

$$f_{3(p)}(x, t) = f_{6(p)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L'_{(p)}, \quad (2)$$

де $L'_{(p)} \rightarrow L'_{(p)} = [-a_{(p)}; a_{(p)}]$; t — момент часу як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний зі змінюваністю сили. Тут і далі використовуються позначення $[\varphi]_L = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$, $\langle \varphi \rangle_L = \varphi(x, -0) + \varphi(x, +0)$; індекси «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому та нижньому краях лінії L .

Умови дотикового третього контакту у налягаючій тріщині передбачають, що у разі досягнення дотичними напруженнями $\sigma_{yz(p)}$ на ділянці $L'_{(p)}$ певного критичного значення τ_{yz}^{\max} починається проковзування, причому цей поріг дотичні напруження не можуть перевищити. Обмежуючись при цьому класичним законом тертя Амонтона [1, 4, 5], розглянемо варіант контактної задачі, у якому передбачається, що у всіх точках ділянки $L'_{(p)}$ дотичні напруження (зусилля тертя) дорівнюють

$$\sigma_{yz(p)}^\pm = -\text{sgn}([w]_{(p)}) \tau_{yz}^{\max}(x), \quad \tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha \sigma_{yy}(x) \left(\sigma_{yy} < 0, \quad |w^- - w^+| \neq 0 \right). \quad (3)$$

Тут α — коефіцієнт тертя ковзання. Поза ділянкою $L'_{(p)}$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує рівня максимально допустимих

$$|\sigma_{yz(p)}(x)| \leq \tau_{yz}^{\max}(x) \left(\sigma_{yy} < 0, \quad w^- - w^+ = 0 \right) \quad (4)$$

і взаємного переміщення берегів (стрибка зміщень) немає. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знаку різниці переміщень $[w]_{(p)}$

на $L'_{(p)}$ у розглядуваній точці.

Для вищезгаданого випадку нормального притискання маємо [19, 20], що

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = 4\alpha \left[-\frac{\sigma_{yy}^\infty}{4} - P \sum_{k=1}^2 (-1)^k E_{3-k} \eta_k \gamma_k \operatorname{Re} \frac{i}{x - z_k} \right] = \alpha \left[-\sigma_{yy}^\infty + \frac{Ph\gamma^+}{\pi(x^2 + h^2)} \right], \quad (5)$$

$$\text{де } \kappa_k = 4 - 3\nu_k, \quad \eta_k = 1/8\pi(1 - \nu_k), \quad e_{kj} = 2 \frac{G_k + \kappa_k G_j}{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)},$$

$$\gamma_k = \frac{1}{e_{jk}} + \frac{\kappa_k + 1}{e_{kj}}, \quad \gamma^+ = E_2 \eta_1 \gamma_1 + E_1 \eta_2 \gamma_2.$$

Застосування закону тертя у класичному вигляді (3) дає можливість спростити крайові умови для основної задачі, однак вибір складніших моделей тертя [3, 5-7], у тому числі з урахуванням спрацювання, не ускладнить принципово процесу розв'язування.

2. Розв'язування задачі. Перший крок

На підставі застосування до розв'язування задачі методики п. 20.2 роботи [19] можна отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії L , а також усередині S дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^\pm(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^\pm(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'_{(p)}} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_j p_k, \\ \sigma_{yz(1)}(z, t) + i \sigma_{xz(1)}(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) + i p_k g_{3(1)}(z, t) - \\ &- C g_{6(1)}(z, t) \quad (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (6)$$

Верхній індекс «+» стосується значення $k = 2$; «-» — $k = 1$. Величини, позначені індексом «0» зверху, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без модельних неоднорідностей (тріщин) за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок):

Тут і далі для кожного кроку використані позначення:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(p)}^0(z, t) &= i \left[M_{(p)}(z, t) + (p_k - p_j) M_{(p)}^*(z, t) \right], \\ M_{(p)}(z, t) &= - \frac{Q_{(p)}(t)}{2\pi(z - z_*)}, \quad M_{(p)}^*(z, t) = (2 - k) M_{(p)}(z, t) + \\ &+ (k - 1) \overline{M}_{(p)}(z, t) \quad (z \in S_k, k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (7)$$

Використовуючи співвідношення (6), (7) та умову (3) наявності сили тертя на ділянці $L'_{(1)}$ тріщини за взаємного зсуву берегів у напрямі осі Oz , отримаємо з умов (2) систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} f_{3(1)}(x, t) = 0, \\ g_{6(1)}(x, t) = F_{6(1)}(x, t) = \frac{1}{2C} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max}(x) \right), \end{cases} \quad (8)$$

розв'язком якої з огляду на геометричну і силову симетрію задачі та припущення, що існує єдина ділянка проковзування $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$, є

$$\begin{aligned}
 f_{6(1)}(x, t) &= \frac{1}{\pi C \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left\{ \pi \left(\tau_{(1)}(t) - \alpha p \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \sigma_{yy}^{\infty} \right) x + \right. \\
 &+ p_1 Q_{(1)}(t) \operatorname{Im} \left(\frac{\sqrt{z_{*2}^2 - a_{(1)}^2}}{x - z_{*2}} \right) \left. \right\} + \frac{4\alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} P}{C \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} E_j \eta_k \gamma_k \operatorname{Re} \left(i \left(\frac{\sqrt{z_k^2 - a_{(1)}^2}}{x - z_k} + 1 \right) \right) \quad (x \in [-a_{(1)}; a_{(1)}]), \quad (9)
 \end{aligned}$$

а під функцією $\sqrt{z^2 - a^2}$ розуміють таку її вітку, що у разі $z \rightarrow \infty$ задовольняється умова $\sqrt{z^2 - a^2}/z \rightarrow 1$. Вираз для стрибка переміщень $[w]_{(1)}$ отримаємо інтегруванням співвідношення (9), якщо $|x| \leq a_{(1)}$:

$$\begin{aligned}
 [w]_{(1)}(x, t) &= \int_{-a_{(1)}}^x f_{6(1)}(x, t) dx = -\frac{\tau_{(1)}(t) - \alpha \operatorname{sgn}_{(1)} \sigma_{yy}^{\infty}}{C} \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2} + \frac{p_1 Q_{(1)}(t)}{2\pi C} \times \\
 &\times \ln \frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} + \frac{2\alpha P \gamma^+ \operatorname{sgn}[w]_{(1)}}{C} \ln \frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Якщо ввести в розгляд узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень виразом

$$K_{31} + iK_{32} = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=0)} \sqrt{\pi r} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}), \quad (11)$$

то нескладно отримати для першого кроку аналітичний вираз для КІН у випадку тріщини $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ із зоною проковзування

$$\begin{aligned}
 K_{3(1)}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a_{(1)}}} \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \sqrt{\frac{a_{(1)} \pm x}{a_{(1)} \mp x}} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max}(x) \right) dx = \\
 &= \sqrt{\pi a_{(1)}} \left(\tau_{(1)}(t) - \alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \sigma_{yy}^{\infty} \right) + \sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}} \frac{p_1 Q_{(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}} + \\
 &+ \sqrt{\pi a_{(1)}} \frac{4\alpha \operatorname{sgn}[w]_{(1)} P \gamma^+}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2}}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

Звернемося до питання про розмір зони проковзування $a_{(1)}$ [21]. У процесі зміни величини зсувного навантаження можна виділити три фази, що принципово відрізняються з точки зору розвитку проковзування берегів тріщини поздовжнього зсуву:

- Комбінація зсувного та стискаючого навантаження є така, що за зростання інтенсивності зсувних зусиль до свого локального на кроці максимуму скрізь уздовж L завжди виконується умова (4), тобто проковзування не виникає взагалі.
- Інтенсивність зсувних зусиль у певний момент часу $t_{(1)}^*$ вже достатня для виникнення умов (3) хоча б на деякій обмеженій ділянці $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ (за симетричного щодо вертикальної осі навантаження). Навантаження, коли вперше з'являється проковзування, будемо називати першим критичним. У разі переходу до другої фази навантаження для визначення розміру $a_{(1)}$ зони проковзування можна використовувати умову рівності нулю КІН (12) [6].
- Інтенсивність зсувних зусиль у певний момент часу $t_{(1)}^{**}$ достатня для виникнення умов (3) вздовж усієї границі L (миттєве поширення зони проковзування — фактично півпростори повністю ковзають один по одному). У цьому випадку КІН буде дорівнювати нулю скрізь уздовж L .

Можлива також така комбінація зсувного та притискового навантаження, що умови (3) виникають у певний момент часу вздовж всієї L за винятком $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ (миттєва поява двох півбезмежних зон проковзування).

Наявність аналітичного розв'язку для всіх параметрів НДС і, зокрема, для КІН дає можливість обчислити роботу сил тертя на ділянці $L'_{(1)}$ порушення контакту також аналітично для будь-якого розглянутого виду навантаження. Ця робота і, отже, розсіяна на $L'_{(1)}$ внаслідок зміни зовнішнього навантаження енергія в деякий момент часу t обчислюється за допомогою інтеграла

$$W_{(1)}^d(t) = - \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \left| \tau_{yz}^{\max}(x) \right| \left| [w]_{(1)}(x, t) \right| dx. \quad (13)$$

Проаналізуємо вирази (9), (10), (12) для часткового випадку навантаження, коли в точці $z_{*2} = id$ верхнього півпростору діє лише зростаюча від нуля до $Q_{\max(1)}$ зосереджена сила $Q_1(t)$, а стискання півпросторів забезпечується лише силами $P_k = \mp iP$.

Прирівнюючи у співвідношенні (12) КІН до нуля, отримуємо умову для $Q_{(1)}(t) > Q_{(1)}^*$, $Q_{(1)}^* = 4\alpha\gamma^+ Pd/hp_1$, коли вперше з'являється проковзування. Тут і далі $Q_{k(p)}^*$ — критичне значення навантаження початку проковзування на кроці p , що досягається у певний момент часу $t_{(p)}^*$ ($t_{(p)}^* \leq t_{(p)}$), де $t_{(p)}$ — момент часу завершення кроку циклу. Розмір зони проковзування визначається формулою

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{\frac{h^2 d^2 (Q_{(1)}^2(t) - Q_{(1)}^{*2})}{h^2 Q_{(1)}^{*2} - d^2 Q_{(1)}^2(t)}}. \quad (14)$$

Дослідження виявили, що за умови зростання навантаження $Q_{(1)}(t) > Q_{(1)}^*$ вимагається виконання співвідношення $h > d$ для формулювання задачі з наявністю однієї ділянки проковзування $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$. При цьому, якщо співвідношення $Q_{(1)}(t)/Q_{(1)}^*$ досягне значення h/d , то відбудеться необмежений ріст розміру ділянки проковзування. Якщо обрати значення $h = d$, то матимемо вироджений випадок миттєвого поширення зони проковзування на всю вісь $L \sim x$ як тільки $Q_{(1)}(t)$ досягне значення $Q_{(1)}^* = 4\alpha\gamma^+ P/p_1$. Вибір значень параметрів h та d таких, що $h < d$, вимагає зміни формулювання задачі на випадок появи зони проковзування у вигляді двох півбезмежних тріщин.

У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C = G/2$, $p_1 = p_2 = 1/2$. За гладкого контакту між півпросторами у згаданих формулах треба покласти коефіцієнт тертя $\alpha = 0$, що відразу дає необмежений розмір зони проковзування для будь-якого незрівноваженого зсувного навантаження.

Під час розв'язування задачі для різних сполучень способів зсувного навантаження слід враховувати, що суперпозицію отриманих розв'язків для окремих варіантів навантаження не завжди можна використати внаслідок нелінійності сформульованої задачі.

3. Загальна схема розв'язування задачі. Наступні кроки

Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу $t_{(1)}$ його завершення значення напружено-деформованого стану масиву будуть на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тому, вважаючи, що на кожному наступному кроці знак прикладеної сили змінюється на протилежний, а відносно її значення монотонно змінюється від 0 до максимального за модулем, застосуємо для отримання розв'язку таку методику.

Вважаємо, що формулювання задачі на наступному кроці відрізняється від формулювання задачі на попередньому лише наявністю вже заданого стрибка переміщень і напружень, спричинених ним. Тоді подання поля напружень для другого кроку має вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = & \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t) \quad (z \in S_k; k=1, 2; j=3-k). \end{aligned} \quad (15)$$

Напруження та переміщення повинні задовольняти крайові умови (3) на $L'_{(2)}$. Тоді можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = & \left\{ \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) \right\} - \\ & - \left\{ \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) \right\} \quad (z \in S_k; \quad k=1, 2; \quad j=3-k) \end{aligned} \quad (16)$$

з крайовими умовами:

$$\sigma_{yz(2)}^{\pm}(x, t) = -\operatorname{sgn}[w]_{(2)} \tau_{yz}^{\max}(x) - \sigma_{yz(1)}^{\pm}(x, t_{(1)}), \quad (17)$$

яка, аналогічно до попереднього кроку, породжує СІР

$$\begin{aligned} f_{3(2)}(x, t) = 0, \quad g_{6(2)}(x, t) = F_{6(2)}(x, t) = \\ = \frac{1}{2C} \left\{ \left\langle \sigma_{yz(2)}^0(x, t) \right\rangle + 2 \left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \right) \tau_{yz}^{\max}(x) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень і напружень від локального (для цього кроку) навантаження

$$\begin{aligned} \tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t_{(1)}), \quad \tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t_{(1)}), \\ Q_{(2)}(t) = Q(t) - Q_{(1)}(t_{(1)}) \quad (k=1, 2; \quad t > t_{(1)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Знайдений аналогічно до першого кроку розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{6(2)}(x, t) = \frac{1}{\pi C \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \left\langle \pi \left\{ \tau_{(2)}(t) - \alpha \left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \right) \sigma_{yy}^{\infty} \right\} x + p_1 Q_{(2)}(t) \times \right. \\ \times \operatorname{Im} \left(\frac{\sqrt{z_{*2}^2 - a_{(2)}^2}}{x - z_{*2}} \right) \left. \right\rangle + \frac{4\alpha P \left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \right)}{C \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \left(\frac{\omega_{21} \operatorname{Re} \frac{i\sqrt{z_1^2 - a_{(2)}^2}}{x - z_1}}{e_{21}} - \right. \\ \left. - \frac{\omega_{12} \operatorname{Re} \frac{i\sqrt{z_2^2 - a_{(2)}^2}}{x - z_2}}{e_{12}} \right), \quad \omega_{kj} = E_k \eta_j + E_j \eta_k (\kappa_k + 1) \quad (k=1, 2; \quad j=3-k), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} [w]_{(2)}(x, t) = - \frac{\tau_{(2)}(t) - \alpha \left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \right) \sigma_{yy}^{\infty}}{C} \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2} + \\ + \frac{p_1 Q_{(2)}(t)}{2\pi C} \ln \frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} + \\ + \frac{2\alpha P \gamma^+ \left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \right)}{C} \ln \frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \quad (|x| \leq a_{(2)}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 K_{3(2)}(t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi a_{(2)}}} \int_{-a_{(2)}}^{a_{(2)}} \sqrt{\frac{a_{(2)} \pm x}{a_{(2)} \mp x}} \left(\langle \sigma_{yz(2)}^0(x, t) \rangle + 2 \left(\text{sgn}[w]_{(2)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \text{sgn}[w]_{(1)} \right) \tau_{yz}^{\max}(x) \right) dx = \sqrt{\pi a_{(2)}} \left(\tau_{(2)}(t) - \alpha \left(\text{sgn}[w]_{(2)} - \text{sgn}[w]_{(1)} \right) \sigma_{yy}^{\infty} \right) + \\
 & + \sqrt{\frac{a_{(2)}}{\pi}} \frac{p_1 Q_{(2)}(t)}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2}} + \sqrt{\pi a_{(2)}} \frac{4\alpha \left(\text{sgn}[w]_{(2)} - \text{sgn}[w]_{(1)} \right) P \gamma^+}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2}}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що за зміни знаку навантаження (тобто $Q_{(2)}(t) < 0$) маємо $\text{sgn}[w]_{(2)} = 1$, проаналізуємо вирази (21), (22) й отримаємо розмір нової зони проковзування для вищезгаданого часткового випадку навантаження. Прирівнюючи до нуля КІН, отримуємо умову для $Q_{(2)}(t) > Q_{(2)}^*$, коли вперше з'являється проковзування. Тут $Q_{(2)}^* = 8\pi\alpha\gamma^+ Pd / (hp_1) = 2Q_{(1)}^*$ — перше критичне значення навантаження. Розмір зони проковзування визначається формулою:

$$a_{(2)}(t) = \sqrt{\frac{h^2 d^2 \left(Q_{(2)}^2(t) - Q_{(2)}^{*2} \right)}{h^2 Q_{(2)}^{*2} - d^2 Q_{(2)}^2(t)}} \quad (23)$$

Зазначимо, що критичне навантаження другого кроку (розвантаження) удвічі більше від критичного навантаження першого кроку (навантаження), а на всіх подальших кроках воно вже є таке саме: $Q_{(p)}^* = 2Q_{(1)}^*$ ($p \geq 2$).

Міркуючи таким самим чином, можна отримати локальний розв'язок для кожного наступного кроку циклу навантаження.

Підсумкове значення як стрибка переміщень, так і розсіяної енергії після p -ого кроку визначається як суперпозиція:

$$[w](x, t) = \sum_{p=1}^N [w]_{(p)}(x, t_{(p)}) + [w]_{(p+1)}(x, t) \quad (|x| \leq a_{(p+1)}; \quad t > t_{(p)}); \quad (24)$$

$$W^d(t) = \sum_{p=1}^N W_{(p)}^d(t_{(p)}) + W_{(p+1)}^d(t) \quad (t > t_{(p)}). \quad (25)$$

4. Числовий аналіз

На рис. 2 зображено залежність розміру зони проковзування $a_{(p)}/h$ на p -ому кроці симетричного циклу від знерозміреної величини прикладеної сили $p_1 Q_{(p)}(t) / (\alpha \gamma^+ P)$ під час стискування лише силами $P_k = \mp iP$. Зазначимо, що добре прослідковується локальність впливу сил притиску — з наближенням точки прикладання сили до межі розділу стає більш яскраво вираженим мінімум величини критичної сили.

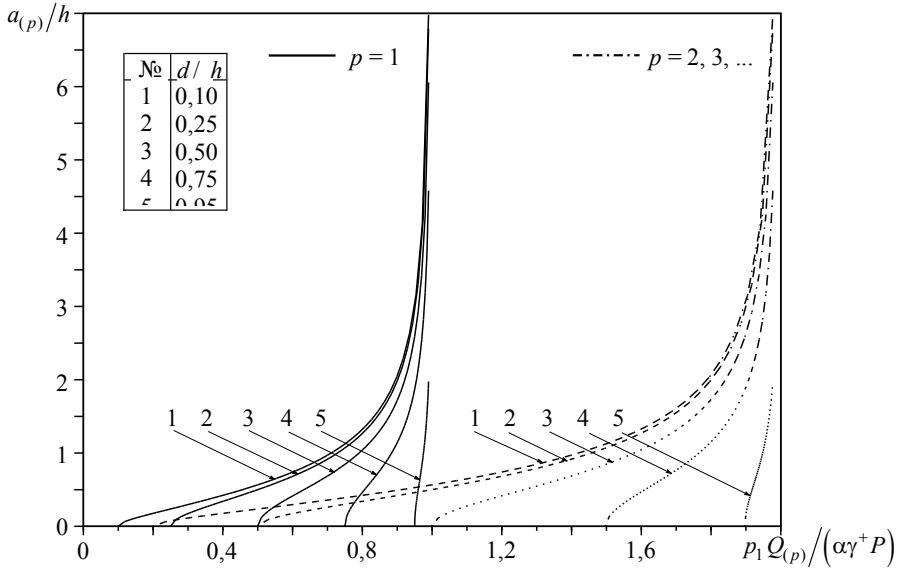


Рис. 2. Розмір зони проковзування на p -ому кроці залежно від величини прикладеної зсувної сили

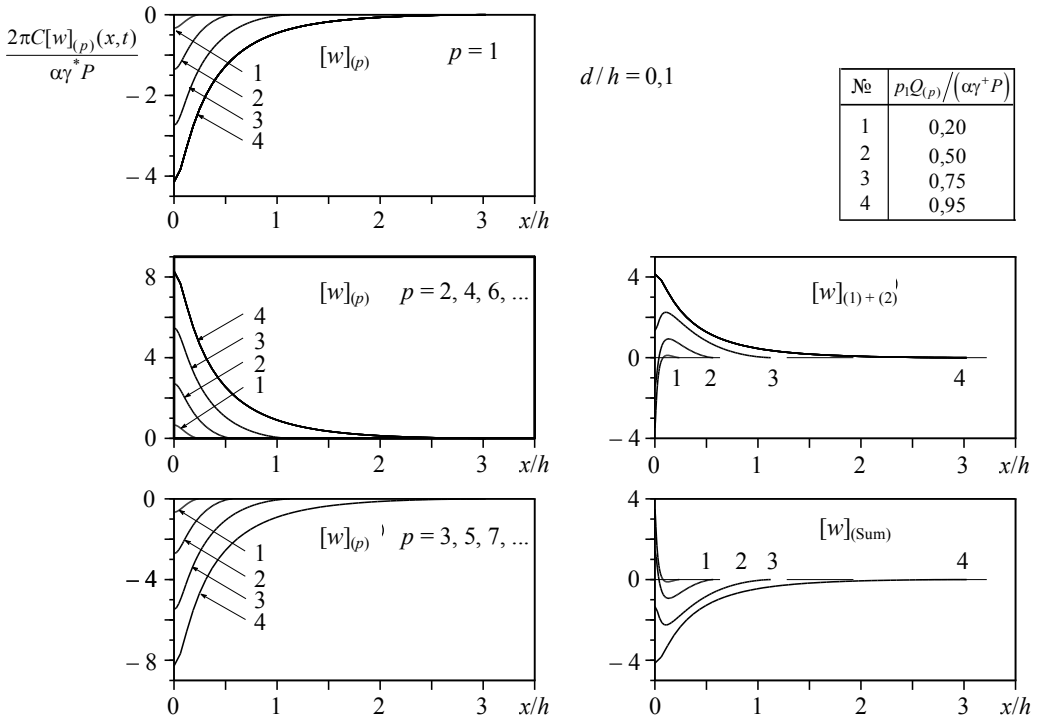


Рис. 3. Еволюція стрибка переміщень за симетричного циклічного навантаження

Зміна форми як локального, так і сумарного стрибка переміщень $2\pi C[w]_{(p)}(x,t) / (\alpha P \gamma^+)$ залежно від x/h подано на рис. 3. Помітно, що після

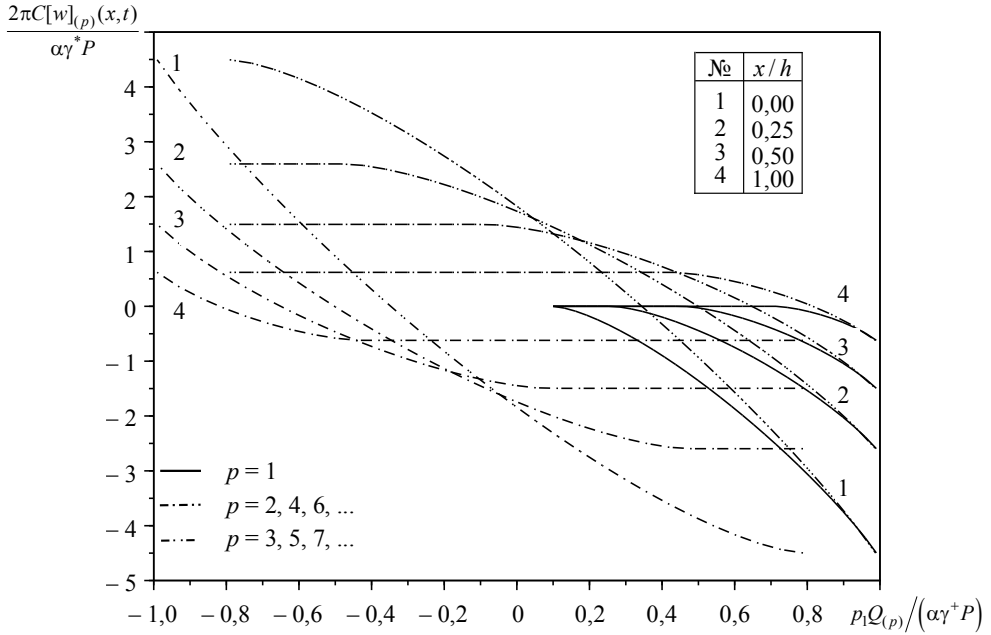


Рис. 4. Гістерезисний характер стрибка переміщень за симетричного циклічного навантаження

повного циклу зміни навантаження краї тріщини не повертаються в первісне положення, зберігаючи деякий залишковий стрибок переміщень.

На рис. 4 проілюстровано гістерезисний характер сумарного стрибка переміщень $2\pi C[w]_{(p)}(x,t) / (\alpha P \gamma^+)$ у різних точках x/h зони проковзування залежно від величини навантаження в знакозмінному симетричному циклі. Добре помітно, що такий характер еволюції властивий стрибкам переміщень не лише у центрі зони проковзування, але й у всіх інших її точках.

Висновки. Запропоновано методику розрахунку НДС за циклічного чи багатокрокового зсувного навантажування зосередженою силою притискуваних тіл, коли у контактній зоні може відбуватися проковзування з тертям. У такому формулюванні задачі з однією зоною проковзування визначено критичні значення зсувного навантаження, поточні розміри зони проковзування, дисипацію енергії на кроках циклу. З'ясовано, що у разі притискування тіл зосередженою силою на першій фазі збільшення зсувного навантаження проковзування відсутнє, на другій — монотонно зростає до певного критичного значення, коли проковзування раптово охоплює усю зону контакту (фаза 3).

У розвиток запропонованого підходу можливо природним чином змінити формулювання задачі, штучно обмежуючи допустимі апріорі розміри зони проковзування (тріщина з притиснутими берегами). Тоді фаза 2 буде продовжуватися до моменту, поки розміри заданої тріщини не почнуть обмежувати зону

проковзування. Фаза 3 у разі силової та геометричної симетрії задачі розпочнеться після збігу розмірів зони проковзування та тріщини. У цьому разі на краях тріщини виникатимуть сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові КІН.

Література

- [1] *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — Москва: Наука, 2001. — 478 с.
- [2] *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. — 1979. — № 3. — С. 387-396.
- [3] *Сулим Г. Т., Пискозуб Й. З.* Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3. — С. 110-125.
- [4] *Hills D. A., Nowell D., Sackfield A.* Mechanics of elastic contact. — Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993. — P. 238.
- [5] *Johnson K. L.* Contact mechanics. — Cambridge: Cambridge University press, 1985. Переклад: *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. — Москва: Мир, 1989. — 510 с.
- [6] *Черепанов Г. П.* О развитии трещин в сжатых телах // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, № 1. — С. 82-93.
- [7] *Comninou M., Schmueser D., Dundurs J.* Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // Int. J. Engn. Sci. — 1980. — Vol. 18. — P. 131-137.
- [8] *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Archive of App. Mech. — 1999. — Vol. 69. — P. 317-335.
- [9] *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 101-109.
- [10] *Мартиняк Р. М., Криштафович А. А.* Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками // Трение и износ. — 2000. — Т. 21, № 4. — С. 350-360. Те саме: *Martyniak R., Kryshchak A.* Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // J. Friction and Wear. — 2000. — Vol. 21, № 4. — P. 6-15.
- [11] *Архипенко К. М., Кривий О. Ф.* Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // Машинознавство. — 2008. — № 3 (129). — С. 16-21.
- [12] *Острык В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. — Киев: Наук. думка, 2006. — 328 с.
- [13] *Кундрат М. М., Сулим Г. Т.* Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях / Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. — Львів, 2003. — С. 322-324.
- [14] *Семенов Б. Н.* Контакт с трением двух упругих полуплоскостей с жестким включением на границе контакта / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26-29 сент. 1989). Ч. 2. — Одесса, 1989. — С. 85.
- [15] *Sekine H.* Mechanics of debonding along the surfaces of dispersed flat inclusions in composite materials (A model of debonding along the surface of a flat inclusion) // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. — 1982. — Vol. 48A, No 11 (435). — P. 1415-1420.
- [16] *Weertman J., Lin I.-H., Thomson R.* Double slip plane crack model // Acta met. — 1983. — Vol. 31, No 4. — P. 473-482.
- [17] *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пластичності та міцності. — Львів: Світ, 1999. — 945 с.
- [18] *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г.* Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 (Минск, 25 окт.-1 нояб. 2010 г.) В 2 ч. Ч. 2]. — Минск: БГУ, 2010. — С. 399-404.
- [19] *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.

Любов Пискозуб

Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя

- [20] *Piskozub J. Z., Sulim G. T.* Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *Journal of Engineering Mathematics*. — Special Issue Thermomechanics. — 2008. — Vol. 61. — P. 315-337.
- [21] *Пискозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною // *Прикл. проблеми мех. і мат.* —2014. —Вип. 12. —С. 184-191.

Longitudinal shear by concentrated force of bi-material with taking into account friction in the interfacial crack

Lyubov Piskozub

We constructed the exact solution of the anti-plane problem for an inhomogeneous bi-material with the interfacial crack exposed to the arbitrary normal load and cyclic loading by a concentrated force in the longitudinal direction. Using the jump function method, the problem is reduced to solving of singular integral equations for the jumps of displacements and stresses in areas with sliding friction. We analyze the effect of friction and loading parameters on the size of these zones. Hysteretic behaviour of the jumps of stresses and displacements in these areas is observed.

Продольный сдвиг сосредоточенной силой биматериала с межфазной трещиной при учете трения

Любовь Пискозуб

Построено точное решение антиплоской задачи для неоднородного биматериала с трещиной на границе раздела, подверженного неоднородной нормальной нагрузке и циклическому нагружению сосредоточенной силой в продольном направлении. Методом функций скачка задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения для скачков смещений и напряжений в зонах проскальзывания с трением. Анализируется влияние параметров нагружения и трения на размеры этих зон. Отмечено гистерезисное поведение скачков напряжений и перемещений в этих областях.

Представлено професором Б. Герою

Отримано 08.10.14