

Дослідження температурного поля півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну

Віктор Шевчук¹, Олександр Гавриць²

¹ к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: shevchuk@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept11@iapmm.lviv.ua

На основі математичної моделі теплових процесів у тілах із тонкими шаруватими покриттями сформульовано крайову задачу теплопровідності з узагальненою нелінійною граничною умовою променево-конвективного теплообміну півпростору з довкіллям через багат шарове покриття. Методом квазілінеаризації побудовано ітераційну схему розв'язання цієї нелінійної крайової задачі. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано наближений розв'язок лінеаризованої задачі для кожної ітерації. На основі розробленої ітераційної процедури проведено дослідження впливу геометричних та теплофізичних характеристик покриття й умов теплообміну з довкіллям на теплові процеси в півпросторі з багат шаровим покриттям.

Ключові слова: півпростір, багат шарове покриття, променево-конвективний теплообмін, узагальнені нелінійні граничні умови, квазілінеаризація, інтегральне перетворення Лапласа, температурне поле.

Вступ. Дослідження теплових і термомеханічних процесів у шаруватих структурах багат функціонального призначення, які перебувають у різноманітних експлуатаційних умовах, є важливою й актуальною науковою проблемою. Розрахунок температурних полів у таких структурах, що працюють за умов променевого та конвективного нагрівання чи охолодження, проводиться на базі відповідних математичних моделей і розв'язування нелінійних крайових задач теплопровідності із застосуванням числових методів та аналітично-числових підходів.

Для розв'язання задач теплопровідності в однорідних тілах за променево-конвективного теплообміну з довкіллям застосовуються різні варіанти методу послідовних наближень [1-4], зведення до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра [5-7], методи збурень [2, 8] і квазілінеаризації [9, 10]. Для визначення температурного поля з нелійними умовами теплообміну в багат шаровій пластині [11] та у півбезмежному термочутливому трискладовому тілі [12] використано метод зведення за допомогою функцій Гріна відповідної задачі теплопровідності до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду з наступним використанням лінійних сплайнів. Для розв'язання нелінійних задач тепловипромінюючого тіла з тонким покриттям у роботі [13]

запропоновано зведення до еквівалентних систем нелінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма за просторовою координатою та Вольтерра за часом. Для побудови розв'язку нелінійної контактної-крайової задачі нестационарної теплопровідності у праці [14] і дослідження впливу випромінювання на теплоперенос у пластинах із тонкими покриттями у статті [15] застосовано процедуру квазілінеаризації та метод скінчених різниць.

На прикладі розв'язання крайової задачі теплопровідності для півпростору за променевого охолодження в доквіллі показано [16] суттєву перевагу використання методу квазілінеаризації під час розв'язання задачі з нелінійною граничною умовою, який має високу швидкість збіжності порівняно з іншими розглянутими ітеративними методами.

Для розв'язання крайових задач теплопровідності для тіл із тонкими покриттями найефективнішим підходом є застосування узагальнених лінійних [17-21] (для тіл з одно- чи багатошаровими покриттями) й узагальнених нелінійних граничних умов [22, 23, 15] (для тіл з одношаровими покриттями). У роботі [24] отримано узагальнену нелінійну граничну умову опису променево-конвективного теплообміну тіл із доквіллям через багатошарове покриття.

У цій роботі з використанням нелінійної граничної умови [24] проведено узагальнення результатів розрахунку температурного поля в півпросторі за конвективної взаємодії з доквіллям через багатошарове покриття [20] на випадок променево-конвективного нагрівання такої системи. Методом квазілінеаризації [25] побудовано ітераційну схему для визначення температури в півпросторі, а методом інтегрального перетворення Лапласа [26] отримано наближений аналітичний розв'язок лінеаризованої задачі для кожної ітерації. Проведено дослідження особливостей перебігу теплопереносу в півпросторі з багатошаровим покриттям у разі зміни теплофізичних характеристик покриття й інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання зовнішнім середовищем.

1. Формулювання задачі

Розглядається одновимірною задачею теплопровідності для півпростору з n -шаровим покриттям товщиною $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ за променево-конвективного нагрівання.

Початок координати $z = 0$ розміщено на контактній поверхні покриття з основою, додатний відлік цієї координати спрямовано в глибину півпростору (рис. 1).

Рівняння теплопровідності та початкова умова мають вигляд

$$\frac{\partial t_j}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$t_j|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad j = T, 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

Приймаємо, що на границі покриття–середовище відбувається променево-конвективний теплообмін

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \varepsilon \sigma_0 (t_n^4 - t_C^4) + \mu (t_n - t_C), \quad \text{якщо } z = z_n = -\delta, \quad (3)$$

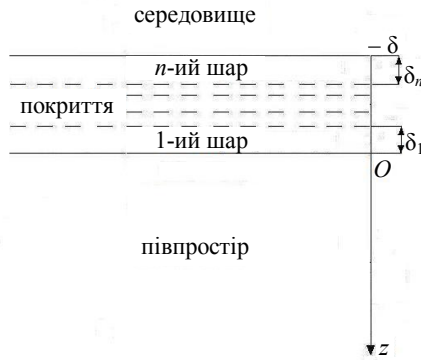


Рис. 1. Схема задачі теплопровідності для півпростору з багат шаровим покриттям

на поверхнях розділу шарів покриття та покриття з тілом реалізуються умови ідеального теплового контакту

$$t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial z}, \quad \text{якщо } z = z_{i-1} = -\sum_{m=1}^{i-1} \delta_m, \quad i = \overline{2, n};$$

$$t_1 = t_T, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_T \frac{\partial t_T}{\partial z}, \quad \text{якщо } z = z_0 = 0, \quad (4)$$

а також виконується умова на безмежності

$$t_T \rightarrow t_0, \quad \text{якщо } z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

У формулах (1)-(5) уведені такі позначення: t , $a = \lambda / \omega$, λ , ω , τ , z — температура, температуропровідність, теплопровідність, теплоємність, час і координата; μ — коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття та середовищем, ε — ступінь чорноти зовнішньої поверхні покриття, σ_0 — постійна Стефана-Больцмана. Індексми i , T та C позначено величини, які стосуються i -ого шару покриття, півпростору (тіла) та середовища відповідно.

Для розв'язування задачі теплопровідності (1)-(5) використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриття на теплоперенос у системі узагальненими граничними умовами [17-23].

У цьому випадку узагальнена нелінійна гранична умова опису променево-конвективної взаємодії півпростору з довкіллям через багат шарове покриття має вигляд [24]

$$\lambda_T \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_T}{\partial z} + \mu (t_C - t_T) - \Omega \frac{\partial t_T}{\partial \tau} + \varepsilon \sigma_0 t_C^4 -$$

$$- \varepsilon \sigma_0 \sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \left(\frac{\lambda_T}{H} \right)^m t_T^{4-m} \left(\frac{\partial t_T}{\partial z} \right)^m = 0, \quad t_T|_{\tau=0} = t_0, \quad \text{якщо } z = 0, \quad (6)$$

де $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ — зведені теплоємність і термоопір покриття, $C_4^m = 4! / [m!(4-m)!]$ — біноміальні коефіцієнти.

Введемо безрозмірні величини: $\theta_T = t_T / t_C$, $\theta_0 = t_0 / t_C$ — безрозмірні температури, $x = z / z_*$ — безрозмірна координата, $Fo = a_T \tau / z_*^2$ — число Фур'є, $Bi = \mu z_* / \lambda_T$ — критерій Біо, $Sk = \varepsilon \sigma_0 t_C^3 z_* / \lambda_T$ — критерій Старка, $\xi = \lambda_T / (Hz_*)$ — відносний ефективний термоопір покриття, $\eta = \Omega / (\omega_T z_*)$ — відносна ефективна теплоємність покриття. Тут z_* — масштабний параметр.

Тоді нелінійна крайова задача теплопровідності (1), (2), (5), (6) для півпростору в безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_T(x, Fo)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_T(x, Fo)}{\partial Fo}, \quad x > 0, Fo > 0, \quad (7)$$

$$\theta_T(x, 0) = \theta_0, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_T(x, Fo) = \theta_0, \quad (9)$$

$$(1 + \xi Bi) \frac{\partial \theta_T}{\partial x} + Bi(1 - \theta_T) - \eta \frac{\partial \theta_T}{\partial Fo} - Sk \left[\sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \xi^m \theta_T^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial x} \right)^m - 1 \right] = 0, \quad \theta_{T|Fo=0} = \theta_0 \text{ для } x = 0. \quad (10)$$

2. Розв'язування задачі теплопровідності з узагальненою нелінійною граничною умовою

2.1. Схема методу квазілінеаризації. Застосуємо ітераційну процедуру на основі методу квазілінеаризації [25] до розв'язання крайової задачі (7)-(10). Крайову задачу для k -ого наближення подамо так:

$$\frac{\partial^2 \theta_T^{(k)}(x, Fo)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_T^{(k)}(x, Fo)}{\partial Fo}, \quad x > 0, Fo > 0, \quad (11)$$

$$\theta_T^{(k)}(x, 0) = \theta_0, \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_T^{(k)}(x, Fo) = \theta_0, \quad (13)$$

$$(1 + \xi Bi) \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial x} + Bi(1 - \theta_T^{(k)}) - \eta \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial Fo} - Sk \left[\sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \xi^m (\theta_T^{(k)})^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial x} \right)^m - 1 \right] = 0 \text{ для } x = 0, \quad \theta_T^{(k)}(0, 0) = \theta_0. \quad (14)$$

Для лінеаризації нелінійного члена в граничній умові (14) використаємо таку формулу [25]

$$f\left(\theta_T^{(k)}, \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial x}\right) = f\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right) + f'_{\theta_T}\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right)\left(\theta_T^{(k)} - \theta_T^{(k-1)}\right) + f'_{\frac{\partial \theta_T}{\partial x}}\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right), \quad (15)$$

де $f\left(\theta_T, \frac{\partial \theta_T}{\partial x}\right) = \sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \xi^m (\theta_T)^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial x}\right)^m$.

Тоді лінеаризована умова (14) матиме такий вигляд

$$\frac{\partial \theta_T^{(k)}(0, F_0)}{\partial x} - E^{(k)}(F_0) \frac{\partial \theta_T^{(k)}(0, F_0)}{\partial F_0} = Bi_*^{(k)}(F_0) \theta_T^{(k)}(0, F_0) + Q^{(k)}(F_0), \quad \theta_T^{(k)}(0, 0) = \theta_0. \quad (16)$$

Тут

$$Bi_*^{(k)}(F_0) = \frac{Bi + Sk \alpha_2^{(k-1)}(F_0)}{1 + \xi Bi - Sk \alpha_1^{(k-1)}(F_0)}, \quad E^{(k)}(F_0) = \frac{\eta}{1 + \xi Bi - Sk \alpha_1^{(k-1)}(F_0)},$$

$$Q^{(k)}(F_0) = -\frac{Bi + (1 + \alpha_3^{(k-1)}(F_0))Sk}{1 + \xi Bi - Sk \alpha_1^{(k-1)}(F_0)}, \quad (17)$$

$$\alpha_1^{(k-1)} = \sum_{m=1}^4 (-1)^m m C_4^m \xi^m (\theta_T^{(k-1)})^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right)^{m-1},$$

$$\alpha_2^{(k-1)} = \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} (5-m) C_4^{m-1} \xi^{m-1} (\theta_T^{(k-1)})^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right)^{m-1},$$

$$\alpha_3^{(k-1)} = 3 \sum_{m=0}^4 (-1)^m C_4^m \xi^m (\theta_T^{(k-1)})^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial x}\right)^m. \quad (18)$$

2.2. Побудова наближеного розв'язку лінеаризованої задачі для k -ого наближення. Для розв'язування задачі використаємо інтегральне перетворення Лапласа [26]

$$\tilde{\theta}_T^{(k)}(x, s) = L\left[\theta_T^{(k)}(x, \tau)\right] = \int_0^\infty \theta_T^{(k)}(x, F_0) \exp(-sF_0) dF_0. \text{ Для отримання аналітичного}$$

розв'язку, аналогічно до підходу [1, 2], вважаємо величини $Bi_*^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $E^{(k)}$ на кожній ітерації сталими. Тоді розв'язок рівняння (11) у півпросторі в трансформантах з урахуванням умов (12), (13), (16) матиме вигляд

$$\tilde{\theta}_T^{(k)}(x, s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{g^{(k)} \exp(-qx)}{s \left[\psi^{(k)} q^2 + (\text{Bi}_*^{(k)})^{-1} q + 1 \right]}, \quad (19)$$

де $q = \sqrt{s}$, $\psi^{(k)} = E^{(k)} / \text{Bi}_*^{(k)}$, $g^{(k)} = \theta_0 + Q^{(k)} / \text{Bi}_*^{(k)}$.

Під час отримання оригіналу для зображення (19) можливі такі варіанти подання залежно від значень коренів рівняння

$$\psi^{(k)} q^2 + (\text{Bi}_*^{(k)})^{-1} q + 1 = 0. \quad (20)$$

1) Для $\eta \neq 0$ при $(\text{Bi}_*^{(k)})^{-2} - 4\psi^{(k)} \neq 0$ рівняння (20) має два різних корені

$$q_{1,2}^{(k)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\psi^{(k)} (\text{Bi}_*^{(k)})^2}}{2\psi^{(k)} \text{Bi}_*^{(k)}}. \quad \text{Відповідно, трансформанту (19) можна подати так}$$

$$\tilde{\theta}_T^{(k)}(x, s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{g^{(k)} \exp(-x\sqrt{s})}{\psi^{(k)} (q_1^{(k)} - q_2^{(k)}) s} \left(\frac{1}{\sqrt{s} - q_1^{(k)}} - \frac{1}{\sqrt{s} - q_2^{(k)}} \right). \quad (21)$$

Використовуючи формулу обернення перетворення Лапласа [26]

$$L^{-1} \left[\frac{\exp(-l\sqrt{s})}{s(\sqrt{s} + b)} \right] = \frac{1}{b} \left[\text{erfc} \left(\frac{l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \exp(bk + b^2\tau) \text{erfc} \left(\frac{l}{2\sqrt{\tau}} + b\sqrt{\tau} \right) \right], \quad (22)$$

остаточно отримаємо вираз для визначення k -ого наближення температури:

$$\theta_T^{(k)}(x, \text{Fo}) = \theta_0 - g^{(k)} \left\{ \text{erfc} \varphi + \frac{1}{2\Delta^{(k)}} \left[(1 + \Delta^{(k)}) F_1^{(k)}(x, \text{Fo}) - (1 - \Delta^{(k)}) F_2^{(k)}(x, \text{Fo}) \right] \right\}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (23)$$

Тут $\varphi = \frac{x}{2\sqrt{\text{Fo}}}$, $\Delta^{(k)} = \sqrt{1 - 4E^{(k)} \text{Bi}_*^{(k)}}$,

$$F_m^{(k)}(x, \text{Fo}) = \exp \left(-q_m^{(k)} x + (q_m^{(k)})^2 \text{Fo} \right) \text{erfc} \left(\varphi - q_m^{(k)} \sqrt{\text{Fo}} \right). \quad (24)$$

2) Для $\eta \neq 0$ при $(\text{Bi}_*^{(k)})^{-2} - 4\psi^{(k)} = 0$ рівняння (20) має один дійсний двократний корінь $q_3^{(k)} = -0,5/E^{(k)}$. Тоді трансформанта (19) матиме вигляд

$$\tilde{\theta}_T^{(k)}(x, s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{g^{(k)} \exp(-x\sqrt{s})}{s \psi^{(k)} (\sqrt{s} - q_3^{(k)})^2}. \quad (25)$$

Використовуючи формулу обернення перетворення Лапласа [26]

$$L^{-1} \left[\frac{\exp(-l\sqrt{s})}{s(\sqrt{s}+b)^2} \right] = \frac{1}{b^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{2}{b} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp \left(-\frac{l^2}{4\tau} \right) + \left(2\tau + \frac{l}{b} - \frac{1}{b^2} \right) \exp(bl + b^2\tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{2\sqrt{\tau}} + b\sqrt{\tau} \right),$$

отримаємо оригінал на k -ій ітерації знаходження температури

$$\theta_T^{(k)}(x, Fo) = \theta_0 - g^{(k)} \left\{ \operatorname{erfc}\varphi + 2q_3^{(k)} \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp(-\varphi^2) + \left[2(q_3^{(k)})^2 Fo - q_3^{(k)}x - 1 \right] F_3^{(k)}(x, Fo) \right\}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (26)$$

3) Для $\eta = 0$ рівняння (20) має один дійсний корінь $q_4^{(k)} = -\operatorname{Bi}_*^{(k)}$ і трансформанту (19) можна подати таким чином

$$\tilde{\theta}_T^{(k)}(x, s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{\operatorname{Bi}_*^{(k)}\theta_0 + Q^{(k)}}{s(\sqrt{s} + \operatorname{Bi}_*^{(k)})} \exp(-x\sqrt{s}). \quad (27)$$

Використовуючи формулу знаходження оригіналу (22), запишемо вираз для k -ого наближення температури:

$$\theta_T^{(k)}(x, Fo) = \theta_0 - g^{(k)} \left[\operatorname{erfc}\varphi - F_4^{(k)}(x, Fo) \right], \quad 0 \leq x < \infty. \quad (28)$$

2.3. Ітераційна схема для визначення температури у півпросторі. Розрахунковий алгоритм подамо таким чином:

$$\theta_T^{(0)} = \theta_0, \quad \theta_T^{(k)}(x, Fo) = \Pi \left(\theta_T^{(k-1)}, \partial \theta_T^{(k-1)} / \partial x \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (29)$$

де вигляд оператора Π залежно від характеру коренів рівняння (20) задається формулами (23), (26) або (28).

3. Співвідношення для визначення температури покриття

Для розрахунку температури в багатошаровому покритті через граничні значення температури та її похідної у півпросторі використаємо формули відновлення [18, 20, 21]

$$\theta_i(x, Fo) = \theta_T(0, Fo) + r_i(x) \frac{\partial \theta_T}{\partial x}(0, Fo), \quad x_i \leq x \leq x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (30)$$

де $r_i(x) = \lambda_T \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j / (z_* \lambda_j) + (x - x_{i-1}) / \lambda_i \right)$, $\theta_i = t_i / t_C$, $x_i = z_i / z_*$.

Підставляючи наближення (23), (26) і (28) на останній ітерації, якщо $k = K$ у формули відновлення (30), отримаємо вирази для температури в i -ому шарі покриття.

1) Для $\eta \neq 0$ при $(Bi_*^{(K)})^{-2} - 4\psi^{(K)} \neq 0$:

$$\theta_i(x, Fo) = \theta_0 + g^{(K)} \left[1 - \frac{1}{2\Delta^{(K)}} \sum_{m=1}^2 ((-1)^{m+1} + \Delta^{(K)}) \times \right. \\ \left. \times (1 + r_i(x)q_m^{(K)}) F_m^{(K)}(0, Fo) \right]. \quad (31)$$

2) Для $\eta \neq 0$ при $(Bi_*^{(K)})^{-2} - 4\psi^{(K)} = 0$:

$$\theta_i(x, Fo) = \theta_0 - g^{(K)} \left\{ 1 + 2(1 + q_3^{(K)}r_j(x))q_3^{(K)}\sqrt{Fo/\pi} - \right. \\ \left. - [1 - 2q_3^{(K)}(1 + q_3^{(K)}r_j(x))Fo] F_3^{(K)}(0, Fo) \right\}. \quad (32)$$

3) Для $\eta = 0$:

$$\theta_i(x, Fo) = \theta_0 - g^{(K)} \left[1 - (1 + Bi_*^{(K)}r_i(x)) F_4^{(K)}(0, Fo) \right]. \quad (33)$$

Тут K — число ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності розрахунків.

4. Числові результати та їх аналіз

З метою дослідження впливу характеристик багат шарового покриття та зміни інтенсивності конвективного і променево-конвективного нагрівання на перебіг теплових процесів у півпросторі проведено параметричний аналіз зміни з часом контактної температури між покриттям та основою, а також розподілу температури за просторовою координатою. Вихідними безрозмірними параметрами є: координата x , ефективні термоопір і теплоємність покриття ξ та η відповідно, час Fo (число Фур'є), критерії Біо Bi та Старка Sk , початкова температура θ_0 (приймемо $\theta_0 = 0,2$).

На рис. 2а показано зміну з часом температури поверхні півпростору $\theta_T(0, Fo)$ без покриття ($\xi = 0, \eta = 0$) і в зоні контакту покриття з основою за лише конвективного ($Bi = 1, Sk = 0$) та променево-конвективного нагрівання ($Bi = 1, Sk = 0,5$). Як видно з графіка, променево-конвективне нагрівання спричиняє суттєве зростання температури на зазначених поверхнях порівняно з температурою за лише конвективного нагрівання. Наявність покриття на поверхні півпростору викликає зниження контактної температури за обох режимів нагрівання (конвективного та променево-конвективного). Зі збільшенням ефективних теплоємності та термічного опору покриття зростає його теплоізолююча функція.

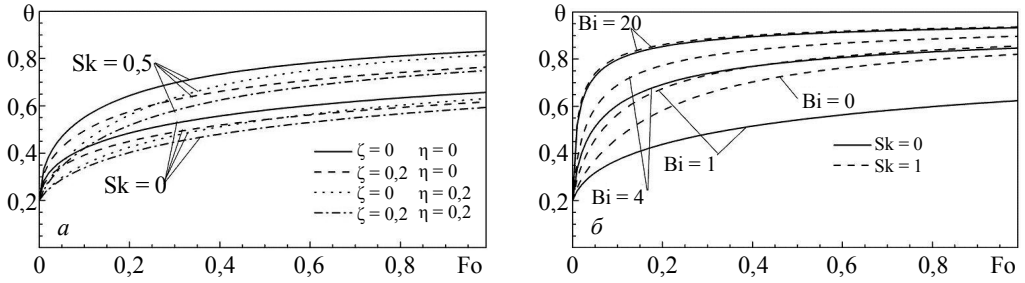


Рис. 1. Зміна з часом контактної температури $\theta = \theta_T(0, Fo)$ на поверхні півпростір–покриття залежно від: а) ефективних характеристик покриття; б) інтенсивності нагрівання

На рис. 2б подано зміну з часом температури в зоні контакту покриття з основою у разі зростання інтенсивності конвективного ($Sk = 0, Bi = 1; 4; 20$) і променево-конвективного ($Sk = 1, Bi = 0; 1; 4; 20$) нагрівання системи. Зі збільшенням критеріїв Bi_0 та Старка відбувається зростання контактної температури. За значень $Sk = 0, Bi = 20$ та $Sk = 1, Bi = 20$ температури в зоні контакту покриття з основою з ростом Fo стають майже однаковими.

Для такого випадку залежно від реальних умов з метою досягнення потрібного рівня контактної температури можна застосувати конвективне нагрівання системи замість складного променево-конвективного.

На рис. 3 показано зміну температури у системі півпростір–тришарове покриття вздовж координати x для деяких моментів часу залежно від зростання інтенсивності конвективного (рис. 3а) та променево-конвективного (рис. 3б) нагрівання за таких співвідношень геометричних і теплофізичних параметрів шарів покриття: $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1$; $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2$; $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1$ для $\lambda_T / \lambda_1 = 10$; $\omega_T / \omega_1 = 1$; $\delta / z_* = 0,01$. Як видно з графіків, зі збільшенням інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання перепад

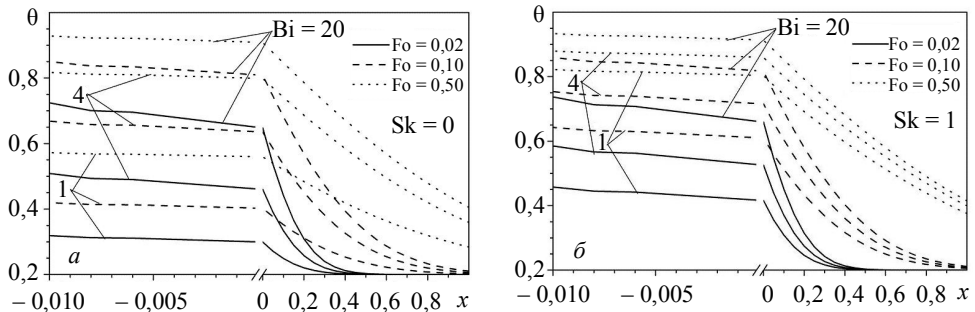


Рис. 3. Розподіл температури в системі основа–багатошарове покриття для деяких моментів часу а) конвективне нагрівання; б) променево-конвективне нагрівання

температури за товщиною покриття і глибиною півпростору зростає, причому для великого значення $Bi = 20$ внесок радіаційного складника для $Sk = 1$ зі збільшенням часу Fo нагрівання системи суттєво зменшується.

Слід зауважити, що результати, наведені на рис. 2а, 2б, 3а для випадку конвективного нагрівання, співпадають з відповідними результатами у роботі [20] за врахування співвідношення $\theta_j = \tilde{\theta}_j + \theta_0(1 - \tilde{\theta}_j)$ ($j = T, 1, 2, 3, \dots, n$), де $\theta_j = t_j/t_C$, $\tilde{\theta}_j = (t_j - t_0)/(t_C - t_0)$ — безрозмірні температури, що використовуються у цій статті та роботі [20] відповідно.

Висновки. Із застосуванням узагальнених нелінійних граничних умов, методу квазілінеаризації та інтегрального перетворення Лапласа побудовано ітераційну схему розв'язання нелінійної нестационарної крайової задачі теплопровідності для півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання доквіллям. Проведено параметричний аналіз впливу геометричних і теплофізичних характеристик покриття, зміни інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання на поведінку з часом температури в зоні контакту покриття й основи. Для півпростору з тришаровим покриттям досліджено особливості розподілу температури в системі для деяких моментів часу у разі зростання інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання.

Представлена аналітично-числова методика має прикладне значення для дослідження та керування теплообмінними процесами у тілах із багат шаровими покриттями, прогнозування та вибору раціональних режимів експлуатації таких систем у реальних умовах.

Література

- [1] *Видин Ю. В.* Неустановившееся температурное поле в плите при совместном действии теплового излучения и конвекции // Инж.-физ. журн. — 1967. — Т. 12, № 5. — С. 669-671.
- [2] *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — Москва: Наука, 1975. — 228 с.
- [3] Моделирование та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. *Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра*: В 5 т. — Т. 3: *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. — Львів: СПОЛЮМ, 2009. — 410 с.
- [4] *Попович В. С., Вовк О. М.* Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з доквіллям // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 17. — С. 146-155.
- [5] *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. — Киев: Наук. думка, 1968. — 165 с.
- [6] *Crosbie A. L., Viskanta R.* Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1968. — Vol. 11, No 2. — P. 305-317.
- [7] *Villasenor R.* A comparative study between an integral equation approach and a finite difference formulation for heat diffusion with nonlinear boundary conditions // Appl. Math. Modelling. — 1994. — Vol. 18, No 6. — P. 321-327.
- [8] *Dicker D., Asnani M.* A perturbation solution for the nonlinear radiation heat transfer problem // Proc. 3rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago. — 1966. — Vol. 5. — P. 164-173.

- [9] *Campano A.* Fin effectiveness under combined cooling via the quasilinearization method // Nuclear Engineering and Design. — 1975. — Vol. 33, No 3. — P. 353-356.
- [10] *Campano A.* A quasilinearization approach for the transient response of bodies with surface radiation // Lett. Heat Mass Transfer. — 1977. — Vol. 4, No 4. — P. 291-298.
- [11] *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2002. — Т. 38, № 6. — С. 31-38.
- [12] *Процюк Б, Горун О.* Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. *О. І. Лукомського, Г. С. Кіма, Р. М. Кушніра.* — Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. — С. 148-150.
- [13] *Березовский А. А.* Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием // Задачи нестационарной теплопроводности. — Киев, 1983. — С. 6-11. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.29).
- [14] *Турій О.* Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двох шарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 118-132.
- [15] *Терлецький Р. Ф., Турій О. П.* Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2012. — Т. 55, № 2. — С. 186-201.
- [16] *Шевчук В. А., Гавриць О. П.* Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2014. — Т. 57, № 2. — С. 81-88.
- [17] *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1967. — Вып. 7. — С. 227-233.
- [18] *Shevchuk V. A.* Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Computer Sci. — 2002. — Vol. 2330. — P. 500-509.
- [19] *Лучко Й. Й., Гембара В. М., Гембара Н. О.* Моделювання теплопровідності тонких плит з багат шаровим покриттям // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. — 2004. — Вип. 6. — С. 65-70.
- [20] *Шевчук В. А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. — 2013. — Т. 86, № 2. — С. 423-431.
- [21] *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: *R. B. Hetnarski* (Ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. — Springer. — 2014. — Vol. 4. — P. 1942-1953.
- [22] *Гавриць А. П., Шевчук П. Р.* Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1991. — Вып. 33. — С. 69-73.
- [23] *Шевчук П. Р., Гавриць О. П.* Розрахунок залишкових деформацій у покриттях, нанесених способом високотемпературного напилення на плоскі поверхні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 1. — С. 105-113.
- [24] *Шевчук В., Гавриць О., Шевчук П.* Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багат шаровими покриттями // Машинознавство. — 2010. — № 5. — С. 21-25.
- [25] *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — Москва: Мир, 1968. — 223 с.
- [26] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — Москва: Высш. шк., 1967. — 600 с.

The investigation of the temperature field of a half-space with a multilayer coating at radiative and convective heat exchange

Victor Shevchuk, Olexandr Gavrys'

On the basis of the mathematical model of heat processes in bodies with thin layered coatings, the boundary value problem of heat conduction with a generalized nonlinear boundary condition of the radiative and convective heat exchange of a half-space with the environment via a multilayer coating has been formulated. The iterative scheme for the solution of this nonlinear boundary value problem has been constructed by the quasilinearization method. Using the Laplace integral transformation, the approximate solution of the linearized problem for the each iteration has been obtained. Based on the developed iterative procedure, the influence of geometrical and thermal parameters of the coating and the conditions of heat exchange with the environment on the thermal processes in a half-space with a multilayer coating has been investigated

Исследование температурного поля полупространства с многослойным покрытием при лучисто-конвективном теплообмене

Виктор Шевчук, Александр Гаврись

На основе математической модели тепловых процессов в телах с тонкими слоистыми покрытиями сформулирована краевая задача теплопроводности с обобщенным нелинейным граничным условием лучисто-конвективного теплообмена полупространства с окружающей средой через многослойное покрытие. Методом квазилинеаризации построена итерационная схема решения этой нелинейной краевой задачи. С помощью интегрального преобразования Лапласа получено приближенное решение линеаризованной задачи для каждой итерации. На основе разработанной итерационной процедуры проведено исследование влияния геометрических и теплофизических характеристик покрытия и условий теплообмена с окружающей средой на тепловые процессы в полупространстве с многослойным покрытием.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 17.11.14