УДК 538.93

Узагальнене рівняння дифузії в статистиці Рені

Петро Костробій[1], Богдан Маркович[2], Олександра Візнович[3], Михайло Токарчук[4]

[1] д. ф.-м. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: petro.kostrobi@gmail.com
[2] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: bogdan_markovych@yahoo.com
[3] Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів
[4] д. ф.-м. н., професор, Інститут фізики конденсованих систем НАН України, вул. Свенціцького, 1, Львів, 79011, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: mtok2010@ukr.net

У рамках статистики Рені методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва отримано узагальнене рівняння дифузії. Усереднення в узагальненому коефіцієнті дифузії виконується за степеневим розподілом з параметром Рені q. Проведено числові оцінки коефіцієнта q- дифузії *у режимах $q > 1$ та $q < 1$.*

Ключові слова: узагальнене рівняння дифузії, нерівноважний статистичний оператор, статистика Рені, аномальна дифузія.

Вступ. Дослідження явищ аномальної дифузії у пористих середовищах (ґрунтах, мембранах, склах, електродах) [1-11], у невпорядкованих системах (перенос заряду в аморфних напівпровідниках) [12, 13], запорошеній плазмі [14-16], турбулентних [17-19] і реакційно-дифузійних процесах [20-22] та ін. Роботи [1, 23] є актуальними у сучасній теоретичній і математичній фізиці. Є наявний значний експериментальний доробок про різні процеси аномальної дифузії, який вказує на те, що не тільки закон поширення, але і форма дифузійного пакету суттєво відрізняється від нормальної дифузії [1, 13, 19, 23]. Для опису аномальної дифузії у різних фізико-хімічних системах були розвинуті підходи зі змінними коефіцієнтами дифузії [24], на основі степеневих кореляцій дробового порядку [25], дробових похідних [17-19], узагальнень рівняння Фоккера-Планка [5, 19, 26], узагальнень статистичної механіки (екстенсивної та неекстенсивної) на основі ентропії Тсалліса [27-29], Рені [27, 30] та ін. На базі проведених досліджень встановлено, що математичною основою аномальної дифузії є рівняння у дробових похідних [1, 19]. Зокрема, у роботах [1, 23, 31], досліджуючи тривимірні моделі аномальної дифузії, вдалося вивести основні рівняння аномальної дифузії із загальних принципів стохастичної теорії випадкових процесів (на основі інтегральних рівнянь Чепмена-Колмогорова для ймовірностей переходу). Розв'язки цих рівнянь утворюють новий клас розподілів, названих дробово-стійкими. Тобто, ці розподіли є розв'язками рівнянь у частинних похідних дробового порядку, які узагальнюють звичайні рівняння дифузії на випадок аномальної дифузії. Частковим випадком дробово-стійких розподілів є розподіл Гауса, що відповідає нормальній дифузії. Важливо зазначити, що отримані рівняння для аномальної дифузії у дробових похідних містять коефіцієнт дифузії як сталу величину в часі та просторі. З іншої сторони, коефіцієнти дифузії зв'язані з часовими кореляційними функціями потік–потік (формули Гріна-Кубо), які містять механізми дифузійного переносу з точки зору нерівноважної статистичної механіки.

У цій роботі розглядається один із шляхів отримання узагальненого (немарковського) рівняння дифузії з використанням методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [32-35] і принципу максимуму ентропії Рені, яка базується на степеневих розподілах. Такі підходи важливі з точки зору математичного моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах [36, 37].

1. Узагальнене рівняння дифузії у статистиці Рені

Для опису дифузійних процесів у класичних газах і рідинах із гамільтоніаном

$$H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2m}+\frac{1}{2}\sum_{j\neq l}^{N}\Phi\left(\left|\vec{r}_{jl}\right|\right) \tag{1}$$

основним параметром скороченого опису є нерівноважна густина числа частинок $n(\vec{r};t)=\left\langle\hat{n}(\vec{r})\right\rangle^{t}$, де $\hat{n}(\vec{r})=\sum_{j=1}^{N}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_j\right)$ — мікроскопічна густина числа частинок; $\vec{r}_j$, $\vec{p}_j$ — вектори координати й імпульсу j-ої частинки, $\Phi\left(\left|\vec{r}_{jl}\right|\right)$ — парний потенціал взаємодії частинок на відстані $\left|\vec{r}_{jl}\right|$. Нерівноважні середні $\int d\Gamma_N\hat{n}(\vec{r})\rho\left(x^N;t\right)=\left\langle\hat{n}(\vec{r})\right\rangle^{t}$ розраховуються з $\rho\left(x^N;t\right)$ — нерівноважним статистичним оператором (функцією розподілу) системи, що задовольняє рівняння Ліувілля $\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x^N;t\right)+iL_N\rho\left(x^N;t\right)=0$, з оператором Ліувілля

$$iL_N=\sum_{j=1}^{N}\frac{\vec{p}_j}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}_j}-\frac{1}{2}\sum_{l\neq j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_j}\Phi\left(r_{lj}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}_j}-\frac{\partial}{\partial\vec{p}_l}\right).$$

У методі нерівноважного статистичного оператора [32-34], коли вибрані основні параметри скороченого опису, $\rho\left(x^N;t\right)$ можна подати (як розв'язок рівняння Ліувілля) в загальній формі з врахуванням проектування:

$$\rho\left(x^N;t\right)=\rho_{rel}\left(x^N;t\right)-\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')\left(1-P_{rel}(t')\right)iL_N\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)dt'. \tag{2}$$

Тут $T(t,t') = \exp_+ \left[-\int_{t'}^{t} \left(1 - \mathrm{P}_{rel}(t')\right) iL_N dt' \right]$ — оператор еволюції у часі з врахуванням проектування; $\exp_+$ — експонента впорядкування, $\mathrm{P}_{rel}(t')$ — узагальнений оператор проектування Кавасакі-Гантона, структура якого залежить від структури $\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)$ — релевантного (функції розподілу) статистичного оператора. $\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)$ будемо шукати на основі підходу праці [35] з екстремуму функціоналу ентропії Рені за фіксованих значень $n(\vec{r};t) = \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t$ та збережені умови нормування $\int d\Gamma_N \rho_{rel}\left(x^N;t'\right) = 1$, в результаті отримаємо:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \beta \left(H - \int d\vec{r} \mu(\vec{r};t) \delta\hat{n}(\vec{r};t) \right) \right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{3}$$

де

$$Z_R(t) = \int d\Gamma_N \left[1 - \frac{q-1}{q} \beta \left(H - \int d\vec{r} \mu(\vec{r};t) \delta\hat{n}(\vec{r};t) \right) \right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{4}$$

— статистична сума релевантної функції розподілу, $\beta = 1/(k_Б T)$, $k_Б$ — константа Больцмана, T — рівноважна температура, $\delta\hat{n}(\vec{r};t) = \hat{n}(\vec{r}) - \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t$ — флуктуації густини, а параметр $\mu(\vec{r};t)$ визначається з умови самоузгодження:

$$\langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t = \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t_{rel}. \tag{5}$$

Важливо зазначити, що при $q = 1$ релевантна функція розподілу (3) у статистиці Рені переходить у розподіл статистики Гіббса [32]. Розподіл (3) можна подати у вигляді:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \beta \left(H - \int d\vec{r} \mu^*(\vec{r};t) \hat{n}(\vec{r}) \right) \right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{6}$$

Тут

$$Z_R(t) = \int d\Gamma_N \left[1 - \frac{q-1}{q} \beta \left(H - \int d\vec{r} \mu^*(\vec{r};t) \hat{n}(\vec{r}) \right) \right]^{\frac{1}{q-1}},$$

$$\mu^*(\vec{r};t) = \frac{\mu(\vec{r};t)}{1 + \frac{q-1}{q} \int d\vec{r} \mu(\vec{r};t) \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle^t}.$$

Підставиши вираз (6) у співвідношення (2), для нерівноважного статистичного оператора отримаємо:

$$\rho(t)=\rho_{rel}(t)+\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}T\left(t,t'\right)\int d\vec{r}' I_n\left(\vec{r}';t'\right)\rho_{rel}(t)\mu^*\left(\vec{r}';t'\right)dt' . \qquad (7)$$

Тут

$$I_n\left(\vec{r};t\right)=\left(1-P(t)\right)\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)iL_N\hat{n}\left(\vec{r}\right) \qquad (8)$$

— узагальнений потік, у якому функція $\psi(t)$ рівна

$$\psi(t)=1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\vec{r}\mu^*\left(\vec{r};t\right)\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right),$$

$P(t)$ — проекційний оператор, що має таку структуру: $P(t)...=$
$=\int d\vec{r}\int d\vec{r}'\left\langle ...\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle_{rel}^{t}\left[\left\langle \hat{n}\left(\vec{r}\right)\delta\left\{\left[q\psi(t)\right]^{-1}\hat{n}\left(\vec{r}'\right)\right\}\right\rangle_{rel}^{t}\right]^{-1}\delta\left\{\left[q\psi(t)\right]^{-1}\hat{n}\left(\vec{r}'\right)\right\}$, $\delta\left\{A\right\}=A-\left\langle A\right\rangle_{rel}^{t}$.

За допомогою нерівноважного статистичного оператора (7) для параметра скороченого опису отримується узагальнене рівняння дифузії:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle^{t}=\int d\vec{r}'\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}\phi_{nn}\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\beta\mu^*\left(\vec{r}';t'\right)dt' , \qquad (9)$$

де $\phi_{nn}\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)=\int d\Gamma_N iL_N\hat{n}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)I_n\left(\vec{r}';t'\right)\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}$ — узагальнене ядро переносу, у якому усереднення виконується зі степеневим розподілом (6). При $q=1$ узагальнене рівняння дифузії в статистиці Рені переходить в узагальнене рівняння статистики Гіббса [32]. У результаті отримуємо немарковське рівняння дифузії

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle^{t}=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\int d\vec{r}'\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}\,'}\beta\mu^*\left(\vec{r}';t'\right)dt' , \qquad (10)$$

$$D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)=\left\langle \hat{\vec{v}}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}'\right)\right\rangle_{rel}^{t}=$$

$$=d\Gamma_N\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}'\right)\frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\vec{r}\mu^*\left(\vec{r};t\right)\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} \qquad (11)$$

— узагальнений коефіцієнт дифузії у статистиці Рені, в якому усереднення виконується зі степеневим розподілом (6), де $\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}\right)=\sum_{j=1}^{N}\vec{v}_j\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_j\right)$ — мікроскопічна густина потоку числа частинок. Важливою задачею є розрахунок узагальненого коефіцієнта дифузії, залежного від параметра Рені q. У марковському наближені у часі та нехтуючи просторовими кореляціями зі співвідношення (10) можна отримати рівняння дифузії, що співпадає з результатами роботи [38]. У цій роботі фактично запропоновано один із шляхів розрахунків коефіцієнта *q*- дифузії й отримано рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{q'}(r;t)=D_{q'}(r;t)\frac{\partial^2}{\partial r^2}G_{q'}(r;t)\,,$$

де $G_{q'}(r;t)$ — функція розсіяння (густина–густина), яка може вимірюватися експериментально у процесах розсіювання нейтронів. Шляхом використання q'-подання експоненти [28, 29] і розрахунків $G_{q'}(r;t)$ через нульовий і другий моменти автори отримали аналітичні вирази для коефіцієнта *q*- дифузії: для $q'>1$

$$\frac{D_{q'}(r;t)}{D}=\frac{q'-1}{2}\frac{N(r;t)}{M(r;t)}\,. \tag{12а}$$

Тут $N(r;t)=\dfrac{r^*}{\sqrt{q'-1}}\dfrac{K_{\nu+1}\left(r^*/\sqrt{q'-1}\right)}{K_{\nu}\left(r^*/\sqrt{q'-1}\right)}-1-2\nu$, $r^*=\dfrac{r}{\sqrt{Dt}}$, $\nu=\dfrac{1}{q'-1}-\dfrac{1}{2}$, $M(r;t)=$ $=1+\dfrac{q'-1}{r^{*2}}(1-2\nu)\big(N(r;t)+1\big)$, K_ν — модифіковані функції Бесселя;
і для $q'<1$

$$\frac{D_{q'}(r;t)}{D}=\frac{1-q'}{2}\frac{N'(r;t)}{M'(r;t)}\,, \tag{12б}$$

де $N'\left(r^*;t\right)=\dfrac{r^*}{\sqrt{1-q'}}\dfrac{J_{\mu+1}\left[r^*/(1-q')\right]}{J_{\mu}\left[r^*/(1-q')\right]}-1$, J_μ — функції Бесселя, $M'\left(r^*;t\right)=-1+$ $+\dfrac{1-q'}{r^{*2}}\left(1-2\mu\right)\left(N'\left(r^*;t\right)+1\right)$, $\mu=\dfrac{1}{1-q'}+\dfrac{1}{2}$.

Параметри q' і q обернено пропорційні: $q'=1/q$, $1-q'=q/(q-1)$. Для дослідження поведінки коефіцієнта *q*- дифузії за аналітичними виразами (12а) та (12б) ми провели числові оцінки для $\dfrac{1}{2}\left\langle\vec r(t-\left(\vec r(0)\right)^2\right\rangle\approx Dt=0{,}5$.

Як бачимо з графіків рис. 1, 2 для $q'>1$, якщо $q'=1{,}05$ $D\left(r^*\right)$ має виражений пік, а для $q'=2$ і $q'=2{,}5$ плавно росте зі збільшенням $r^*=r/\sqrt{Dt}$ (рис. 1). Для $q'<1$ $D\left(r^*\right)$ має осциляційний характер, причому, для $q'=0{,}75=3/4$ вони наростають зі збільшенням $r^*=r/\sqrt{Dt}$ (рис. 2). Поведінку функції розсіяння подано на рис. 3, 4 для різних q' і якісно співпадає з даними роботи [38].

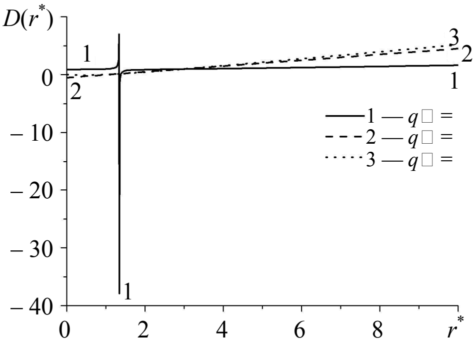

Рис. 1. Залежність $D\left(r^*\right)$
від параметра $r^* = r/\sqrt{Dt}$, якщо $q' > 1$

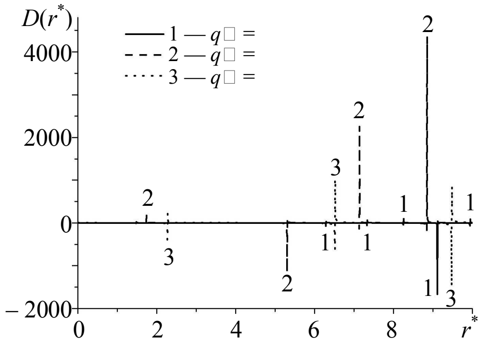

Рис. 2. Залежність $D\left(r^*\right)$
від параметра $r^* = r/\sqrt{Dt}$, якщо $q' < 1$

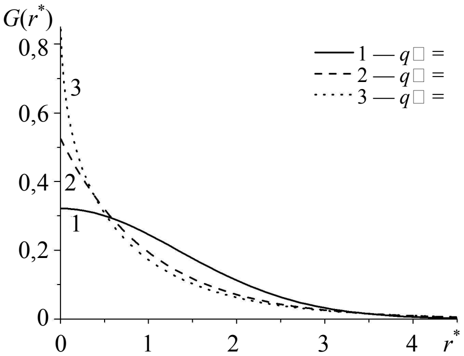

Рис. 3. Залежність функції $G\left(r^*\right)$
від параметра $r^* = r/\sqrt{Dt}$, якщо $q' > 1$

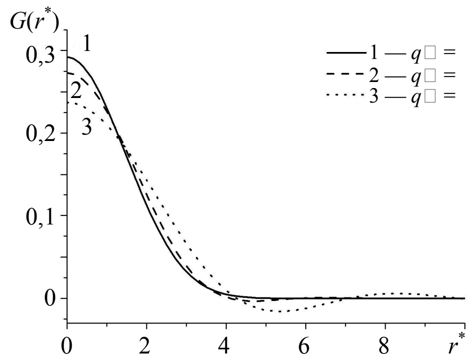

Рис. 4. Залежність функції $G\left(r^*\right)$
від параметра $r^* = r/\sqrt{Dt}$, якщо $q' < 1$

Для $q' = 1$ отримуємо результат для нормальної дифузії [38]. Проведені числові оцінки коефіцієнта *q*- дифузії (у безрозмірній формі, залежності від $r^* = r/\sqrt{Dt}$) якісно вказують на різну поведінку його для $q' > 1$ і $q' < 1$.

Висновки. На основі методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва та принципу максимуму ентропії Рені отримано узагальнене (немарковське) рівняння дифузії, у якому коефіцієнт дифузії розраховується зі степеневим розподілом Рені. Якщо параметри Рені $q = 1$, то отримуємо результат статистики Гібса [32]. Проведені числові оцінки коефіцієнта *q*- дифузії, отриманого у роботі [36] для $q' > 1$ і $q' < 1$ вказують на складну поведінку й очевидно на різні механізми дифузійних (суб- чи супер) процесів, які можуть протікати у системі взаємодіючих частинок. З цієї точки зору важливою задачею є розрахунок узагаліненого коефіцієнта дифузії (11) для конкретних системи за різних значень параметра Рені *q*.

Література

[1] *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Изд. «Артишок», 2008. — 512 с.
[2] *Sahimi M.* Non-linear and non-local transport procesess in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdawn // Phys. Rep. — 1998. — Vol. 306, No 4. — P 213-395.
[3] *Korosak D.* Fractional calculus applied to the analysis of spectral electrical conductivity of clay-water system/ *Korosak D., Cvikl B., Kramer J.* et. al. // J. Contain. Hydrol. — 2007 — Vol. 92. — P 1-9.
[4] *Hobbic R. K., Roth B. J.* Intermediate Physics for Medicine and Biology. — New York: Springer. — 2007. — 542 p.
[5] *Metzler R., Klafter J.* The random walk's quide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. — 2000. — Vol. 339. — P. 1-77.
[6] *Kosztolowicz T.* Measuring subdiffusion paramiters */Kosztolowicz T., Dworecki K., Mrowczynski S.* // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71. — P. 041105(1-11)
[7] *Kosztolowicz T.* Subdiffusive random walk in a membrane system. The genralized method of images approach. — arXiv: 1505.05199 v [cond-mat.stat-mech], 2015. — 22 p.
[8] *Bisquert J.* Doubling exponent models for analysis of porous film electrodes by impedance: Relaxation of TiO2 nanoporous in equeous solution // J. Phys. Chem. B. — 2000. — Vol .104. — P. 2287-2298.
[9] *Bisquert J., Compte A.* Theory of the electrochemical impedanse of anomalous diffusion // J. Electroanal. Chem. — 2001. — Vol. 499. — P. 112-120.
[10] *Kosztolowicz T., Lewandowska K. D.* Hyperbolic subdiffusion impedanse // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42. — P. 055004(1-14).
[11] Models of mass transfer in gas transmission systems / *Ya. D. Pyanylo, M. G. Prytula, N. M. Prytula, N. B. Lopuh* // Math. Model. Comp. — 2014. — Vol. 1. — P. 84-96.
[12] *Berkovich B., Scher H.* Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 57. — P. 5858-5898.
[13] *Bouchaud J. P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications // Phys. Rep. — 1990. — Vol. 195. — P. 127-293.
[14] *Balescu R.* Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51. — P. 4807-4822.
[15] *Tribeche M., Shukla H.* Charging of a dust particle in a plasma with a non extensive electron distribution function // Phys. Plasmas. — 2011. — Vol. 18. — P. 103702(1-4).
[16] *Jindyu G., Du J.* Dust charging processes in the nonequilibrium dsty plasma in nonextensive power-law distribution. — arXiv: 1202.0636. — arxiv.org. — 16 p.
[17] *Монин А. С.* Уравнения турбулентной дифузии // ДАН СССР, сер. геофиз. — 1955. — № 2. — С. 256-259.
[18] *Климонтович Ю. Л.* Введение в физику отрытых систем. — Москва: Янус, 2002. — 284 с.
[19] *Zaslavsky G. M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. — 2002. — Vol. 371. — P. 461-580.
[20] *Gafiychuk V. V., Datsko B. Y.* Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // Phys. Rev. E. — 2007. — Vol. 75. — P. 055201(1-4).
[21] *Kosztolowicz T., Lewandowska K. D.* Time evolution of the reaction front in a subdiffusion system // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 78. — P. 066103(1-11).
[22] *Шкилев В. П.* Субдиффузия смешанного происхождения с химическими реакциями // ЖЭТФ. — 2013. — Т. 144. — С. 1210-1215.
[23] *Учайкин В. В.* Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // Усп. физ. наук. — 2013. — Т. 183, № 1. — С. 1177-1223.
[24] *O'Shaughnessy B., Procaccia I.* Analytical solutions for diffusion on fractal objects // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 54. — P. 544-1675.
[25] *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. — New York: Freeman, 1983. — 468 p.
[26] *Metzler R., Barkai E., Klafter J.* Deriving fractional Fokker-Plank equations from a generalized master equation // Europhys. Lett. — 1999. — Vol. 46. — P. 431-436.

[27] Tsallis and Renyi entropies in fractional diffusion and entropy production / *C. Essex, C. Schulzky, A. Franz, K. H. Hoffmann* // Physica A. — 2000 — Vol. 284. — P. 299-308.
[28] Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications; edited by *S. Abe, Y. Okamoto*. — Heidelberg: Spriger-Verlag, 2001. — 277 p.
[29] Nonextensive Entropy — Interdisciplinary Applications; edited be *M. Gell-Mann, C. Tsallis*. — New York: Oxford Univ. Press, 2004. — 440 p.
[30] Statistical approach to non-Fickian diffusion / *A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, A. Gorenstein* et. al. // Inter. J. Mod. Phys. B.-2006. — Vol. 20, No 28. — P. 4821-4841.
[31] *Учайкин В. В.* Аномальная диффузия и дробно-устойчивые распределения // ЖЭТФ. — 2003. — Т.124, вып. 4(10). — С. 903-920.
[32] *Зубарев Д. Н.* Современные методы статистической теории неравновесных процессов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — Москва: ВИНИТИ, 1980. — Т. 157, — С. 131-226.
[33] *Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Рёпке Г.* Статистическая механика неравновесных процессов. — Москва: Физматлит, 2002. — Том 1. — 295 с.
[34] *Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Рёпке Г.* Статистическая механика неравновесных процессов. — Москва: Физматлит, 2002. — Том 2. — 260 с.
[35] Nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics / *B. B. Markiv, R. M. Tokarchuk, P. P. Kostrobij, M. V. Tokarchuk* // Physica A. — 2011. — Vol. 390. — P. 785-791.
[36] *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ: Наукова думка, 2009. — 303 с.
[37] Математичні моделі та експериментальні дані про поширення радіонуклідів у грунтах / *В. Є. Гончарук, Г. Т. Лянце, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха.* — Львів: Растр-7, 2014. — 243 с.
[38] *Boon I P., Lutsko J. F.* Generalized diffusion equation // Physica A. — 2006. — Vol. 368. — P. 55-62.

Generalized diffusion equation in statistics Renyi

Petro Kostrobij, Bogdan Markovych, Oleksandra Viznovych, Myhaylo Tokarchuk

In the framework of Renyi statistics the generalized diffusion equation is obtained using nonequilibrium statistical operator method by Zubarev. An averaging into generalized diffusion coefficient is carried out by a power-law distribution with Reni parameter q. A numeric estimation of q- diffusion coefficient in regimes q > 1 end q < 1 is performed.

Обобщенное уравнение диффузии в статистике Реньи

Петр Костробий, Богдан Маркович, Александра Визнович, Михаил Токарчук

В рамках статистике Реньи методом неравновесного статистического оператора получено обобщенное уравнение диффузии. Усреднение в обобщенном коэффициенте диффузии выполняется со степенным распределением с параметром Реньи q. Проведены численные оценки коэффициента q- диффузии в режимах q > 1 и q < 1.

Отримано 15.06.15