УДК 519.6

# Визначення кількості розв'язків системи трансцендентних рівнянь у фазових оптимізаційних задачах із застосуванням теорії багатовимірних лишків

Олена Булацик

К. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: bul@iapmm.lviv.ua

*Запропоновано спосіб визначення кількості розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з розділеними модулем і аргументом невідомої комплексної функції. Такі рівняння виникають у фазових оптимізаційних задачах. Ці рівняння зводяться до скінчених систем трансцендентних рівнянь стосовно невідомих комплексних параметрів. Спосіб ґрунтується на теорії багатовимірних лишків, яка є багатовимірним узагальненням принципу аргументу. Побудовано числовий алгоритм розв'язання задачі, який продемонстровано на прикладі задачі синтезу лінійної антени, що зводиться до системи рівнянь із двома комплексними невідомими.*

**Ключові слова:** фазові оптимізаційні задачі, нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, система трансцендентних рівнянь, теорія багатовимірних лишків, принцип аргументу.

**Вступ.** Фазові оптимізаційні задачі [1] характеризуються тим, що в них аргумент (фаза) невідомої комплексної функції фігурує в рівняннях окремо від її модуля (амплітуди). Такі задачі виникають, зокрема, в теорії синтезу антен за заданою амплітудною діаграмою направленості [2] та близьких до них задачах оптимізації передаючих ліній енергії [3]. Такі задачі зводяться, зазвичай, до нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. Особливістю рівнянь, які ми розглядаємо, є лінійна залежність підінтегральної функції в них від фазового множника $e^{i\arg f}$. Такі рівняння мають неєдині розв'язки, кількість яких може змінюватися (розгалужуватися) зі зміною значень фізичних параметрів. Вперше таке рівняння було, ймовірно, одержано у праці [4]. Упродовж певного часу ці рівняння розв'язувалися чисельно методом послідовних наближень. У роботі [5] було отримано аналітичне подання розв'язків таких рівнянь через комплексні поліноми скінчених степенів. На визначення коренів цих поліномів отримано системи трансцендентних рівнянь, кількість яких визначалася степенем полінома. Галуження розв'язків супроводжувалося зміною степеня поліномів.

У роботі [1] ці результати були узагальнені на певний клас нелінійних інтегральних рівнянь. Залишалося нерозв'язаним питання загальної кількості розв'язків цих рівнянь для фіксованих значень фізичних параметрів. До цього часу кількість розв'язків встановлювалась у конкретних випадках шляхом повного дослідження процесу їх галужень.

Метою даної роботи є розробка методу обчислення кількості розв'язків цих рівнянь для заданих значень фізичних параметрів шляхом дослідження згаданих систем трансцендентних рівнянь, що їх описують. У силу специфіки інтегральних рівнянь, що розглядаються, ми обмежуємося розв'язками, які не мають нулів в області визначення.

Теоретичні результати наводяться для загального нелінійного інтегрального рівняння згаданого класу. Метод визначення кількості його розв'язків ґрунтується на елементах теорії лишків. Результати будуть апробовані на конкретних задачах.

Для одновимірного випадку цю теорію було застосовано у роботі [6]. Описані нижче результати частково були анонсовані у праці [7].

## 1. Формулювання задачі

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна

$$f(\xi)=\int_a^b \frac{s(\xi)q(\xi')-s(\xi')q(\xi)}{\tau(\xi)-\tau(\xi')}F(\xi')e^{i\arg f(\xi')}d\xi', \tag{1}$$

де $s(\xi)$, $q(\xi)$, $\tau(\xi)$ — дійсні неперервні функції, такі що системи функцій $\{\tau^n(\xi)s(\xi)\}$ і $\{\tau^n(\xi)q(\xi)\}$, $n=0,1,\ldots$, є лінійно незалежні; $F(\xi)\in L_2(a,b)$ — задана дійсна додатна функція.

Згідно з роботою [1], розв'язки рівняння (1), що не мають нулів на інтервалі $[a,b]$, можна подати у вигляді

$$f(\xi)=\frac{|f(\xi)|P_N(\tau)}{|P_N(\tau)|}. \tag{2}$$

Тут

$$P_N(\tau)=\prod_{k=1}^{N}(1-\eta_k\tau) \tag{3}$$

— поліном степеня $N$ із комплексними, попарно не спряженими нулями $\eta_k^{-1}$:

$$\eta_k-\overline{\eta}_m\neq 0, \qquad k,m=\overline{1,N}. \tag{4}$$

Згідно з поданням (2), шукана функція $e^{i\arg f(\xi')}$ у рівнянні (1) має вигляд

$$e^{i\arg f(\xi)}=\frac{P_N(\tau)}{|P_N(\tau)|}.$$

Параметри $\eta_{Nk}$ задовольняють систему трансцендентних рівнянь:

$$\Phi_k\left(\eta_1,...,\eta_N\right) \equiv \int_a^b \frac{\tau^{k-1} s\left(\xi\right) F\left(\xi\right)}{\left|P_N(\tau)\right|} d\xi = 0\,, \qquad k = \overline{1,N}\,, \tag{5а}$$

$$\Psi_k\left(\eta_1,...,\eta_N\right) \equiv \int_a^b \frac{\tau^{k-1} q\left(\xi\right) F\left(\xi\right)}{\left|P_N(\tau)\right|} d\xi = 0\,, \qquad k = \overline{1,N}\,. \tag{5б}$$

Шуканими величинами у системі (5) є комплексні числа $\eta_k = \eta'_k + i\eta''_k$, $k = \overline{1,N}$. У силу симетричного входження параметрів $\eta_k$ у співвідношення (3), кожному розв'язку рівняння (1) відповідає $N!$ розв'язків системи (5) залежно від послідовності розміщення цих параметрів.

## 2. Визначення кількості розв'язків системи трансцендентних рівнянь у заданій області

У роботі [6] було використано принцип аргумента (див., напр., монографію [8]) для визначення кількості розв'язків рівняння (1) у випадку $N = 1$. У даній роботі цей підхід узагальнюється для $N > 1$. Алгоритм ґрунтується на теорії лишків комплексних функцій від багатьох комплексних змінних.

Введемо функції

$$\Gamma_k\left(\eta_1,...,\eta_N\right) = \Phi_k\left(\eta_1,...,\eta_N\right) + i\Psi_k\left(\eta_1,...,\eta_N\right), \qquad k = \overline{1,N}\,, \tag{6}$$

які залежать від комплексних параметрів $\eta_k$. Кількість розв'язків системи (5) із заданим степенем полінома $N$ дорівнює кількості нулів вектор-функції $\Gamma\left(\eta_1,...,\eta_N\right) = \left\{\Gamma_1\left(\eta_1,...,\eta_N\right),\ldots,\Gamma_N\left(\eta_1,...,\eta_N\right)\right\}$.

Відповідно до роботи [9], кількість нулів $K$ комплексної вектор-функції $\Gamma\left(\eta_1,...,\eta_N\right)$ від багатьох комплексних змінних в $N$-вимірній комплексній області з границею $\partial D$, обчислюється за формулою

$$K = \int_{\partial D} \omega\left(\Gamma,\overline{\Gamma}\right), \tag{7}$$

де $\omega\left(\Gamma,\overline{\Gamma}\right)$ — диференціальна форма, яка має в загальному випадку вигляд

$$\omega\left(\Gamma,\overline{\Gamma}\right) = \frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N} \frac{1}{|\,\Gamma\,|^{2N}} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1}\overline{\Gamma}_j d\overline{\Gamma}_{[j]} \Lambda d\Gamma\,, \tag{8}$$

$\Lambda$ — символ зовнішнього добутку, $[j]$ — зведений індекс $\{1,2,...,j-1,j+1,...,N\}$.

Далі ми для простоти обмежимося випадком $N = 2$. Розгляд більших значень $N$ вимагає значних обчислювальних затрат.

### 3. Частковий випадок $N = 2$

У випадку $N = 2$ формула (7) записується так

$$K = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\left|\Gamma\right|^4} \overline{\Gamma}_1 d\overline{\Gamma}_2 \Lambda d\Gamma_1 \Lambda d\Gamma_2 - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\left|\Gamma\right|^4} \overline{\Gamma}_2 d\overline{\Gamma}_1 \Lambda d\Gamma_1 \Lambda d\Gamma_2, \qquad (9)$$

де $|\Gamma|^4 = \left(\Gamma_1\overline{\Gamma}_1 + \Gamma_2\overline{\Gamma}_2\right)^2$. Проілюструємо описаний підхід на прикладі нелінійного інтегрального рівняння

$$f(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(c\left(\xi - \xi'\right)\right)}{\xi - \xi'} F(\xi') e^{i \arg f(\xi')} d\xi', \qquad (10)$$

яке є частковим випадком рівняння (1) і виникає в задачі синтезу лінійних антен за заданою амплітудною діаграмою напрямленості [2]. В цьому випадку $s(\xi) = \sin(c\xi)$, $q(\xi) = \cos(c\xi)$, $\tau = \xi$, додатна функція $F(\xi)$ є задана (бажана) амплітудна діаграма направленості, фізичний параметр $c$ пропорційний довжині антени.

Рівняння (10) має неєдині розв’язки. Ці розв’язки можуть розгалужуватися зі зміною параметра $c$. У роботі [10] процес галуження розв’язків для заданої функції $F(\xi) = const$ досліджено повністю та зображено у вигляді графу (див. рис. 1). Номери кривих відповідають значенням степеня полінома $N$.

Видно, що для фіксованих $c$, розв’язки з різними значеннями $N$ існують одночасно. На степінь полінома $N$ існує обмеження $N < 2c/\pi$. Встановлено,

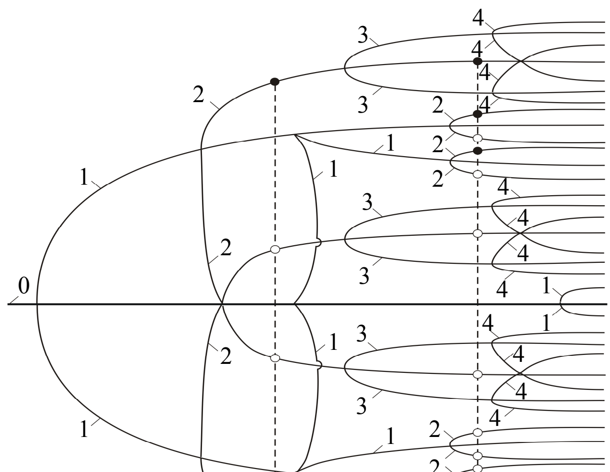


Рис. 1. Граф розв’язків рівняння (10) для $F(\xi) = const$

що найменше середньоквадратичне відхилення $\left|f(\xi)\right|$ від $F(\xi)$ досягається за найбільшого можливого значення *N*.

Описаний вище підхід дозволяє визначити кількість розв'язків рівняння (10) для фіксованого значення *c* та заданого значення *N* без повного дослідження процесу галуження.

У випадку $N = 2$ функції (6) набувають вигляду

$$\Gamma_1(\eta_1,\eta_2)=\int_{-1}^{1}\frac{\exp(ic\xi)F(\xi)}{\left|(1-\eta_1\xi)(1-\eta_2\xi)\right|}d\xi, \tag{11а}$$

$$\Gamma_2(\eta_1,\eta_2)=\int_{-1}^{1}\frac{\xi\exp(ic\xi)F(\xi)}{\left|(1-\eta_1\xi)(1-\eta_2\xi)\right|}d\xi. \tag{11б}$$

Оскільки функції $\Phi_k$, $\Psi_k$ є дійсні, то, згідно з працею [11], формулу (9) можна звести до вигляду

$$K=\frac{-2i}{(2\pi i)^2}\left(\int_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_1}{|\Gamma|^4}d\Phi_1\Lambda d\Phi_2\Lambda d\Psi_2+i\int_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_1}{|\Gamma|^4}d\Psi_1\Lambda d\Phi_2\Lambda d\Psi_2+\right.$$
$$\left.+\int_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_2}{|\Gamma|^4}d\Phi_2\Lambda d\Phi_1\Lambda d\Psi_1+i\int_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_2}{|\Gamma|^4}d\Psi_2\Lambda d\Phi_1\Lambda d\Psi_1\right). \tag{12}$$

Кожний з інтегралів у виразі (12) є диференціальна форма дійсних змінних $\Psi_k,\Phi_k$, $k=1,2$, а інтеграли є звичайні потрійні інтеграли. Згідно з роботою [9], вираз (12) можна звести до вигляду

$$K=\frac{-2i}{(2\pi i)^2}\left(\iiint_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_1}{|\Gamma|^4}\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_2)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}dt_1dt_2dt_3+i\iiint_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_1}{|\Gamma|^4}\frac{\partial(\Psi_1,\Phi_2,\Psi_2)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}dt_1dt_2dt_3+\right.$$
$$\left.+\iiint_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_2}{|\Gamma|^4}\frac{\partial(\Phi_2,\Phi_1,\Psi_1)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}dt_1dt_2dt_3+i\iiint_{\partial D}\frac{\overline{\Gamma}_2}{|\Gamma|^4}\frac{\partial(\Psi_2,\Phi_1,\Psi_1)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}dt_1dt_2dt_3\right), \tag{13}$$

де $t_1,t_2,t_3$ — нові змінні, вибрані певним чином із набору дійсних величин $r,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, через які визначаються параметри $\eta_1,\eta_2$ за співвідношеннями: $\eta_1=r\cos\alpha_3e^{i\alpha_1}$, $\eta_2=r\sin\alpha_3e^{i\alpha_2}$, $r\ge 0$, $0\le\alpha_1\le 2\pi$, $0\le\alpha_2\le 2\pi$, $0\le\alpha_3\le\pi/2$; $\dfrac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}$ означає Якобіан функцій $G_1,G_2,G_3$ щодо нових змінних $t_1,t_2,t_3$.

Для простоти ми зберігаємо для області інтегрування в цих змінних те ж позначення $\partial D$. У середині тіла, обмеженого цією областю, а також на самій границі $\partial D$, функції $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ мають бути аналітичними.

Кількість обчислень під час розв’язання задачі можна зменшити, скориставшись властивостями розв’язків рівняння (10). Відповідно до теореми 4.7 з роботи [1], якщо довільний із параметрів $\eta_k$ у розв’язку рівняння (10) замінити на його комплексно спряжений $\overline{\eta}_k$, то нова функція також буде розв’язком цього рівняння. Це дозволяє зменшити область інтегрування $\partial D$, наклавши умову

$$\operatorname{Im}\eta_k > 0, \quad k = 1,2. \tag{14}$$

Таким чином, після обчислення кількості розв’язків рівняння (10) за формулою (13), отриманий результат потрібно помножити на $2^N/N!$.

Очевидно, що в нашому випадку функції (5) аналітичні у всій комплексній площині, за винятком точок $\eta_k = \pm 1$. Для того, щоб обійти ці точки, ми будемо обмежувати область інтегрування умовами $\theta_0 \le \alpha_{1,2} \le \pi - \theta_0$ із достатньо малим кутом $\theta_0$.

Остаточно, область інтегрування $\partial D$ у виразі (13) вибирається як частина чотиривимірної кулі радіуса $R$: $|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \le R^2$, обмежена частиною сфери $r = R$ і «бічними гранями» $\alpha_{1,2} = \theta_0$ і $\alpha_{1,2} = \pi - \theta_0$. Вона складається з таких п’яти частин:

1. $r = R,\ \theta_0 \le \alpha_1 \le \pi - \theta,\ \theta_0 \le \alpha_2 \le \pi - \theta,\ \theta_0 \le \alpha_3 \le \pi/2 - \theta_0$; $t_1 = \alpha_1, t_2 = \alpha_2, t_3 = \alpha_3$;
2. $0 \le r \le R$, $\alpha_1 = \theta_0$, $\theta_0 \le \alpha_2 \le \pi - \theta$, $\theta_0 \le \alpha_3 \le \pi/2 - \theta_0$; $t_1 = r, t_2 = \alpha_2, t_3 = \alpha_3$;
3. $0 \le r \le R$, $\alpha_1 = \pi - \theta_0$, $\theta_0 \le \alpha_2 \le \pi - \theta$, $\theta_0 \le \alpha_3 \le \pi/2 - \theta_0$; $t_1 = r, t_2 = \alpha_2, t_3 = \alpha_3$;
4. $0 \le r \le R$, $\theta_0 \le \alpha_1 \le \pi - \theta$, $\alpha_2 = \theta_0$, $\theta_0 \le \alpha_3 \le \pi/2 - \theta_0$; $t_1 = \alpha_1, t_2 = r, t_3 = \alpha_3$;
5. $0 \le r \le R$, $\theta_0 \le \alpha_1 \le \pi - \theta$, $\alpha_2 = \pi - \theta_0$, $\theta_0 \le \alpha_3 \le \pi/2 - \theta_0$. $t_1 = \alpha_1, t_2 = r, t_3 = \alpha_3$.

Таким чином ми звели задачу знаходження кількості розв’язків системи трансцендентних рівнянь (11) до обчислення чотирикратних інтегралів від дійсних змінних $(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi)$ — потрійні інтеграли у виразі (13) та однократне інтегрування під час обчислення функцій $\Gamma_1, \Gamma_2$ за формулами (11).

Обчислимо кількість розв’язків системи (5) із заданою функцією $F(\xi) = const$ для $N = 2$ для кількох конкретних значеннях $c$, відзначених на рис. 1 вертикальними пунктирними лініями. Результати, отримані із застосуванням теорії галужень, показали, що, наприклад, для значення $c = 6$ існує один розв’язок $\eta_1 = 1{,}64 + 1{,}65i$, $\eta_2 = -1{,}64 + 1{,}65i$ з поліном другого степеня, який задовольняє умову (14). Цей розв’язок показано на рисунку суцільним кружечком. Розв’язки, які цій умові не задовольняють, показані прозорими кружечками.

Задавши область, у якій шукається кількість розв’язків, величинами $R = 4$, $\theta_0 = 0{,}05$, і застосувавши описану вище теорію, ми отримали $K = 1{,}98$, що треба розуміти як добре наближення до значення $K = N!$. Збільшення радіуса сфери $R$ суттєво на результат не впливає, що означає, що більше коренів там немає.

Аналогічно, в точці $c = 8{,}5$ кількість розв’язків рівняння (10) з $N = 2$, що задовольняють умову (14), дорівнює трьом:

$$\eta_1^{(1)} = 1,55 + 0,99i\,, \quad \eta_2^{(1)} = -1,55 + 0,99i\,;$$
$$\eta_1^{(2)} = 1,59 + 0,89i\,, \quad \eta_2^{(2)} = -1,59 + 0,89i\,;$$
$$\eta_1^{(3)} = 0,53 + 2,48i\,, \quad \eta_2^{(3)} = -0,53 + 2,48i\,.$$

Задавши в цьому випадку $R = 8$, $\theta_0 = 0,05$, ми отримали $K = 5,94 \approx 3N!$.

Оскільки очікувана кількість розв'язків має бути цілим числом, то високої точності для обчислення інтегралів у виразі (13) не вимагається. Достатньо, щоб отримане число $K$ відхилялося від шуканого натурального числа на величину порядку 0,1-0,2.

**Висновки.** У роботі запропоновано спосіб визначення кількості розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна певного класу. Такі рівняння виникають, зокрема, в фазових оптимізаційних задачах, наприклад, у задачах синтезу антен і передавальних ліній. Вони мають неєдині розв'язки, які розгалужуються зі зміною фізичних параметрів. Ці розв'язки подаються через комплексні поліноми скінчених степенів. Спосіб ґрунтується на теорії багатовимірних лишків. Він дозволяє визначати кількість розв'язків задачі для фіксованих фізичних параметрів, без повного дослідження процесу галуження. Побудовано й описано числовий алгоритм розв'язання такої задачі. Результати продемонстровано на прикладі нелінійного інтегрального рівняння, яке виникає в задачі синтезу лінійної антени за амплітудною діаграмою напрямленості. Розглянуто випадок визначення кількості розв'язків, які описуються поліномами другого степеня.

## Література

[1] Фазові оптимізаційні задачі / *О. О. Булацик, М. М. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, Ю. П. Тополюк*. — Київ: Наук. думка, 2012. — 317 с.

[2] Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы / *М. И. Андрийчук, Н. Н. Войтович, П. А. Савенко, В. П. Ткачук*. — Киев: Наук. думка, 1993. — 256 с.

[3] *Katselenlenbaum B. Z.* High-frequency Electrodynamics. — Weinheim: WILEY-VCH, 2006. — 329 p.

[4] *Войтович Н. Н.* О синтезе антенны по заданной амплитудной диаграмме излучения (метод В. В. Семенова) // Радиотехника и электроника. — 1972. — Т. 17, № 12. — С. 2491-2497.

[5] *Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P., Reshnyak O. O.* Approximation of compactly supported functions with free phase by functions witch bounded spectrum // Fields Inst. Commun. — 2000. — Vol. 25. — P. 531-541.

[6] *Bulatsyk O. O., Tupychak Yu. P., Voitovich N. N.* Application of argument principle for determination of number of solutions to nonlinear integral equations related to problems with free phase // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010). Proc. of Int. Seminar/Workshop, Lviv-Tbilisi 2010. — P. 187-191.

[7] *Bulatsyk O. O.* Application of multidimentional residue theory to determining number of solutions of transcendental equation systems arisen in phase optimization problems // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2011). Proc. of Int. Seminar / Workshop, Lviv-Tbilisi 2011. — P. 196-199.

[8] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 749 с.

[9] *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1979. — 368 с.
[10] *Voitovich N. N.* Antenna synthesis by amplitude radiation pattern and modified phase problem. Appendix in: *Katselenlenbaum B. Z.* Electromagnetic Fields — Restrictions and Approximation. Weinheim: WILEY-VCH, 2003. — P. 195-233.
[11] *Скляренко Е. Г.* Принцип аргумента и теорема Руше – топологическая версия // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, № 5. — С. 209-223.

## Application of multidimensional residues theory to determining number of solutions of transcendental equation systems arisen in phase optimization problems

Olena Bulatsyk

*The subject of investigation is to determine the number of solutions to the system of transcendental equations related to a class of nonlinear integral equations of Hammerstein type with separated modulus and argument of unknown complex function. Such systems arise particularly in the phase optimization problems. The numerical algorithm is constructed and demonstrated by the example of equation of two complex unknowns.*

## Определение количества решений системы трансцендентных уравнений в фазовых оптимизационных задачах с применением теории многомерных вычетов

Елена Булацык

*Предложен способ определения количества решений нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна с разделением модуля и аргумента неизвестной комплексной функции. Такие уравнения возникают в фазовых оптимизационных задачах и сводятся к конечным системам трансцендентных уравнений относительно неизвестных комплексных параметров. Способ базируется на теории многомерных вычетов, который является многомерным обобщением принципа аргумента. Построен вычислительный алгоритм решения задачи. который продемонстрирован на примере задачи синтеза линейной антенны, сводящейся к системе уравнений с двумя комплексными неизвестными.*

**Представлено професором О. Чернухою**

Отримано 29.10.14