УДК 519.6

Моделирование движения капли вязкой жидкости в канале с сужением при наличии на поверхности капли нерастяжимой мембраны

Владимир Фенченко

К. ф.-м. н., с. н. с., Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, e-mail: vfenchenko@ukr.net

Разработана численная модель динамики движения капли вязкой жидкости, ограниченной упругой, непроницаемой и нерастяжимой мембраной в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Модель базируется на предположении, что мембрана имеет конечную толщину, а изменение свойств среды происходит внутри мембраны, т. е. на представлении двухфазной системы однофазной средой с резко меняющимися характеристиками и применении «сквозного счета» с использованием схемы расщепления по физическим факторам. Показано, что наличие нерастяжимой мембраны на поверхности капли приводит к качественным изменениям в характере ее деформации при прохождении сужения.

Ключевые слова: везикула, мембрана, капля, численное моделирование, вязкая жидкость, несмешивающаяся среда, уравнения Навье-Стокса.

Введение. Многие исследователи проявляют интерес к моделированию течений биологических жидкостей, в частности, крови, которая [1] представляет собой плазму с взвешенными в ней форменными элементами: лейкоцитами, тромбоцитами и эритроцитами, на которые приходится основной объем форменных элементов. Размер эритроцитов велик по сравнению с молекулами плазмы и можно было бы ожидать [2], что кровь ведет себя как ньютоновская жидкость с вязкостью, большей вязкости плазмы. Однако это не так. В крупных сосудах неньютоновость течения наблюдается вблизи стенок, а в более мелких сосудах область неньютоновости охватывает уже почти все поперечное сечение. Такое поведение крови вызвано изменением концентрации эритроцитов по сечению сосуда [3] и динамикой изменения формы эритроцитов в зависимости от градиента скорости (скорости сдвига) [1].

Моделированию движения эритроцитов в крупных сосудах посвящено значительное число работ [см., например, 3-7], в которых получены интересные результаты, касающиеся, однако, движения эритроцитов в равномерном потоке плазмы вдали от стенок сосудов. В частности, обнаружены различные типы движения: параллельный перенос, покачивание, кувыркание и изменение формы эритроцита в зависимости от параметров течения и свойств мембраны эритроцита. Между тем, в сосудах микроциркуляторного русла кровь движется существенно неравномерно, в том числе и вследствие активного расширения и сужения стенок самих капилляров [8], а размеры эритроцитов соизмеримы с диаметрами капилляров. Поэтому исследование движения эритроцитов в неравномерном потоке и их взаимодействие со стенками сосудов и между собой представляет интересную и важную задачу.

Моделирование движений эритроцитов приводит к необходимости решения системы уравнений Навье-Стокса для окружающей среды и внутриклеточной жидкости с учетом граничных условий на поверхности раздела и одновременным определением положения этой поверхности. Близкими являются задачи моделирования динамики двухфазных систем с несмешивающимися фазами, методам решения которых посвящено большое число публикаций. Значительная часть разработанных численных алгоритмов основана на процедуре явного выделения межфазных границ, когда расчетная сетка в процессе решения задачи постоянно перестраивается в соответствии с изменениями положения и формы поверхности раздела. Более удобным оказывается применение численных методов, в которых отсутствует необходимость явного выделения границы раздела путем перестроения расчетной сетки, то есть методов сквозного счета. При этом полагается, что движение каждой фазы подчиняется одним и тем же уравнениям гидродинамики, но параметры среды (давление, плотность, вязкость) претерпевают разрыв на границе раздела фаз [см. 9-11 и др.].

Главное отличие рассматриваемой задачи от известных задач моделирования динамики капель вязкой несжимаемой жидкости в несмешивающейся среде [12, 13] в наличии упругой мембраны на поверхности эритроцита, отделяющей внутриклеточную жидкость от плазмы крови [14]. Мембрана пропускает низкомолекулярные вещества, поэтому объем внутриклеточной жидкости при изменении осмотического давления внешней среды может меняться. При снижении осмотического давления плазмы вода будет поступать в клетку, что при достижении предела растяжимости приведет к разрыву ее оболочки — осмотического гемолиза. Напротив, повышение осмотического давления внешней среды вызывает выход воды из клетки, потерю упругости, сморщивание. Это также может привести к разрушению клетки макрофагами тканей. Однако эти процессы достаточно медленны и поэтому изменением как объема, так и поверхности эритроцита в процессе его движения можно пренебречь.

Таким образом, хорошей моделью эритроцита является так называемая везикула — капля вязкой жидкости, помещенная в другую вязкую жидкость, ограниченная непроницаемой и нерастяжимой мембраной. Цель этого исследования состоит в разработке численной модели динамики движения такой везикулы в потоке вязкой несжимаемой жидкости в канале с препятствиями, в частности, при наличии сужений русла.

1. Уравнения, граничные и начальные условия

В двумерном случае, для которого расчетные соотношения существенно упрощаются и, в тоже время, все основные особенности движения сохраняются, локальная энергия изгиба мембраны определяется формулой [3]: $E_c = \frac{\kappa}{2} H^2 ds$, а сила, вызванная изгибом, направлена по нормали и равна $\vec{F}_c = \kappa\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \dfrac{H^3}{2}\right)\vec{n}$,

где κ — изгибная жесткость мембраны; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к ее контуру, а H — кривизна контура.

Так как мембрана может считаться практически нерастяжимой, то к энергии следует добавить энергию, ассоциированную с локальным множителем Лагранжа [3] $E_l = \psi ds$. Соответствующая дополнительная сила [3, см. также 15] $\vec{F}_l = -\left(\psi H\vec{n} + \dfrac{\partial\psi}{\partial s}\vec{t}\right)$, где ψ — локальный множитель Лагранжа, а $\vec{t}$ — вектор касательной к контуру мембраны.

Что касается взаимодействия клеток со стенками сосудов, то в условиях нормы адгезия их к эндотелию относительно невелика — как известно, при ее увеличении значительно повышается риск развития тромбозов и может не учитываться [4, 6, 16].

Следуя работе [17], введем в рассмотрение непрерывную вспомогательную функцию уровня Φ, которая является расстоянием до мембраны со знаком (рис. 1). Тогда [см. аналогичный пример для сил поверхностного натяжения 18] силы, действующие на поверхности мембраны, можно записать в виде:

$$\vec{F} = \left\{\left[\kappa\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{H^3}{2}\right) - \psi H\right]\vec{n} + \frac{\partial\psi}{\partial s}\vec{t}\right\}\delta(\Phi), \tag{1}$$

где δ — дельта-функция; $\vec{n} = \left(\nabla\Phi/|\nabla\Phi|\right)\big|_{\Phi=0}$ — внешняя нормаль; $H = \left(\nabla, \nabla\Phi/|\nabla\Phi|\right)\big|_{\Phi=0}$ — кривизна; ∇ — оператор набла, компоненты которого являются частными производными по координатам; $(\ ,\ )$ — обозначает скалярное произведение векторов, а $|\ \ |$ — модуль (длина) вектора. Иная форма записи этого выражения

$$\vec{F} = \left\{\left[\kappa\left(\Delta^{\perp} H + H^3/2\right) - \psi H\right]\vec{n} + \nabla^{\perp}\psi\right\}\delta(\Phi), \tag{1^1}$$

где $\Delta^{\perp}$ — оператор Бельтрами-Лапласса ($\Delta^{\perp} = \partial_i^{\perp}\partial_i^{\perp}$, $\partial_i^{\perp} = \delta_{i,k}^{\perp}\partial_i$, $\delta_{i,k}^{\perp} = \delta_{i,k} - n_i n_k$ — проекционный оператор на мембрану), $\nabla^{\perp} = \left(\partial_i^{\perp}\right)$; по повторяющимся индексам проводится, как обычно, суммирование.

В трехмерном пространстве выражение для силы, действующей на поверхности мембраны, имеет аналогичный вид [19-23]

Рис. 1. Расчетная область

$$\vec{F} = \left\langle \left\{ \kappa \left[\Delta^{\perp} H + H \left(\frac{H^2}{2} - 2K \right) \right] - \psi H \right\} \vec{n} + \nabla^{\perp} \psi \right\rangle \delta(\Phi), \tag{1^2}$$

где $H = H_1 + H_2$ — средняя кривизна; $K = H_1 \cdot H_2$ — гауссова кривизна мембраны, H_1, H_2 — главные кривизны мембраны.

Запишем уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности для внешней среды в сосуде и внутриклеточной жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}, \nabla\right)\vec{U} + \nu\Delta\vec{U} = \dfrac{1}{\rho}\left(-\nabla P + \vec{F}\right) + \vec{g}, \\ \left(\nabla, \vec{U}\right) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где ρ — плотность; P — давление; $\vec{U}$ — вектор скорости; t — время; ν — кинематическая вязкость; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. В общем случае свойства внешней среды и внутриклеточной жидкости различны, тогда плотность и вязкость следует вычислять по формулам $\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\chi(\Phi)$, $\nu = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\chi(\Phi)$, где индекс «1» относится к внешней среде, индекс «2» к внутриклеточной жидкости, а $\chi(\Phi) = \begin{cases} 1, & \Phi > 0 \\ 0, & \Phi < 0 \end{cases}$ — функция Хэвисайда.

В выражение (1) для силы $\vec{F}$ входит неизвестный локальный множитель Лагранжа ψ, поэтому система уравнений (2) должна быть дополнена условием на мембране для его определения:

$$\left(\vec{t}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial s}\right) = \left(\vec{U}, \vec{n}\right) + \frac{\partial\left(\vec{U}, \vec{t}\right)}{\partial s} = 0. \tag{3}$$

Так как на поверхности мембраны выполнены кинематические условия равенства скоростей жидкости с разных сторон мембраны, то скорость $\vec{U}$ является непрерывной функцией. Тогда уравнение переноса введенной функции уровня Φ, определяющей динамику мембраны, можно записать в виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\vec{U}, \nabla\Phi\right) = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (2), (4) должна быть дополнена начальными и граничными условиями. На данном этапе будем пренебрегать упругостью стенок сосуда и колебаниями давления и на входе в расчетный участок сосуда используем условия невозмущенного потока; на выходе ставим условие свободного вытекания, на стенках — условия не протекания и прилипания. В начальный момент задаем распределение скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности и граничным условиям, а также начальное положение мембраны.

2. Численная реализация

В качестве масштабов при обезразмеривании удобно принять характерный диаметр сосуда L_0, скорость потока U_0 и время L_0/U_0. Тогда система (2) приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U},\nabla\right)\vec{U} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{1-\left(1-\mu_2/\mu_1\right)\chi(\Phi)}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi(\Phi)} \Delta\vec{U} = \dfrac{-\nabla P + \vec{F}}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi(\Phi)} + \dfrac{1}{\mathrm{Fr}} \dfrac{\vec{g}}{g}, \\ \left(\nabla,\vec{U}\right) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\vec{F} = \left\{ \left[\frac{1}{\mathrm{Ch}} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{H^3}{2} \right) - \psi H \right] \vec{n} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \vec{t} \right\} \delta(\Phi), \tag{6}$$

давление отнесено к $\rho_1 U_0^2$; $\mathrm{Re} = U_0 L_0/\nu_1$ — параметр Рейнольдса (характеризующий отношение нелинейного и диссипативного членов в уравнениях Навье-Стокса); $\mathrm{Ch} = \rho_1 U_0^2/\kappa$ — параметр Коши (выражающий отношение сил инерции жидкости к упругим силам на мембране); $\mathrm{Fr} = U_0^2/(L_0 g)$ — число Фруда (характеризующее соотношение между силой инерции и внешней силой, в поле которой происходит движение).

Заметим, что в близких задачах о моделировании движения капли вязкой жидкости в несмешивающейся среде выражение для силы значительно упрощается и имеет вид [24]: $\vec{F} = \dfrac{H}{\mathrm{We}} \delta(\Phi)\vec{n}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а $\mathrm{We} = \rho_1 L_0 U_0^2/\sigma$ — параметр Вебера (определяющий отношение сил инерции жидкости к силам поверхностного натяжения). Существенно, что это выражение не содержит неизвестный локальный множитель Лагранжа ψ и, следовательно, уравнение (3) для его определения излишне.

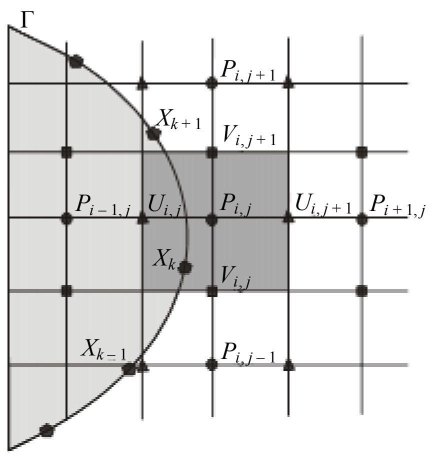

Рис. 2. Нумерация точек для MAC-сетки

В настоящее время для численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. Большая часть из них разработана применительно к системе уравнений, записанных в переменных «вихрь – функция тока» или «скорость – вихрь скорости», однако использование преобразованных переменных не позволяет обобщить эти методы на пространственные потоки.

Решение же уравнений Навье-Стокса в физических переменных «скорость – давление» связано с трудностями расчета поля давления, согласованного с полем скоростей, так как уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости содержит только составляющие скорости и не обеспечивает прямую связь с давлением (для сжимаемой жидкости такая связь осуществляется через ее плотность). Но такой подход, тем не менее, предпочтителен, так как он позволяет решать по единому алгоритму как двухмерные, так и трехмерные задачи.

Для решения системы уравнений движения (2) применим схему расщепления по физическим факторам, близкую к описанной в работе [25] для численного решения классических уравнений Навье-Стокса. Для дискретизации уравнений движения используем метод конечных разностей на прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов (сетка MAC-типа рис. 2); давление вычисляем в центрах ячеек, а составляющие скорости на их гранях. При этом строим разностную сетку так, чтобы граница расчетной области проходила через точки, в которых вычисляется нормальная составляющая скорости.

На первом этапе предполагаем, что перенос количества движения осуществляется за счет конвекции и диффузии, и определяем промежуточное поле скоростей $\tilde{U}$:

$$\frac{\vec{U}^{(\sim)}-\vec{U}^{(n)}}{\Delta t}+\left(\vec{U}^{(n)},\nabla\right)\vec{U}^{(n)}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1-\left(1-\mu_2/\mu_1\right)\chi_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)}\Delta\vec{U}^{(n)}=$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{\mathrm{Ch}}\left(\frac{\partial^2 H^{(n)}}{\partial s^2}+\frac{H^{(n)3}}{2}\right)-\psi^{(n)}H^{(n)}\right]\vec{n}^{(n)}+\frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial s}\vec{t}^{(n)}}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)}\delta_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{\vec{g}}{g}. \qquad (7)$$

Полученное таким образом поле скорости $\vec{U}^{(\sim)}$, вообще говоря, не удовлетворяет условию несжимаемости, однако даёт правильные вихревые характеристики.

Далее определяем давление, решая уравнение Пуассона, которое вытекает из уравнения движения с учетом соленоидальности вектора скорости $\vec{U}^{(n+1)}$:

$$\nabla\left[\frac{\nabla P^{(n+1)}}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)}\right]=\frac{\nabla\vec{U}^{(\sim)}}{\Delta t} \qquad (8)$$

и, предполагая, что перенос количества движения осуществляется за счет градиента давления, определяем новое поле скоростей $\vec{U}^{(n+1)}$:

$$\frac{\vec{U}^{(n+1)}-\vec{U}^{(\sim)}}{\Delta t}=-\frac{\nabla P^{(n+1)}}{1-\left(1-\rho_2/\rho_1\right)\chi_\varepsilon\left(\Phi^{(n)}\right)}. \qquad (9)$$

После определения нового поля скоростей $\vec{U}^{(n+1)}$ рассчитываем новое значение функции уровня. Однако неизбежное влияние «схемной вязкости» в процессе непосредственного решения уравнения переноса (4) приводит к искажению геометрии мембраны и погрешностям в расчете сил, действующих на ней. Применение схем повышенного порядка точности и процедур реинициализации позволяет несколько уменьшить погрешности до уровня, приемлемого в задачах моделирования движения капель вязкой жидкости в несмешивающейся среде [12, 13]. Но для достоверного вычисления сил, обусловленных изгибной жесткостью мембраны и ее нерастяжимостью, необходима дополнительная корректировка положения мембраны. Для этого используются специальные невесомые частицы «маркеры», находящиеся на мембране и переносимые полем скоростей:

$$\frac{\vec{X}_p^{(n+1)} - \vec{X}_p^{(n)}}{\Delta t} = \vec{U}^{(n+1)}\left(\vec{X}_p^{(n)}\right). \tag{10}$$

Теперь, наконец, можно определить локальный множитель Лагранжа ψ для выполнения условия нерастяжимости мембраны (3). Для этого достаточно просто предположить, что на поверхности мембраны действует дополнительная сила поверхностного натяжения, меняющаяся, вообще говоря, вдоль контура мембраны и противодействующая растяжению [3], и принять $\psi^{(n+1)} = k_s \times \times\left(ds^{(n+1)} - ds^{(n)}\right)$, где ds — длина дуги контура, а множитель k_s определяет локальную силу поверхностного натяжения.

Для тестирования и верификации разработанного алгоритма используем результаты моделирования движения эритроцитов в нестесненном потоке [3-7], а также тот факт, что случай $\psi \equiv 0$, Ch>>1 (отвечающей отсутствию мембраны) соответствует динамике капли вязкой жидкости, рассмотренной, в частности, в работах [12, 13].

3. Вычислительный эксперимент

В литературе известно множество экспериментальных работ и примеров расчета течений вязкой жидкости в каналах с препятствиями. Интерес к таким работам вызван тем, что наличие какого-либо препятствия на обтекаемой твердой поверхности может значительно влиять на структуру потока с поперечным сдвигом, в частности, такие задачи возникают при моделировании тока крови в сосудах с геометрическими неоднородностями на стенках. Однако в известных работах кровь считалась однородной жидкостью, а вопросы динамики прохождения эритроцитов в сосудах микроциркуляторного русла с сужениями не рассматривались.

Так как гидродинамические параметры плазмы крови и внутриклеточной жидкости эритроцитов близки, а при малых числах Рейнольдса, характерных для течения крови в малых сосудах, лучше использовать так называемое «диффузное» характерное время ν/L_0^2, тогда система (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathrm{Re}\left(\vec{U},\nabla\right)\vec{U} + \Delta\vec{U} = \mathrm{Re}\left[-\nabla P + \vec{F}\right], \\ \left(\nabla,\vec{U}\right) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

и, очевидно, в этом случае основную роль будут играть силы, обусловленные нерастяжимостью мембраны.

При движении клетки в свободном канале, так как скорость потока в центральной зоне выше, чем у стенок, то в процессе движения клетка смещается к центру потока и приобретает характерную форму «туфельки» [3-7], зависящую, в частности, от отношения длины контура клетки к длине контура эквивалентного (равного по площади сечению клетки) круга и от изгибной жесткости мембраны (рис. 3).

Рассмотрим движение клетки в канале с сужением. Как известно, при больших числах Рейнольдса перед препятствием возникает зона «подпора», а за ним «тень» и циркуляционное «возвратное» течение. Для малых чисел Рейнольдса, характерных для течения крови, поток плавно обтекает препятствие, скорость течения начинает возрастать перед сужением и постепенно уменьшается ним, а возвратное течение практически отсутствует.

Рассмотрим вначале движение в таком канале клетки с легко растяжимой мембраной. В этом случае силы, действующие на мембране, незначительны, поэтому клетка под действием потока, скорость которого мала у стенок и увеличивается по мере удаления от них, естественно, начинает деформироваться, втягиваясь ускоряющимся потоком в зону сужения канала. В результате клетка приобретает своеобразную асимметричную форму, а ее мембрана значительно растягивается, вплоть до разрыва при низкой прочности мембраны (рис. 3).

Рассмотрим далее движение клетки с нерастяжимой мембраной рис. 4. В этом случае на поверхности раздела действуют силы, имеющие как нормальную, так и касательную составляющие, обеспечивающие нерастяжимость мембраны. Действие этих сил приводит к существенному изменению формы клетки в зоне сужения. После прохождения узкого места форма клетки снова изменяется, и она постепенно опять приобретает характерную форму «туфельки», отмеченную в частности в работе [7], зависящую от того, насколько отличается длина контура клетки от длины контура эквивалентной окружности (равной по площади) и величины скорости потока.

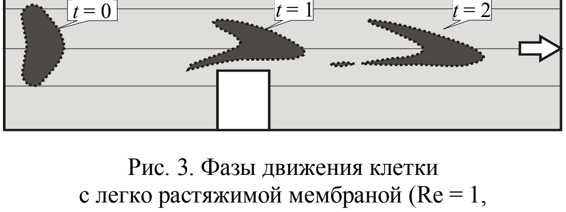

Рис. 3. Фазы движения клетки с легко растяжимой мембраной (Re = 1, в начальном состоянии длина контура клетки больше длины контура эквивалентной окружности в 1,2 раза

Заметим, что аналогичную форму «туфельки» может приобретать и несмешивающаяся капля вязкой жидкости в свободном потоке при подходящем выборе величины поверхностного натяжения. Такие задачи неоднократно рассматривались ранее [см., например, 12, 13]. В этом случае на поверхности раздела действуют

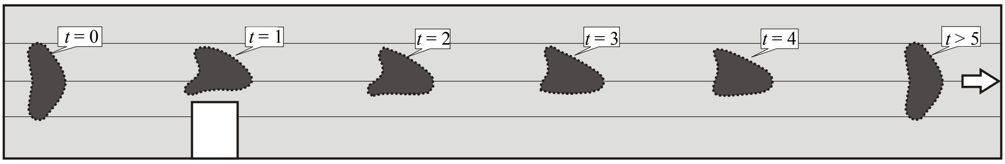

Рис. 4. Фазы движения клетки с нерастяжимой мембраной (Re = 1)

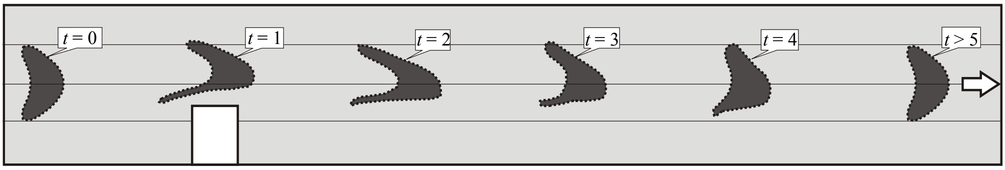

Рис. 5. Фазы движения несмешивающейся капли (Re = 1, We = 30)

силы поверхностного натяжения, направленные по нормали и стремящиеся минимизировать поверхность капли и уменьшить ее деформацию в потоке. Так как силы поверхностного натяжения не исключают изменение длины контура капли под действием неравномерности потока, то контур капли будет несколько растягиваться при входе в узкую часть канала и потому ее форма будет качественно отличаться от формы клетки с нерастяжимой мембраной (рис. 5).

С другой стороны, при увеличении сил поверхностного натяжения форма капли в узкой части канала может оказаться близкой к форме клетки с нерастяжимой мембраной, но тогда, так как после прохождения сужения канала силы поверхностного натяжения «стремятся» придать капле форму, близкую к кругу, ее форма вдали от сужения будет качественно отличаться от формы клетки с нерастяжимой мембраной (рис. 6). В этом случае «релаксация» формы капли к равновесной происходит быстрее, чем при малом поверхностном натяжении.

Заметим, что приведенные выше описания моделируемых процессов носят чисто качественный, иллюстративный характер. Их реальное протекание, конечно, существенно зависит от диаметра сосуда, скорости и вязкости среды, параметров мембраны клетки и т. п.

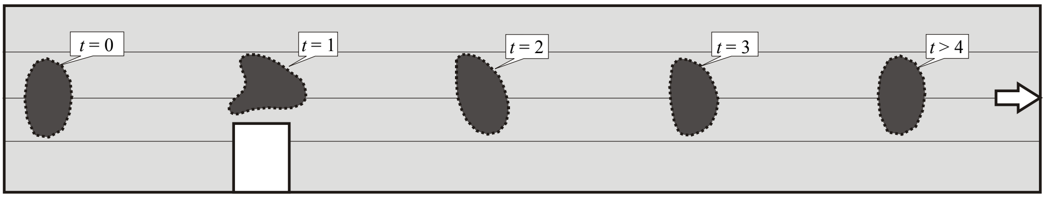

Рис.6. Фазы движения несмешивающейся капли (Re = 1, We = 10)

Выводы. Предложен новый подход к численному моделированию динамики движения капли вязкой жидкости, ограниченной упругой, непроницаемой и нерастяжимой мембраной конечной толщины в потоке вязкой несжимаемой жидкости в канале с препятствием. Подход основан на представлении двухфазной системы однофазной средой с резко меняющимися характеристиками и применении «сквозного счета» с использованием схемы расщепления по физическим факторам и использовании конечных разностей на прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов для дискретизации уравнений Навье-Стокса.

Для иллюстрации работы предложенного алгоритма выполнено численное моделирование движения биологической жидкости с одиночной везикулой, моделирующей эритроцит в плазме крови в сосуде микроциркуляторного русла с локальным сужением. Получены новые физические результаты, в частности, показано, что наличие нерастяжимой мембраны приводит к качественным изменениям в характере деформации капли при прохождении сужения.

Литература

[1] Механика кровообращения; пер. с англ. / *К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид.* — Москва: Мир, 1981. — 624 с.

[2] *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. — Ленинград: Наука, 1975. — 592 с.

[3] Lateral migration of a two-dimensional vesicle in unbounded Poiseuille flow / *B. Kaoui, G. H. Ristow, I. Cantat* et all. // Phys. Rev. E 77. — 2008. — P. 021903.

[4] *Cantat I., Kassner K., Misbah C.* Vesicles in haptotaxis with hydrodynamical dissipation // Eur. Phys. J. E. — 2003. — Vol. 10. — P. 175-189.

[5] A boundary integral method for simulating the dynamics of inextensible vesicles suspended in a viscous fluid in 2D / *Shravan K. Veerapaneni, D. Gueyffier, D. Zorin, G. Biros* // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228. — P. 2334-2353.

[6] *Cantat I., Misbah C.* Lift Force and Dynamical Unbinding of Adhering Vesicles under Shear Flow // Phys. Rev. Let. — 1999. —- T. 83. — P.880-883.

[7] *Kaoui B., Biros G., Misbah C.* Why Do Red Blood Cells Have Asymmetric Shapes Even in a Symmetric Flow // Phys. Rev. Let. — 2009. — Vol. 103. — P. 188101.

[8] Моделирование процессов микрогемоциркуляции с учетом пульсовых колебаний давления / *Т. А. Хмель, А. В. Федоров, В. М. Фомин, В. А. Орлов* // ПМТФ. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 92-102.

[9] *Демьянов А. Ю., Динариев О. Ю.* Применение метода функционала плотности для численного моделирования течений многокомпонентных многофазных смесей // Прикладная механика и техническая физика. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 68-77.

[10] *Hirt C. W., Nichlos B. D.* Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comp. Physics. — 1981. — Vol. 39, № 1. — P. 201-225.

[11] *Issa R. I.* Solution of the implicitly discretized fluiduid flow equations by operator-splitting // J. Comp. Physics. — 1986. — Vol. 62, № 1. — P. 40-65.

[12] *Майков И. Л., Директор Л. Б.* Численная модель динамики капли вязкой жидкости // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — Т. 10. — С. 148-157.

[13] *Тонков Л. Е.* Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости методом функций уровня // Вестник Удмуртского университета. Механика. — 2010. — Вып. 3. — С. 134-140.

[14] *Keller S. R., Skalak R.* Motion of a tank-treading ellipsoidal particle in a shear flow // J. Fluid Mech. — 1982. — Vol. 120. — P. 27-47.

[15] A boundary integral method for simulating the dynamics of inextensible vesicles suspended in a viscous fluid in 2D / *Shravan K. Veerapaneni, D. Gueyffier, D. Zorin, G. Biros* // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228. — P. 2334-2353.

[16] Fluctuation analysis of tension-controlled undulation forces between giant vesicles and solid substrates / *J. Rädler, T. J. Feder, H. H. Strey, E. Sackmann* // Phys. rev. E. — 1995. — Vol. 51. — P. 4526-4536.
[17] *Osher S. J., Fedkiw R. P.* Level Set methods and dynamic implict surfaces. — Springer, 2003. — 273 p.
[18] *Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A.* A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. — 1992. — Vol. 100. — P. 335-354.
[19] *Canham P. B.* The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell // J. Theor. Biol. — 1970. — Vol. 26(1). — P. 61-81.
[20] *Вергелес С. С.* Реологические свойства взвеси везикул // Письма в ЖЭТФ. — 2008. — Т. 87. — С. 597.
[21] *Lebedev V. V., Turitsyn K. S., Vergeles S. S.* Dynamics of nearly spherical vesicles in an external flow // Phys. Rev. Lett. — 2007. — № 99. — P. 218101.
[22] *Turitsyn K. S., Vergeles S.* S. Wrinkling of vesicles during transient dynamics in elongational flow // Phys. Rev. Lett. — 2008. — № 100. — P. 028103.
[23] A boundary integral method for simulating the dynamics of inextensible vesicles suspended in a viscous fluid in 2D / *Shravan K. Veerapanen, Gueyffier D., Zorin D., Biros G.* // Journal of Computational Physics. — 2009. — №228. — P. 2334-2353.
[24] *Ou-Yang Zhong-can, Helfrich W.* Instability and Deformation of a Spherical Vesicle by Pressure // Phys. Rev. Let. — 1987. — Vol. 59, No 21. — P.2486-2488.
[25] *Волков К. Н.* Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. — 2005. — Т.6. — С. 269-281.

Simulations of viscous cell movement in a channel with narrowing in the presence of the inextensible membrane on the cell surface

Vladimir Fenchenko

A numerical model of movement of a cell of viscous fluid bounded with an elastic, impermeable and non-stretchable membrane in a flow of viscous incompressible fluid. The model is based on an assumption that the membrane has a finite thickness and the change of the medium properties occurs inside the membrane, i.e. on the representation of a two-phase system with a single-phase medium with sharply varying characteristics and applying shock-capturing method using the scheme of splitting on physical factors. It is shown that the presence of non-stretchable membrane on the surface of the cell leads to qualitative changes of its deformation during the passage of the narrowing.

Моделювання руху краплі в'язкої рідини в каналі зі звуженням за наявності на поверхні краплі мембрани, що не розтягується

Володимир Фенченко

Розроблено чисельну модель динаміки руху краплі в'язкої рідини, яка обмежена пружною, непроникною та такою, що не розтягується, мембраною у потоці в'язкої нестисливої рідини. Модель базується на припущенні, що мембрана має кінцеву товщину, а зміна властивостей середовища проходить усередині мембрани, тобто на поданні двохфазної системи однофазним середовищем із характеристиками, які різко змінюються, та застосуванні «наскрізного рахунку» з використанням схеми розщеплення за фізичними факторами. Показано, що наявність мембрани, яка не розтягується, на поверхні краплі призводить до якісних змін у характері її деформації у разі проходження звуження.

Представлено професором Є. Чаплею

Отримано 03.07.14