

Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у викривлених важкопроникних пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

Андрій Бомба¹, Алесь Сінчук²

¹ д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Ст. Бандери 12, Рівне, e-mail: abomba@ukr.net

² Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Ст. Бандери 12, Рівне, e-mail: sinchukk@mail.ru

Розроблено підхід до розв'язання задач однофазної фільтрації у викривлених важкопроникних нафтових пластах за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву з використанням ідей методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу. Побудовано алгоритм, що реалізує відповідний метод, і на цій основі проведено аналіз зміни в часі фільтраційних характеристик процесу: витрати (значення об'єму відбору нафти за час витіснення та її залишок у пласті), квазіпотенціалу швидкості тощо. Встановлено особливості протікання процесу витіснення під час керування ним шляхом зміни параметрів тріщин гідравлічного розриву пласта.

Ключові слова: викривлений пласт, квазіконформні відображення, нелінійні задачі, тріщини гідророзриву.

Вступ. У зв'язку із необхідністю введення в розробку складних за своєю структурною будовою осадових порід, більшість з яких становлять важковидобувні, обводнені та низькопроникні пласти, що характеризуються як неоднорідністю, анізотропією (тріщинуватістю), так і схильністю до деформацій, виникає потреба відшукування ефективних методів інтенсифікації їх розробки [1-4]. Один із яких є гідравлічний розрив пласта (ГРП), застосування якого призводить до утворення тріщин, що зумовлюють досягнення направленої дії на окремі ділянки пласта. Таким чином, внаслідок дії ГРП встановлюється зв'язок з іншими ділянками підвищеної проникності, разом із тим, змінюється напрямок і швидкість фільтраційних потоків, що дозволяє ефективно впливати на роботу оточуючих свердловин і, відповідно, на видобуток запасів у цілому [5-7].

У роботі розвинуто числові методи комплексного аналізу [3-4] стосовно розв'язання задач однофазної двовимірної фільтрації у важкопроникних середовищах на випадок викривлених схильних до деформації нафтових пластів, за умов інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини шляхом збурення течії тріщинами ГРП, на основі чого створено відповідний алгоритм числового розв'язування. Проведено комп'ютерний експеримент щодо перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик процесу: зміни положення границі розділу

рідин, загальної фільтраційної витрати, значень частки витісненого флюїду (нафти) від часу в експлуатаційній свердловині, координат точок типу «призупинки» та значень квазіпотенціалу у них, моментів часу прориву витіснювальної рідини до експлуатаційної свердловини та повного її обводнення; встановлено особливості протікання процесу витіснення під час керування ним шляхом зміни розміщення та параметрів тріщин гідророзриву.

1. Формулювання задачі та метод комплексного аналізу

Розглянемо процес однофазної ізотермічної фільтрації у викривленому пласті G_τ ($\tau = (x, y, z)$) обмеженої потужності, за умов збурення течії тріщинами ГРП скінченної проникності (рис. 1а). За умови можливості апроксимації тривимірної фільтраційної течії рухом стаціонарними поверхнями струму, як у роботах [2, 4], задамо неперервно-диференційовані функції: $x = X(\xi, \eta, \zeta)$, $y = Y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = Z(\xi, \eta, \zeta)$, що пов'язують криволінійну (ортогональну) систему координат (ξ, η, ζ) з ортогональною (декартовою), таким чином, щоб рівняння непроникних підшови L_1 і кривлі L_2 пласта можна було записати у вигляді: $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\zeta = \zeta_2 = const$ відповідно. Тоді рівняння решти поверхонь, які обмежують фільтраційну область, подамо таким чином: $A^*A_*B_*B^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f_*(\xi, \eta) = 0\}$ — контур нагнітальної свердловини, $D^*D_*C_*C^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f^*(\xi, \eta) = 0\}$ — контур експлуатаційної свердловини, $\underline{A}^*\underline{A}_*\underline{B}_*\underline{B}^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f(\xi, \eta) = 0\}$ — зовнішня непроникна стінка.

Вважатимемо, що рух флюїду здійснюється по двовимірній поверхні $G_Z = \xi + i\eta$ для $\zeta = const$. На основі міркувань, закладених у праці [6], спеціальним

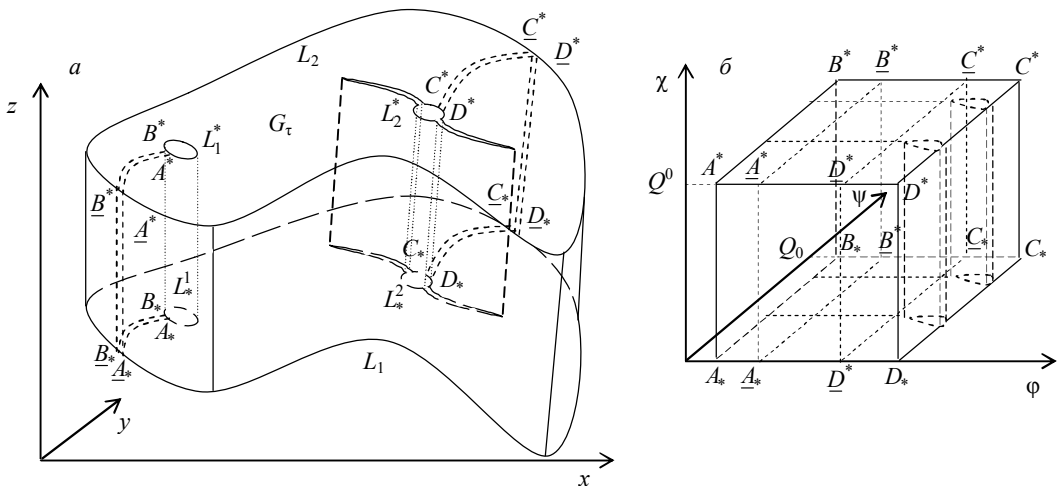


Рис. 1. Викривлений пласт (а) та відповідна область комплексного потенціалу (б)

чином модифікований закон Дарсі (стосовно критичного значення градієнта тиску) та рівняння нерозривності течії матимуть вигляд:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \chi(I, I_{kr}) \text{grad } p, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

за відповідних умов на контурах свердловин: $p|_{L^*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$ ($p_* > p^*$) та

зовнішньому непроникному контури $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_L = 0$. Тут $I = I(\xi, \eta) = |\text{grad } p(\xi, \eta)| = \sqrt{p_\xi^2 + p_\eta^2}$ — величина градієнта тиску p ; $\rho = \rho(p)$ — густина нафти; $k = k(\xi, \eta) = \begin{cases} k_l, & (\xi, \eta) \in G_Z^l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \\ k_0, & (\xi, \eta) \in G_Z \setminus \bigcup_l G_Z^l \end{cases}$ — коефіцієнт абсолютної проникності

середовища, де G_Z^l — ділянки l -тої тріщини, що характеризуються певними

параметрами, зокрема: $G_Z^l = \left\{ (\xi, \eta) : \left[\frac{1}{a_l} ((\xi - \xi_0) \cos \alpha_l + (\eta - \eta_0) \sin \alpha_l) \right]^2 + \left[\frac{1}{b_l} (-(\xi - \xi_0) \sin \alpha_l + (\eta - \eta_0) \cos \alpha_l) \right]^2 \leq 1 \right\}$ (a_l, b_l — півосі відповідних еліпсів,

α_l — кути їх нахилів); $\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}) & \text{для } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{для } I \leq I_{kr} \end{cases}$ — коефіцієнт, що

характеризує залежність проникності осадової породи від величини градієнта тиску, де F — задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} — критичне значення початкового градієнта.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [1]: $\varphi(p) = \varphi_* + \frac{k}{\mu} \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$ та перепишемо стосовно нього рівняння (1) з відповідними крайовими умовами:

$$\vec{v} = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \text{grad } \varphi, \quad \text{div} (\chi(\tilde{I}, I_{kr}) \text{grad } \varphi) = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^* \quad (\varphi_* < \varphi^*), \quad (3)$$

$$[\varphi]_{\partial G_Z^l} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_Z^l} = 0. \quad (4)$$

Тут $\tilde{\rho}(\varphi) = \rho(p(\varphi))$, $\tilde{I} = \frac{1}{k\tilde{\rho}(\varphi)} \sqrt{\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2}$, $[\bullet]_{\partial G_Z^l}$ — стрибок відповідної функції на контурі ∂G_Z^l . При цьому використовуємо формули обезрозмірювання: $\tilde{\xi} = \xi/L$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{L}$, $\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{L}$ ($L = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \sqrt{(\xi^*(\theta + \pi) - \xi^*(\theta))^2 + (\eta^*(\theta + \pi) - \eta^*(\theta))^2}$ — характерний розмір пласта), $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ ($T \approx t_{\max}$), $\vec{v}_i = \frac{\vec{v}_i \cdot T}{L}$, $\tilde{p} = \frac{(p^* - p_*)kT}{\mu L^2}$.

Границя розділу R_l двох різнокольорових рідин визначається таким рівнянням з відповідними умовами [8, 9]:

$$\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \zeta = 0, \quad \zeta_{L_z} = 1, \quad \zeta(\xi, \eta, t_0) = 0, \quad (5)$$

де σ — коефіцієнти пористості ґрунту.

Згідно з роботами [2-4] задачу (2)-(5), в криволінійній системі координат (ξ, η, ζ) , запишемо у вигляді:

$$\vec{v} = (v_{\xi}, v_{\eta}) = \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \quad (6)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial (H_2 H_3 \chi(\tilde{I}, I_{kr}) \varphi_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 H_3 \chi(\tilde{I}, I_{kr}) \varphi_{\eta})}{\partial \eta} \right] d\zeta = 0, \quad (7)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (H_2 H_3 v_{\xi} \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 H_3 v_{\eta} \zeta)}{\partial \eta} \right] d\zeta = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{f(\xi, \eta) = 0} = 0, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta) = 0} = \varphi^*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta) = 0} = \varphi^*, \quad [\varphi]_{\partial G_Z^l} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_Z^l} = 0, \\ \zeta|_{f^*(\xi, \eta) = 0} = \zeta^*, \quad \zeta|_{t=0} = \tilde{\zeta}(\xi, \eta, \zeta). \quad (9)$$

Тут $H_1 = \sqrt{X_{\xi}^2 + Y_{\xi}^2 + Z_{\xi}^2}$, $H_2 = \sqrt{X_{\eta}^2 + Y_{\eta}^2 + Z_{\eta}^2}$, $H_3 = \sqrt{X_{\zeta}^2 + Y_{\zeta}^2 + Z_{\zeta}^2}$ — параметри Ламе.

Як у праці [3], підставляючи співвідношення (6) у вирази (7), (8) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка за відповідних крайових і початкових умов описує розглядуваний процес:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad U_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_5 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{де } U_1(\xi, \eta) &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_2 H_3 d\zeta, \quad U_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_1 H_3 d\zeta, \quad U_3(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma H_1 H_2 H_3 d\zeta, \\ U_4(\xi, \eta) &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\varsigma \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_2 H_3}{\tilde{\rho}(\varphi) H_1} d\zeta, \quad U_5(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\varsigma \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_1 H_3}{\tilde{\rho}(\varphi) H_2} d\zeta \quad \text{— характеристичні коефіцієнти, що відповідають за збереження інформації про геометрію та фільтраційні властивості пласта.} \end{aligned}$$

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (11)$$

та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_Z уздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (\xi_0^*, \eta_0^*) \in L$ (точка «роздвоєння» ліній течії), $\underline{C} = \underline{D} = (\xi_*^0, \eta_*^0) \in L$ (точка «здвоєння» ліній течії) та відповідними точками $A = B = (\xi_*, \eta_*) \in L_*$, $C = D = (\xi^*, \eta^*) \in L^*$, система (11) визначатиме деяку функцію $\omega = \omega(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$, яка за виконання умов:

$$\begin{aligned} \varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q_0, \\ \nu(\xi_0^*, \eta_0^*) &= 0, \quad \nu(\xi_*^0, \eta_*^0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

здійснює квазіконформне відображення фізичної області $G_Z^0 = G_Z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0\}$, де Q_0 — невідома фільтраційна витрата.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (11), (12) на квазіконформне відображення $\zeta = \zeta(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_Z отримаємо у вигляді:

$$U_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (13)$$

$$f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0,$$

$$f(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0, \quad f(\xi(\varphi, Q_0), \eta(\varphi, Q_0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (14)$$

$$\xi(\varphi, 0) = \xi(\varphi, Q_0), \quad \eta(\varphi, 0) = \eta(\varphi, Q_0), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (15)$$

$$[\xi(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^l} = [\eta(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^l} = 0,$$

$$\left[\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)J} \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G'_0} = 0, \quad (16)$$

$$v(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi)) = 0, \quad v(\xi(\bar{\varphi}, \psi), \eta(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_1} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (18)$$

Використавши відповідні формули переходу: $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}$,
 $\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}$,
 $J = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$, умови (13) і формули для обчислення компонент сумарної

швидкості $v_\xi = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{J(\varphi, \psi)\tilde{\rho}(\varphi)H_1} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}$, $v_\eta = -\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{J(\varphi, \psi)\tilde{\rho}(\varphi)H_2} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}$, задачу для відшу-
 кання поля насиченості запишемо так:

$$U_3 J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) - U_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + U_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \right] = 0, \quad (19)$$

$$\zeta(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi), 0) = \zeta(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi)),$$

$$\zeta(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi), \zeta(\varphi_*, \psi), t) = \zeta_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \quad (20)$$

Так як $\partial \zeta / \partial \zeta = 0$, то рівняння (20) спрощується [4-7]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}. \quad (21)$$

Інтегруючи відповідне (21) характеристичне диференціальне рівняння [3]
 $\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}$, знайдемо час t проходження частинкою шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$
 до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ уздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$:

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\bar{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\bar{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\bar{\varphi}, \quad (22)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$.

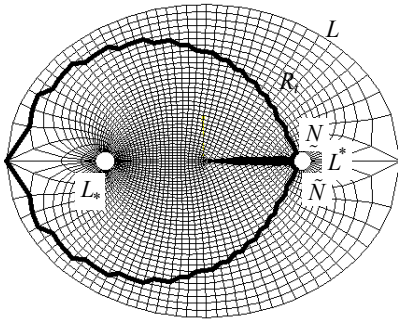


Рис. 2. Розміщення границі розділу рідин R_T в елементі симетрії пласта G_z

Використовуючи співвідношення (22), знаходимо положення лінії розділу $\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин у довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної свердловини, відповідно $t_{\min} = \Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$,

$$t_{\max} = \Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi).$$

Для обчислення наближеного об'єму добутої нафти в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, у результаті розв'язання рівняння $\Phi(\varphi^*, \psi) = \bar{t}$ ($0 \leq \psi < Q$, $t_{\min} < \bar{t} < t_{\max}$), знаходимо відповідні точкам \underline{N} , \tilde{N} перетину даної лінії розділу течії з контуром експлуатаційної свердловини (рис. 2), що ділять його на ділянки витіснення нафти та води, відповідно, значення $\psi = \underline{\psi}(\bar{t})$, $\psi = \tilde{\psi}(\bar{t})$. Тоді дебіт відбору нафти у даний момент часу становитиме:

$$Q_n(\bar{t}) = (\tilde{\psi}(\bar{t}) - \underline{\psi}(\bar{t})) \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy = (\tilde{\psi}(\bar{t}) - \underline{\psi}(\bar{t})) Q.$$

Звідси шуканий об'єм добутої нафти з пласта від початку витіснення до моменту часу $t = \bar{t}$ визначається за формулою: $V_{вн}(\bar{t}) = \int_{t_0}^{\bar{t}} Q_n(\tilde{t}) d\tilde{t}$, тоді як об'єм нафти, що міститься у ньому до початку витіснення, визначається: $V_n = V\sigma$, де V — об'єм досліджуваного пласта. Таким чином, залишок нафти у відповідний момент часу наближено обчислимо за формулою: $V_{зл}(\bar{t}) = V_n - V_{вн}(\bar{t})$.

2. Алгоритм числового розв'язування

Для запису різницевого аналога задачі (13)-(21) здійснимо побудову сітки в області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються таким чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, & \text{де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \text{ якщо } l = 1, i = \overline{0, n_1}, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, & \text{де } \Delta\varphi_l = \frac{\overline{\varphi} - \underline{\varphi}}{n_2 - 1}, \text{ якщо } l = 2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ \overline{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, & \text{де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \overline{\varphi}}{n_3 + 1}, \text{ якщо } l = 3, i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, \end{cases}$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = Q_0/m, \quad j = \overline{0, m}. \quad (22)$$

Тут $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ — параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ — кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки та може бути як неперервною, так кусково-неперервною, наприклад, у разі переходу через межу двох середовищ з різними його значеннями, рівняння (18) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_*, Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [7]. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})H_2} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})H_2} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} = 0, \\ & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j})}{\tilde{\rho}((\varphi_{i,j+1/2}))H_1} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})}{\tilde{\rho}((\varphi_{i,j-1/2}))H_1} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i-1/2,j})(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i-1/2,j}, I_{kr})} = 0; \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & f^*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, \quad f^*(\xi_{n,j}, \eta_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ & f(\xi_{i,0}, \eta_{i,0}) = 0, \quad f(\xi_{i,m}, \eta_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2} \\ & \xi_{i,0} = \xi_{i,m}, \quad \eta_{i,0} = \eta_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1} \cup \overline{n_1 + n_2, n}; \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (4\xi_{1,j} - 3\xi_{0,j} - \xi_{2,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) + (4\eta_{1,j} - 3\eta_{0,j} - \eta_{2,j})(\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) = 0, \\ & (3\xi_{n,j} + \xi_{n-2,j} - 4\xi_{n-1,j})(\xi_{n,j+1} - \xi_{n,j-1}) + (3\eta_{n,j} + \eta_{n-2,j} - 4\eta_{n-1,j}) \times \\ & \times (\eta_{n,j+1} - \eta_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \right. \quad (25)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\varphi_{i,j\pm 1/2} = \frac{\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j}}{2}$, $\varphi_{i\pm 1/2,j} = \frac{\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j}}{2}$,
 $\tilde{I}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\tilde{I}_{i,j\pm 1} + \tilde{I}_{i,j}}{2}$, $\tilde{I}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\tilde{I}_{i\pm 1,j} + \tilde{I}_{i,j}}{2}$, $\tilde{I}_{i,j} = \frac{\mu\beta_{i,j}}{kJ_{i,j}\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})\Delta\psi}$.

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу φ та $\bar{\varphi}$ у точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулами:

$$Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$\text{Тут} \quad \Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}. \text{ Величини квазіконформних інваріантів } \gamma_l \text{ одержуємо}$$

на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей таким чином:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, & \gamma_2 &= \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{де} \quad \gamma_{i,j} = \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2, j+1/2})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2, j+1/2}, I_{kr})} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{(\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j})}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (13)-(21) різницевою схемою у загальному випадку, як і у роботах [3-6], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних і внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [9]. На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L, L_*, L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1, n_2, n_3 та m) і параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (24), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи співвідношення (26), знаходимо початкове наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_l^{(0)}$ і

$$\text{невідомих величин} \quad Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \varphi^{(0)} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}},$$

$$\bar{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}}, \quad \text{де} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}.$$

Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання співвідношення (23) стосовно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$

(з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу й економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних і приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (25). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (26), знаходимо нове наближення величин Q , φ , $\bar{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ϵ_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ϵ_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 — нев'язки апроксимацій рівнянь (11):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \left(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j} \right) - \gamma_l \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \left(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j} \right) - \gamma_l \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задачу розв'язано з необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

3. Числові розрахунки

Проведемо числові розрахунки у симетричному пласті, обмеженому зовнішнім непроникним контуром $L = \{ \xi + i\eta : \xi_0(t) = 2(\cos(\theta) + 0,1\cos(3\theta)), \eta_0(t) = 2(\sin(\theta) - 0,1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi \}$, контурами нагнітальної $L_* = \{ \xi + i\eta : \xi_*(\theta) = 0,1\cos(\theta) + \tilde{\xi}_*, \eta_*(\theta) = 0,1\sin(\theta) + \tilde{\eta}_*, 0 \leq \theta < 2\pi \}$ та видобувної (експлуатаційної) $L^* = \{ \xi + i\eta : \xi^*(\theta) = 0,1\cos + \tilde{\xi}^*, \eta^*(\theta) = 0,1\sin(\theta) + \tilde{\eta}^*, 0 \leq \theta < 2\pi \}$ свердловин з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву за умов: $p_* = 112 \cdot 10^5$ Па, $p^* = 198 \cdot 10^5$ Па, $k_0 = 5 \cdot 10^{-12}$ м², $k_l = 16 \cdot 10^{-12}$ м², $\sigma = 0,5$, $\rho = 0,9$ кг/м³, $I_{kr} = 0,6$, $F = 1$, $\epsilon = 10^{-5}$, $m = 70$, $n_1 \times n_2 \times n_3 = 8 \times 40 \times 8$.

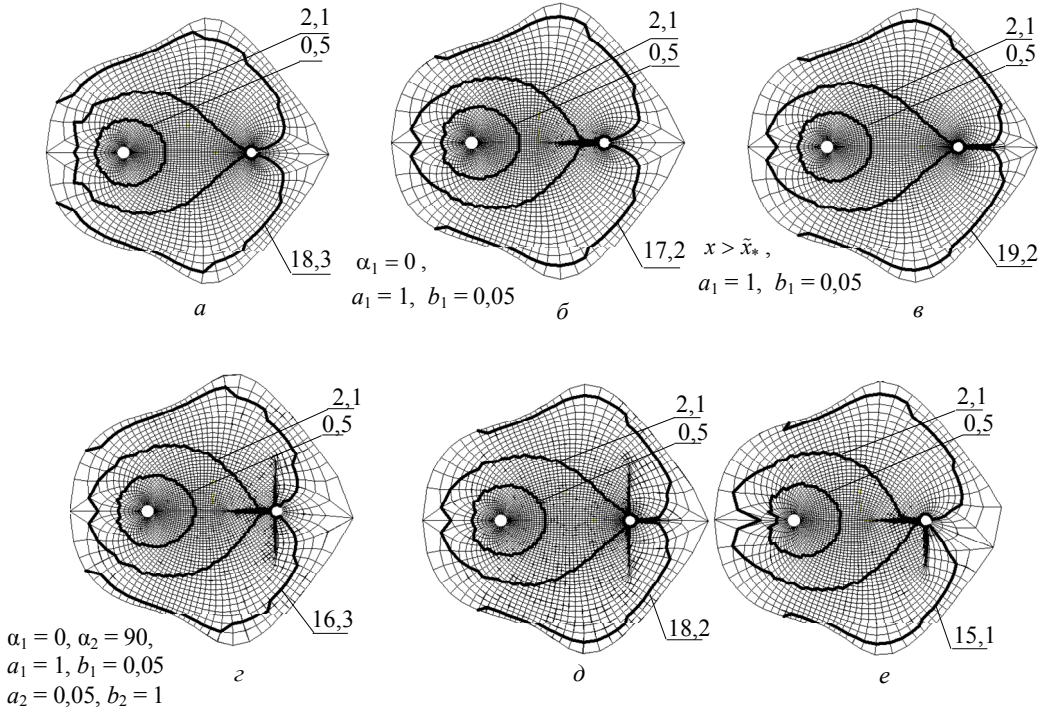


Рис. 3. Положення границі розділу рідин у різні моменти часу

Використовуючи вищезазначені формули обезрозмірювання, матимемо: $\varphi_* = \varphi(p_*) = 1$, $\varphi^* = \varphi(p^*) = 1,4$, $k_0 = 0,01$, $k_l = 0,032$, $\rho = 0,9$, при цьому об'єм нафти, що міститься у пласті до початку витіснення становить $V_n = 6,28$.

На рис. 3 зображено гідродинамічні сітки та відтворено на них положення границі розділу рідин у різні моменти часу для найпоширеніших випадків розміщення тріщин ГРП. Значення відповідних фільтраційних характеристик процесу витіснення у таких випадках подано у табл. 1.

Таблиця 1

Значення фільтраційних характеристик процесу витіснення

	Q	t_{\min}	t_{\max}	φ	$\bar{\varphi}$
<i>a</i>	0,879	1,96	48,1	0,17	0,84
<i>б</i>	0,986	1,89	47,4	0,18	0,86
<i>в</i>	0,905	1,96	47,1	0,18	0,87
<i>г</i>	1,016	1,92	49,5	0,18	0,87
<i>д</i>	0,949	1,96	47,4	0,18	0,89
<i>е</i>	1,020	1,88	43,5	0,12	0,92

У першу чергу, на рис. 3а продемонстровано випадок, коли у пласті немає тріщин гідророзриву, який характерний сповільненим процесом витіснення та найменшим значенням дебіту видобувної свердловини і, як наслідок, найменшим значенням об'єму добутої нафти $V_{ен}(18,3) = 5,81$ із пласта від початку витіснення до моменту часу $\bar{t} = 18,3$ заводнення видобувної свердловини більше як на 90 %, адже подальша експлуатація свердловини стає економічно не вигідна та процес витіснення в більшості випадків припиняють або ж проводять водоізоляційні та інші роботи [2-5]. Водночас симетричність гідродинамічної сітки та ліній розділу фаз у відповідні моменти часу за умов симетрії пласта є вагомим підтвердженням точності методу. Провівши тріщину ГРП в напрямку нагнітальної свердловини, як зображено на рис. 3б, помічено, що час прориву та час повного обводнення експлуатаційної свердловини зменшились, а фільтраційна витрата значно зросла, в зв'язку з пониженням загального фільтраційного опору у навколосвердловинній ділянці, як наслідок, значення об'єму добутої нафти становить $V_{ен}(17,2) = 5,89$. На рис. 3в продемонстровано процес витіснення нафти та зміну положення границі розділу рідин у випадку розміщення тріщини у протилежному напрямку від нагнітальної свердловини, в результаті чого час прориву води до видобувної свердловини є приблизно таким, як і при відсутності тріщин ГРП, а час повного її обводнення значно меншим, ніж у попередніх випадках. За такого розміщення тріщини, процес витіснення (до виконання умови $Q_n(t)/Q < 0,1$) є найдовший, а об'єм добутої нафти становить $V_{ен}(19,2) = 5,96$ є найбільший.

У випадку наявності декількох тріщин симетрично розміщених стосовно осі симетрії пласта (рис. 3г) суттєвим є те, що значення фільтраційної витрати зросло до $Q = 1,016$, а значення об'єму добутої нафти становить $V_{ен}(16,3) = 5,78$, що є найменшим показником, щодо всіх попередніх випадків (це пояснюється тим, що у період часу $t_{min} < t < t_{max}$ значення частки витісняючої рідини $Q_n(t)$ у загальній фільтраційній витраті Q різко зменшується). Значно більший об'єм добутої нафти $V_{ен}(18,2) = 5,92$ спостерігається у випадку розміщення тріщин ГРП так, як продемонстровано на рис. 3д. На відміну від вищерозглянутих можливих розміщень тріщин ГРП, у випадку їх асиметрії, як зображено на рис. 3е, продемонстровано порушення симетрії фронту витіснення, що призводить у цьому випадку до передчасного обводнення видобувної свердловини та нерівномірного «вимиву» нафти з пласта. При цьому, як наслідок, спостерігається зміщення точок «призупинки» течії та зміна значень квазіпотенціалу у них (відповідно: $\varphi = 0,12; \bar{\varphi} = 0,92$). У такому випадку час процесу витіснення $\bar{t} = 15,1$ є мінімальний, а значення об'єму добутої нафти упродовж цього часу суттєво не збільшилося щодо випадку відсутності тріщин ГРП у пласті та становить: $V_{ен}(15,1) = 5,83$.

Таким чином, шляхом перебору параметрів тріщин ГРП ($a_\lambda, b_\lambda, \alpha_\lambda$ тощо) за фіксованого розміщення свердловин, можемо забезпечувати оптимальний час прориву води до експлуатаційної свердловини, її повного обводнення, зупинки процесу витіснення (з метою уникнення ефекту передчасного обводнення й утворення застійних зон), а також мінімальний об'єм залишку нафти в кожен момент часу, зокрема на час припинення процесу витіснення.

Висновки. У роботі розроблено підхід до розв'язання задач однофазної фільтрації у викривлених важкопроникних нафтових пластах за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву з використанням ідей методів квазіконформних відображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу, який дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової систем за спеціальних умов впливу на неї, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин, зокрема, встановити положення точок «призупинки», в околі яких виникають зони малих швидкостей і, як наслідок, імовірність утворення так званих застійних зон, значення об'єму відбору нафти за час витіснення та її залишок. Під час проведення числових експериментів, виявлено, що у випадку асиметричного розміщення тріщин час повного заводнення видобувної свердловини є найкоротший, однак це не призводить до значного збільшення об'єму добутої нафти, у випадках симетричного їх розміщення кращі результати отримали за напрямленої дії тріщин у напрямку протилежному від нагнітальної свердловини, в перспективі є дослідження впливу проведення процедури ГРП у випадку анізотропного пласта. У перспективі є розв'язання в загальних формулюваннях задач оптимізації цільової функції, що враховує об'єм залишеної нафти, її локальну зосередженість та експлуатацію нових свердловин і тріщин ГРП на них задля прийняття автоматизованого рішення стосовно доцільності подальшої розробки пласта.

Література

- [1] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — Москва: Недра, 1972. — 288 с.
- [2] Толтаев В. А., Палив В. В., Баско Д. В. Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2008. — № 2. — С. 43-47.
- [3] Бомба А. Я., Капитан С. С., Пригодницький Д. О., Яроцак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. — Рівне: НУВГП, 2013. — 415 с.
- [4] Бомба А. Я., Теремус А. В., Яроцак С. В. Комплексний підхід до моделювання процесів багатофазної фільтрації під час проектування розробки нафтогазових родовищ // Нафтова і газова промисловість. — 2012. — № 1. — С. 48-52.
- [5] Бомба А. Я., Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: [монографія]. — Рівне: ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. — 273 с.
- [6] Бомба А. Я., Сінчук А. М. Математичне моделювання впливу тріщин гідравлічного розриву на інтенсифікацію відтоку газу з сланцевих осадкових порід // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. АСУ». — 2013. — № 1089. — С. 31-38.
- [7] Dahi Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures, PhD Dissertation // University of Texas at Austin. — 2009. — 216 p.
- [8] Голубева О. В., Пивень В. Ф. О продвижении границы раздела жидкостей при нелинейной фильтрации // ПММ. — 1977. — Вып. 4. — С. 754-758.
- [9] Булыгин Д. В., Булыгин В. Я. Геология и имитация разработки залежей нефти. — Москва: Недра. — 1996. — 382 с.
- [10] Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. — New York: Longman Scientific & Technical, 1995. — 267 p.

Complex analysis method for the simulation of the displacement in curved and difficult-permeable layers with taking into account the effects of hydraulic fracturing cracks

Andriy Bomba, Alesya Sinchuk

An approach to solving problems of the single-phase filtration in curved difficult-permeable oil reservoirs under conditions of the disturbance of seepage by cracks of hydraulic fracturing using ideas of quasi-conformal mappings and step-by-step fixation of the characteristics of the medium and the process is developed. The algorithm that implements the method is constructed and on this basis the analysis of changes in time of the filtration characteristics of the process is carried out—the costs (the rate of oil withdrawing over the time of the displacement and its residue in the reservoir), rate quasi-potential, etc. In particular, the peculiarities of the process of displacement while controlling it by changing the parameters of hydraulic fracturing cracks are established.

Метод комплексного анализа для моделирования процессов вытеснения в искривленных труднопроницаемых пластах с учетом влияния трещин гидроразрыва

Андрей Бомба, Алеся Синчук

Разработан подход к решению задач однофазной фильтрации в искривленных труднопроницаемых нефтяных пластах в условиях возмущения фильтрационного течения трещинами гидравлического разрыва с использованием идей метода квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик среды и процесса. Построен алгоритм, реализующий соответствующий метод, и на этом основании проведен анализ изменения по времени фильтрационных характеристик процесса: расходы (значение объема отбора нефти за время вытеснения и ее остаток в пласте), квазипотенциала скорости и т. д. Установлены особенности протекания процесса вытеснения при управлении им путем изменения параметров трещин гидравлического разрыва пласта.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 22.09.14