

Моделювання випадкового дифузійного потоку маси у двофазній смузі зі стохастично розташованим прошарком випадкової товщини

Анастасія Давидок¹, Ольга Чернуха²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060; Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: davydoka@gmail.com

² д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: cher@cmm.lviv.ua

Досліджено потік домішкової речовини у шарі зі стохастично розташованим шаруватим включенням, товщина якого також є випадковою величиною. Крайову задачу дифузії сформульовано для функції потоку домішкових частинок за сталого значення потоку на одній границі тіла і нульової концентрації на іншій. Розв'язок побудовано у вигляді ряду Неймана. Проведено процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз і випадковою товщиною прошарку. Одержано розрахункові формули для усередненого потоку маси за нульової та ненульової сталої початкових концентрацій для випадків, коли товщина прошарку є випадковою величиною з рівномірним або трикутним розподілом на деякому проміжку. Проаналізовано залежність потоку від фізичних і геометричних параметрів включення.

Ключові слова: стохастична структура, дифузійний потік, випадкова товщина прошарку, рівномірний розподіл, трикутний розподіл.

Вступ. В існуючих промислових системах очистки питної води та забруднених стоків широко використовують багат шарові фільтри з різною пористістю шарів [1]. Ефективність їх роботи істотно залежить як від пористості, так і їхніх геометричних параметрів. В інженерній практиці для розрахунку основних характеристик таких фільтрів, зазвичай, використовують комп'ютерне моделювання, розв'язуючи числовими методами нелінійні задачі фільтрації водних розчинів [2]. Разом із тим для ефективного якісного та кількісного аналізу впливу вказаних параметрів на довговічність і ефективність роботи фільтрів доцільно також отримати аналітичні розв'язки відповідних крайових задач. Оскільки під час моделювання фільтрів як багатофазних шаруватих систем, координати розташування включень можуть бути невідомими, то виникає необхідність розгляду таких структур як випадково неоднорідних [3]. Окрім того, в деяких випадках відсутня інформація про товщину окремих прошарків, а отже товщину включень також потрібно розглядати як випадкову величину. У роботі [4] запропоновано підхід до математичного опису потоків домішкової речовини у випадково неоднорідних шаруватих структурах, відповідно до якого на основі рівняння

балансу маси одержано рівняння дифузії для функції потоку, а крайові задачі запропоновано формулювати безпосередньо для потоку. За таким підходом досліджено дифузійні потоки у шарі з випадково розташованим прошарком [5] і багат шаровій смузі [6] із рівномірним розподілом фаз. Пропонована робота стосується дослідження випадкових потоків маси у смузі зі стохастично розташованим прошарком випадкової товщини на основі підходу, розвинуеного у праці [4].

1. Об'єкт дослідження та постановка задачі

Розглянемо дифузію домішкової речовини у тришаровій смузі товщини z_0 (рис. 1а). Нехай між шарами Ω_0 з коефіцієнтом дифузії домішки D_0 знаходиться випадково розташований прошарок Ω_1 з коефіцієнтом дифузії D_1 . Вважаємо, що фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, а коефіцієнти дифузії є сталі у межах кожної з фаз і виконується умова $v_0 \gg v_1$, де v_j — об'ємна частка фази j , $j = 0; 1$. Окрім того, приймаємо, що товщина прошарку включення h є невідома та вважатимемо її випадковою величиною. Розглянемо випадки, коли товщина h є випадкова величина з рівномірним і трикутним розподілами на проміжку $[h_{\min}; h_{\max}]$, де $0 < h_{\min} < h_{\max} < z_0$ [7].

Рівняння дифузії для функції потоку маси $J(z, t)$ є такі [4]

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Тут $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0; \\ D_1, & z \in \Omega_1 \end{cases}$ — випадковий коефіцієнт дифузії (рис. 1б).

Приймаємо, що у початковий момент часу відсутній дифузійний потік у тілі, на границі шару $z = 0$ підтримується стале значення потоку, а на границі $z = z_0$ концентрація домішки $c(z, t)$ рівна нулю:

$$J(z, t)|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$J(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv const, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = 0. \quad (3)$$

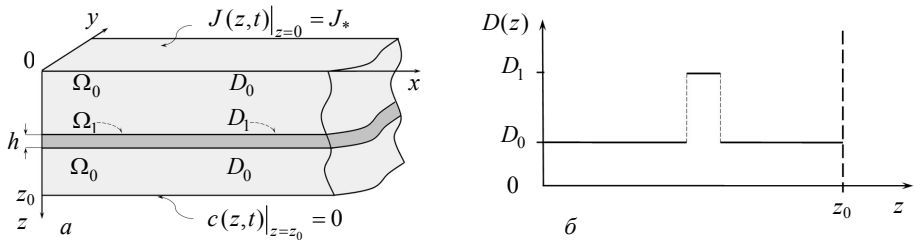


Рис. 1. Можлива реалізація тришарової смузи (а)
 та відповідний схематичний розподіл випадкового коефіцієнта дифузії (б)

Зазначимо, з другої граничної умови (3) випливає, що значення функції потоку на границі $z = z_0$ дорівнює деякій функції $F(t)$, яку необхідно визначити додатково. Окрім того, умова (2) означає, що в початковий момент часу задано сталий розподіл концентрації, і він може бути як нульовим, так і відмінним від нуля. Тут розглянемо обидва випадки.

2. Ряд Неймана для випадкової функції потоку маси

Розглядаючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, крайову задачу (1)-(3) подамо у вигляді еквівалентного інтегро-диференціального рівняння з випадковим ядром [8]

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt', \quad (4)$$

де $J_0(z, t)$ — розв'язок однорідної крайової задачі, $G(z, z', t, t')$ — детермінована функція Гріна, $L_s(z) = (D_1 - D_0) \eta_1(z) \partial^2 / \partial z^2$, $\eta_1(z) = \begin{cases} 1, z \in [z_1; z_1 + h]; \\ 0, z \notin [z_1; z_1 + h] \end{cases}$ — випадкова «функція структури» [9], z_1 — координата верхньої межі прошарку. Відповідно до роботи [4] розв'язок однорідної крайової задачі за нульової початкової концентрації $c(z, t)|_{t=0} = 0$ має вигляд

$$J_0(z, t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) \right), \quad (5)$$

за умови $c(z, t)|_{t=0} = c_* \equiv const$ розв'язок крайової задачі є такий

$$J_0(z, t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{J_*}{\xi_n} + (-1)^n c_* D_0 \right) \sin(\xi_n z), \quad (6)$$

а функція Гріна є розв'язком крайової задачі з точковим джерелом і має вигляд

$$G(z, z', t, t') = \frac{\theta(t - t')}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t - t')} \left[\cos(y_k (z - z')) - \cos(y_k (z + z')) \right]. \quad (7)$$

Тут $\xi_n = \pi(2n - 1)/(2z_0)$, $y_k = k\pi/z_0$. Зі співвідношень (5), (6) одержуємо крайові умови для функції потоку на границі $z = z_0$: за нульової початкової концентрації

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} \equiv F(t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \right);$$

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} \equiv F(t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{J_*}{\xi_n} + (-1)^n c_* D_0 \right).$$

Розв'язок рівняння (4) знайдено методом послідовних ітерацій у вигляді ряду Неймана [5, 10]. Надалі для проведення процедур усереднення обмежимося двома першими членами цього ряду

$$J(z, t) \approx J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' .$$

Зазначимо, що ряд Неймана є абсолютно і рівномірно збіжний, якщо коефіцієнти дифузії є обмеженими [9, 11]: $D_j \leq K < \infty$, $j = 0; 1$ і коефіцієнт дифузії матриці відмінний від нуля: $D_0 \neq 0$. Також зауважимо, що коректність обмеження двома членами ряду Неймана під час дослідження випадкових потоків маси показано, зокрема, у роботі [12].

3. Рівномірний розподіл товщини включення

Крайова задача (1)-(3) містить дві випадкові характеристики структури — координату розташування включення та товщину прошарку. Спочатку, використовуючи розроблену методику [4], усереднимо дифузійний потік за ансамблем конфігурацій фаз, а потім проведемо усереднення за випадковою товщиною прошарку:

$$\left\langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \right\rangle_h = J_0(z, t) + \left\langle \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \langle L_s(z') \rangle_{conf} J_0(z', t') dz' dt' \right\rangle_h .$$

Тут використано, що $J_0(z, t)$ і $G(z, z', t, t')$ є детерміновані функції, а від випадкової координати верхньої межі прошарку z_1 залежить тільки функція $\eta_1(z')$ в операторі $L_s(z')$.

Для дифузійного потоку частинок, усередненого за ансамблем конфігурацій фаз і випадковою товщиною прошарку, отримаємо

$$\begin{aligned} \left\langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \right\rangle_h &= J_0(z, t) + (D_1 - D_0) \left\langle \int_0^t \left[\int_0^h \frac{1}{z_0} z' G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{h}{z_0} \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' \right] dt' \right\rangle_h . \end{aligned} \quad (8)$$

Розглянемо випадок, коли товщина включення h є стохастична величина з рівномірним розподілом на проміжку $[h_{\min}; h_{\max}]$. Функція густини розподілу h є $f(h) = 1/\Delta h$, де $\Delta h = h_{\max} - h_{\min}$.

Після підстановки у співвідношення (8) відповідних виразів для потоку в однорідній смузі та функції Гріна (7) запишемо за нульової початкової концентрації

$$\frac{1}{z_*} \left\langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \right\rangle_h = 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) +$$

$$+ \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \langle A_{kn}(h) \rangle_h \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z); \quad (9)$$

за ненульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \rangle_h &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{1}{\xi_n} + (-1)^n D_0 \frac{C_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \langle A_{kn}(h) \rangle_h \left(1 + (-1)^n D_0 \xi_n \frac{C_*}{J_*} \right) \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $A_{kn}(h) = \frac{\cos(b_{kn}^- h)}{(b_{kn}^-)^2} - \frac{\cos(b_{kn}^+ h)}{(b_{kn}^+)^2} - \frac{4y_k \xi_n}{(y_k^2 - \xi_n^2)^2} + (-1)^{k+n} \frac{2y_k h}{y_k^2 - \xi_n^2}$, $b_{kn}^{\pm} = y_k \pm \xi_n$.

Враховуючи рівномірний розподіл випадкової величини h , маємо

$$\langle A_{kn}(h) \rangle_h = \frac{1}{\Delta h} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} A_{kn}(h) dh.$$

Після інтегрування отримаємо розрахункові формули для потоків маси усереднених за ансамблем конфігурацій фаз і з рівномірним розподілом товщини включення на заданому інтервалі

за нульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \rangle_h &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) + \\ &+ \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} A_{kn}^1 \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z), \end{aligned} \quad (11)$$

за ненульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \langle \langle J(z, t) \rangle_{conf} \rangle_h &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{1}{\xi_n} + (-1)^n D_0 \frac{C_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} A_{kn}^1 \left(1 + (-1)^n D_0 \xi_n \frac{C_*}{J_*} \right) \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z). \end{aligned} \quad (12)$$

де $A_{kn}^1 = \frac{1}{\Delta h} \left[\frac{\sin(b_{kn}^- h_{\max}) - \sin(b_{kn}^- h_{\min})}{(b_{kn}^-)^3} - \frac{\sin(b_{kn}^+ h_{\max}) - \sin(b_{kn}^+ h_{\min})}{(b_{kn}^+)^3} - \frac{4y_k \xi_n \Delta h}{(y_k^2 - \xi_n^2)^2} + \right. \\ \left. + (-1)^{k+n} y_k \frac{h_{\max}^2 - h_{\min}^2}{y_k^2 - \xi_n^2} \right].$

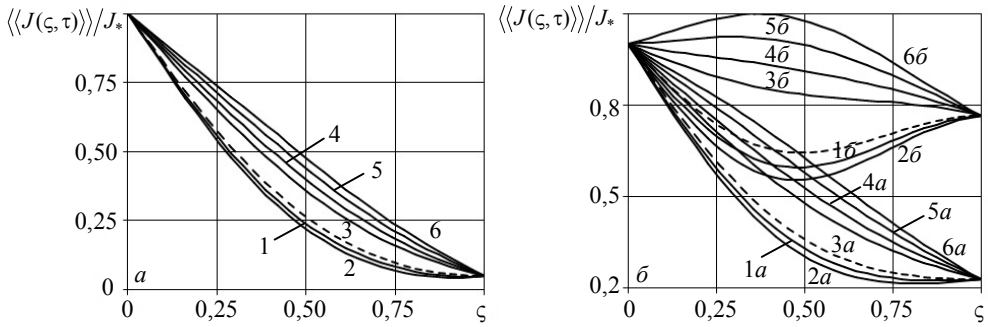


Рис. 2. Усереднені потоки маси за нульової (а) та ненульової сталोї (б) початкових концентрацій для рівномірного розподілу товщини включення на $[h_{\min}; h_{\max}]$

На основі отриманих розрахункових формул (11), (12) проведемо числовий аналіз залежності усередненого потоку від фізичних і геометричних параметрів включення. Числові розрахунки проводимо у безрозмірних змінних $\zeta = z/z_0$, $\tau = D_0 t / z_0^2$ [13]. Рис. 2 ілюструє розподіли усередненого дифузійного потоку за нульової (рис. 2а) та ненульової сталої (рис. 2б) початкових концентрацій для різних значень h_{\min} та h_{\max} для $\tau = 0, 1$. На рис. 2 криві 1, 2 побудовані для проміжків $[0,005; 0,205]$, $[0,1; 0,3]$ у випадку $D_1/D_0 = 0,01$, криві 3-6 відповідно для $[0,005; 0,205]$, $[0,05; 0,25]$, $[0,1; 0,3]$, $[0,15; 0,35]$ у випадку $D_1/D_0 = 5$. Криві а на рис. 2б відповідають значенню $c_*/J_* = 0,1$, криві б — $c_*/J_* = 0,4$. Штрихові лінії позначають потоки в однорідній смугі з характеристиками матриці.

Зазначимо, що у випадку, якщо коефіцієнт дифузії частинок у матриці більший, ніж у включенні, зміщення інтервалу ймовірних значень товщини прошарку до 1 призводить до зменшення потоку (криві 1, 2, рис. 2). Якщо $D_1 > D_0$, то з зсувом проміжку $[h_{\min}; h_{\max}]$ до 1 потік маси збільшується (криві 3-6, рис. 2).

Збільшення початкової концентрації c_* у випадку більших значень коефіцієнта дифузії частинок у матриці, ніж у включенні, може призвести до утворення локального мінімуму функції $\langle\langle J(\zeta, \tau) \rangle\rangle/J_*$ в середині смуги (криві 1б, 2б, рис. 2б). Окрім того, у випадку $D_1/D_0 > 1$ і $c_*/J_* > 0,3$ збільшення h_{\min} та h_{\max} за сталої довжини проміжку Δh призводить до зміни поведінки дифузійного потоку — функція стає опуклою вгору та $\langle\langle J(\zeta, \tau) \rangle\rangle/J_*$ може досягати значень, більших, ніж значення потоку на границі $\zeta = 0$ (криві 5б, 6б, рис. 2б).

Проведені обчислення показали, що зміна Δh за сталого значення h_{\min} або h_{\max} , впливають на поведінку усередненого потоку подібним чином, що і зміщення інтервалу ймовірних значень товщини прошарку $[h_{\min}; h_{\max}]$ вздовж осі $O\zeta$. Окрім того, розширення (звуження) інтервалу $[h_{\min}; h_{\max}]$ в околі однієї і тієї ж

точки координат практично не впливає на значення $\langle\langle J(\zeta, \tau) \rangle\rangle / J_*$ (змінюються 3-5 значимі цифри). Подібну поведінку функції потоку можна пояснити тим, що незалежно від значень h_{\min} та h_{\max} (незалежно від довжини інтервалу) середнє значення ймовірної товщини прошарку залишається незмінним.

4. Трикутний розподіл товщини включення

У цьому підпункті розглянемо трикутний розподіл випадкової товщини включення h на проміжку $[h_{\min}; h_{\max}]$, який задавався і для рівномірного розподілу. Функція густини трикутного розподілу має вигляд [7]

$$f(h) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta h} - \frac{2}{\Delta h^2} |h_{\min} + h_{\max} - 2h|, & h \in [h_{\min}; h_{\max}]; \\ 0, & h \notin [h_{\min}; h_{\max}]. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 3 наведено залежність функції $f(h)$ від інтервалу ймовірних значень товщини прошарку $[h_{\min}; h_{\max}]$. Криві 1-5 на рис. 3а відповідають проміжкам $[0,01; 0,2]$, $[0,1; 0,2]$, $[0,1; 0,29]$, $[0,1; 0,35]$, $[0,1; 0,45]$. Криві 1-4 на рис. 3б побудовані для інтервалів $[0,04; 0,4]$, $[0,12; 0,32]$, $[0,17; 0,27]$, $[0,195; 0,245]$.

Зауважимо, що $\max f(h)$ залежить тільки від довжини інтервалу можливих значень товщини включення та не залежить від координат проміжку на осі Oh (криві 1 і 3, рис. 3а). Окрім того, чим менший проміжок $[h_{\min}; h_{\max}]$, тим ймовірнішою є товщина прошарку, яка рівна $\Delta h/2$ (рис. 3б).

Враховуючи вираз (13), для трикутного розподілу товщини прошарку маємо

$$\langle A_{kn}(h) \rangle_h = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(h) A_{kn}(h) dh = \int_{h_{\min}}^{h_c} \frac{4(h - h_{\min})}{\Delta h^2} A_{kn}(h) dh - \int_{h_c}^{h_{\max}} \frac{4(h - h_{\max})}{\Delta h^2} A_{kn}(h) dh,$$

де $h_c = \Delta h/2$.

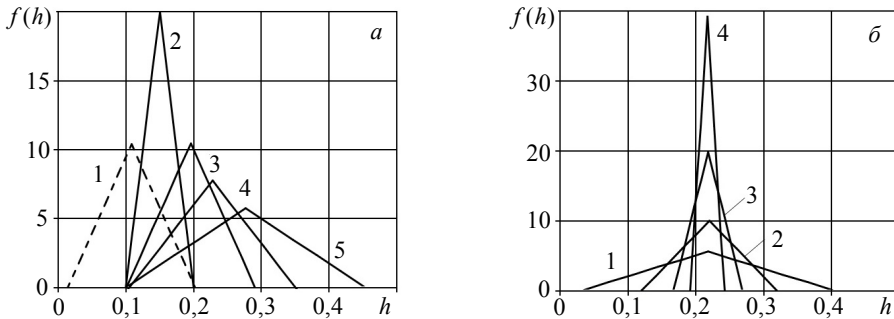


Рис. 3. Функція густини трикутного розподілу для різних значень h_{\max} (а) та різних значень Δh в околі однієї точки (б)

Як і у попередньому випадку, проінтегрувавши цей вираз і підставивши отриманий результат у співвідношення (9) і (10) відповідно, одержимо розрахункові формули для дифузійних потоків усереднених за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу та випадковою товщиною включення з трикутним розподілом

за нульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \left\langle \langle J(z,t) \rangle_{conf} \right\rangle_{\tilde{h}} &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) + \\ &+ \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} A_{kn}^2 \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z), \end{aligned} \quad (14)$$

за ненульової початкової концентрації

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \left\langle \langle J(z,t) \rangle_{conf} \right\rangle_h &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{1}{\xi_n} + (-1)^n D_0 \frac{c_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0)}{D_0 z_0^3} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} A_{kn}^2 \left(1 + (-1)^n D_0 \xi_n \frac{c_*}{J_*} \right) \left[e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z). \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} A_{kn}^2 &= \frac{4}{\Delta h^2} \left[\frac{1}{(b_{kn}^-)^4} \left(2 \cos(b_{kn}^- h_c) - \cos(b_{kn}^- h_{\min}) - \cos(b_{kn}^- h_{\max}) \right) - \frac{1}{(b_{kn}^+)^4} \times \right. \\ &\times \left. \left(2 \cos(b_{kn}^+ h_c) - \cos(b_{kn}^+ h_{\min}) - \cos(b_{kn}^+ h_{\max}) \right) + \frac{4 y_k \xi_n [h_{\min} h_{\max} - h_c^2]}{(y_k^2 - \xi_n^2)^2} + \right. \\ &\left. + (-1)^{k+n} \frac{y_k (h_{\max}^2 - h_{\min}^2) h_{\min}^3 + h_{\max}^3 - 2 h_c^3}{y_k^2 - \xi_n^2} \right]. \end{aligned}$$

Проаналізуємо залежність потоку маси від значень вхідних параметрів на основі розрахункових формул (14), (15). На рис. 4 показано залежність усередненого дифузійного потоку за нульової (рис. 4а) та ненульової сталої (рис. 4б) початкових концентрацій для різних проміжків $[h_{\min}; h_{\max}]$ у випадку трикутного розподілу товщини включення. Криві 1, 2 на рис. 4 побудовані для інтервалів $[0,1; 0,15]$, $[0,1; 0,45]$ для $D_1/D_0 = 0,01$, криві 3-5 наведено для $[0,1; 0,15]$, $[0,1; 0,25]$, $[0,1; 0,45]$ для $D_1/D_0 = 5$. Криві а на рис. 4б відповідають значенню $\tau = 0,01$, криві б — $\tau = 0,1$ для $c_*/J_* = 0,1$.

Зауважимо, якщо коефіцієнт дифузії домішки у прошарку є менший, ніж у матриці, то збільшення Δh за сталого значення h_{\min} викликає зменшення усередненого потоку (криві 1, 2, рис. 4). Якщо ж коефіцієнт дифузії у матриці

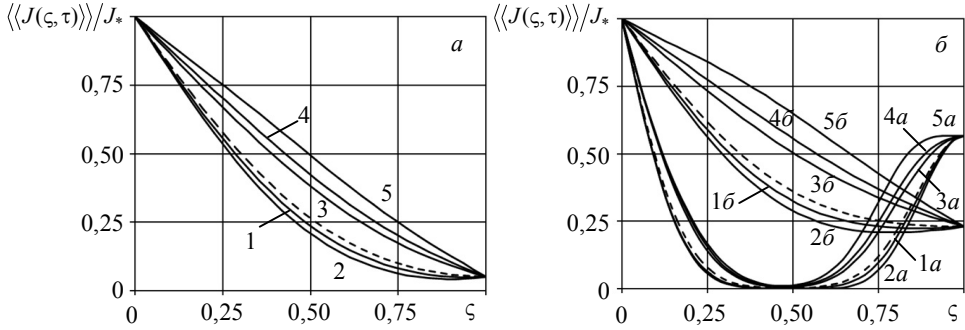


Рис. 4. Усереднені потоки маси за нульової (а) та ненульової сталої (б) початкових концентрацій для трикутного розподілу товщини включення на $[h_{\min}; h_{\max}]$

менший, ніж у включенні, то потік у смузі із прошарком більший, ніж в однорідному тілі, і розширення проміжку $[h_{\min}; h_{\max}]$ за сталого значення h_{\min} збільшує усереднений дифузійний потік (криві 3-5, рис. 4). Зі збільшенням Δh у випадку $D_1/D_0 > 1$ функція $\langle\langle J(\zeta, \tau) \rangle\rangle / J_*$ стає опуклою вгору, причому для ненульової сталої початкової концентрації така поведінка усередненого потоку спостерігається для менших значень Δh (крива 5б, рис. 4б). За ненульової початкової концентрації для малих часів ($\tau < 0,1$) дифузійний потік від межі $\zeta = 0$ спадає, в середині шару є близький до нуля, і стрімко зростає біля межі $\zeta = 1$ (криві а, рис. 4б). Причому для різних значень Δh потоки маси від границі тіла, де підтримується сталий потік, практично співпадають із потоком в однорідній смузі, а від середини шару починають відрізнятися один від одного та від потоку у смузі без прошарків тим більше, чим більша різниця між h_{\min} та h_{\max} (криві а, рис. 4б).

Як і у випадку рівномірного розподілу товщини включення, зміна h_{\min} за сталого значення h_{\max} або зміщення $[h_{\min}; h_{\max}]$ вздовж осі $O\zeta$, так само впливають на поведінку усередненого потоку, що і у разі зміни Δh за сталого значення h_{\min} . Аналогічно зміна інтервалу $[h_{\min}; h_{\max}]$ в околі однієї і тієї ж точки координат практично не змінює значення усередненого дифузійного потоку.

Зазначимо, що для розглянутих типів розподілів товщини прошарку різниця між значеннями усередненого потоку для одних і тих же значень вхідних параметрів становить до 10^{-2} .

Висновки. Розглянуто крайові задачі масоперенесення домішкової речовини для функції потоку маси у двофазній смузі зі стохастично розташованим прошарком випадкової товщини. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого знайдено у вигляді ряду Неймана, що дозволило провести процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз і за випадковою товщиною

включення. Розглянуто випадки, якщо товщина прошарку є випадковою величиною з рівномірним або трикутним розподілами на проміжку $[h_{\min}, h_{\max}]$. Одержано розрахункові формули для усередненого дифузійного потоку за нульової та ненульової сталої початкових концентрацій частинок. Встановлено залежність усередненого дифузійного потоку від характеристик включення. Зокрема, показано, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, зміщення інтервалу ймовірних значень товщини прошарку до 1 призводить до збільшення усередненого дифузійного потоку.

Література

- [1] Журба М. Г. Основы процессов доочистки сточных вод фильтрованием // Тепло- и массообмен в капиллярнопористых телах. — Минск: Наука и техника, 1965. — С. 60-73.
- [2] Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Сівак В. М. Комп'ютерне моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах // Вісник Нац. ун-ту водн. госп. та природокористування. — Вип. 4 (32). — Рівне: НУВГП, 2005. — С. 164-169.
- [3] Ganapathysubramanian B., Zabaras N. Modeling multiscale diffusion processes in random heterogeneous media // Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. — 2008. — Vol. 197. — P. 3560-3573.
- [4] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузі // Доповіді НАН України. — 2012. — № 11. — С. 40-46.
- [5] Чернуха О., Давидок А. Дифузійний потік домішкової речовини у смузі з випадково розташованим прошарком // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 115-126.
- [6] Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Моделювання дифузійних потоків у двофазній багатошаровій випадково неоднорідній смузі за рівномірного розподілу фаз // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2013. — Вип. 11. — С. 142-150.
- [7] Справочник по теории вероятности и математической статистике / В. Корольок, Н. Портенко, А. Скороход, А. Турбин. — Москва: Наука, 1985. — 640 с.
- [8] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ.: Наукова думка, 2009. — 302 с.
- [9] Рытов С., Крайцов Ю., Татарский В. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — Москва: Наука, 1978. — 436 с.
- [10] Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 608 с.
- [11] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва: Наука, 1984. — 831 с.
- [12] Давидок А. Моделювання випадкових потоків маси у двофазній шаруватій смузі за рівномірного розподілу фаз з урахуванням парного взаємовпливу шарів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 19. — С. 43-52.
- [13] Лыков А. В. Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1978. — 480 с.

Modeling random diffusion mass flow in a two-phase strip with a stochastically disposed sublayer of random thickness

Anastasiia Davydok, Olha Chernukha

The flow of admixture substance is studied in a layer with stochastically disposed layered inclusion, which thickness is of random magnitude too. The initial-boundary value problem of diffusion is formulated for the function of admixture particle flow under constant value of the flow on one

body boundary and zero concentration on the other one. The solution is constructed in the form of Neumann series. Procedures for averaging are performed over the ensemble of phase configurations and over the random thickness of the sublayer. Calculation formulae for the averaged mass flow are obtained under zero and nonzero initial concentrations for the cases where the sublayer thickness is a random variable with uniform or triangular distribution on certain interval. Dependence of the flow on physical and geometric parameters of the inclusion is analyzed.

Моделирование случайного диффузионного потока массы в двухфазной полосе со стохастически расположенной прослойкой случайной толщины

Анастасия Давидок, Ольга Чернуха

Исследован поток примесного вещества в слое со стохастически расположенным включением, толщина которого также случайная величина. Краевая задача диффузии сформулирована для функции потока примесных частиц при постоянном значении потока на одной границе тела и нулевой концентрации на другой. Решение построено в виде ряда Неймана. Проведены процедуры усреднения по ансамблю конфигураций фаз и случайной толщины прослойки. Получены расчетные формулы для усредненного потока массы при нулевой и ненулевой постоянной начальных концентраций для случаев, когда толщина прослойки является случайной величиной с равномерным или треугольным распределением на некотором интервале. Проанализирована зависимость потока от физических и геометрических параметров включения.

Отримано 02.04.15