

Розвиток пластичних смуг в околі тріщин при вершинах квадратного вирізу

Василь Кривень¹, Володимир Валяшек², Андрій Каплун³, Мирослава Яворська⁴

¹ д. ф.-м. н., професор, Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016, e-mail: kryvenv@gmail.com

² к. ф.-м. н., Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016, e-mail: valiashek@gmail.com

³ д. пед. н., Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016, e-mail: v.v.v.v.1960@mail.ru

⁴ к. т. н., доцент, Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016

Отримано аналітичний розв'язок задачі про напружено-деформівний стан тіла з квадратним вирізом і тріщинами на продовженні однієї з його діагоналей. Досліджено розвиток пластичних смуг на продовженні тріщин під квазістатично зростаючим навантаженням. Знайдено залежності довжин пластичних смуг від величини навантаження для довільних співвідношень між стороною квадрата та довжиною тріщини. Проаналізовано вплив вирізу на розвиток пластичних смуг. Тріщини набагато більших довжин ніж сторони квадрата мало впливають на розвиток пластичних смуг. Але за наявності тріщини навіть дуже малої довжини пластичні смуги на їх продовженні розвиваються суттєво інакше, ніж смуги, що починаються від вершин вирізу за відсутності тріщин, що забороняє знехтувати навіть найкоротшими тріщинами, які починаються від вершин вирізу.

Ключові слова: пластичні смуги, квадратний виріз, тріщина, антиплоска деформація, аналітичний розв'язок.

Вступ. Більшість досліджень пружно-пластичного деформування тіл з тріщинами виконано у припущенні про тріщину як математичний розріз: відстань між її берегами вважається нульовою, а береги не взаємодіючими [1, 2]. Таким способом аналізують напружено-деформівний стан за наявності у тілі внутрішніх тріщин. Значно слабше представлені у фаховій літературі дослідження пружно-пластичного деформування в околі тріщин, які з'явилися внаслідок експлуатації елементів конструкцій у місцях високої концентрації напружень [3, 4]. Недостатньо дослідженими залишаються тріщино-подібні концентратори напружень, утворені поверхнями зі скінченною ненульовою відстанню між ними [5].

1. Формулювання задачі

Дослідимо розвиток пластичних смуг при вершинах тріщин, що починаються від двох протилежних ребер квадратної призми, за умов антиплоскої деформації. Вважатимемо, що обидві тріщини мають однакову довжину l і розміщені в площині

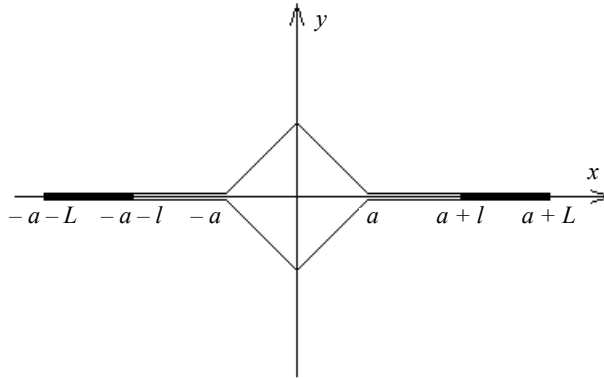


Рис. 1

симетрії призми. Пластичні деформації вважатимемо локалізованими у площині тріщин на їх продовженні, матеріал тіла приймемо ідеально пружно-пластичним. Будемо досліджувати напружено-деформівний стан і розвиток пластичних смуг під дією квазістатичного монотонно зростаючого зсувного навантаження (рис. 1). Тут $\sqrt{2}a$ — ширина грані призми, l — довжина тріщин). Довільність співвідношення між шириною грані вирізу та довжиною тріщин дає можливість прослідкувати вплив форми концентратора напружень на розвиток пластичних смуг: дефект перетворюється у тріщину (математичний розріз), коли ширина грані прямує до нуля, й у призматичний виріз, коли до нуля прямують довжини тріщин.

Сформулюємо задачу в напруженнях для середовища, навантаженого на нескінченності однорідними зсувними напруженнями $\tau_{yz} = \tau_{\infty}; \tau_{xz} = 0$. Внаслідок симетрії задачі розглядатимемо напружено-деформівний стан тільки в області $\mathbf{D} = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y > a\}$. Оскільки поза смугами пластичності середовище перебуває у пружному стані, то складена з компонент тензора напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ($\zeta = x + iy$) є аналітична в області \mathbf{D} . На межі цієї області повинні виконуватися такі умови:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, y > a); \\
 \arg \tau(\zeta) &= -\pi/4 \quad (\zeta = x + iy, 0 < x < a, x + y = a); \\
 \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, a < x < a + l); \\
 |\tau(\zeta)| &= k \quad (\zeta = x, a + l < x < a + L); \\
 \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, x > a + L); \\
 \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) &= \tau_{\infty}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут k — зсувна границя текучості, $d = L - l$ — довжина пластичних смуг.

2. Аналіз і розв'язання задачі

Рівності (1) послідовно виражають симетричність переміщення щодо осі ординат, умову вільності від напружень поверхні призми, умову вільності від напружень берегів тріщини, умову пластичності, антисиметричність переміщення стосовно осі абсцис.

Окрім того, оскільки пластичний стан не повинен досягатися поза пластичними смугами, розв'язок задачі (1) повинен задовольняти умові

$$|\tau(\zeta)| < k \quad (\zeta \in D). \quad (2)$$

Співвідношення (1), (2) визначають конформний образ G області D у разі відображення її функцією $\tau(\zeta)$ (рис. 2). Розріз в області G знаходиться на бісектрисі координатного кута, його глибина $\tau_0 = \max_{\zeta \in BC} \tau_{nz}(\zeta)$, де $\bar{n} = \overline{BC} / |BC|$. Зауважимо, що на межі областей D і G є рівно чотири пари точок (A, B, C, D) , координати яких відомі апіорі. І, отже, для кожного $\tau_\infty \in (0, k)$ існує єдине $\tau_0 \in (0, k)$, для якого відображення $\tau(\zeta)$ існує. Інакше кажучи, кожному рівню навантаження відповідає своє максимальне напруження τ_{nz} на гранях призми, яке слід визначити у процесі розв'язування задачі.

Розв'язання крайової задачі (1), (2) звелось до побудови конформного відображення, наведеного на рис. 2. Будемо його шукати у параметричній формі:

$$\zeta = \zeta(t), \quad \tau = \tau(t) \quad (t \in H), \quad (3)$$

де t — площина допоміжного комплексного параметра, у якій $H = \{t | \text{Im } t > 0\}$ (рис. 3). Пара функцій (3) визначатиме шукане відображення $\tau(\zeta)$, якщо відповідні точки на границях областей D і G матимуть спільний прообраз на межі області H .

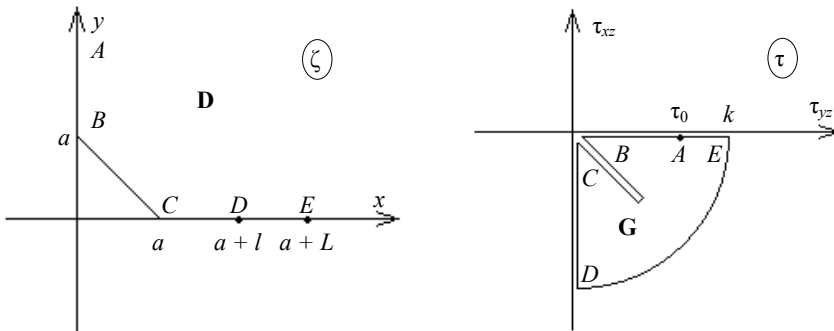


Рис. 2

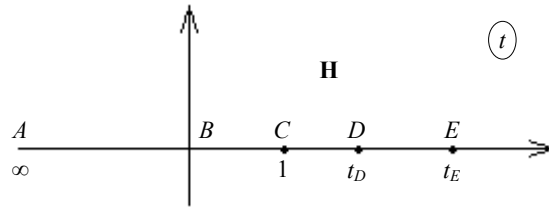


Рис. 3

Забезпечивши вказану відповідність точок А, В, С на границі областей **D** та **H** і скориставшись перетворенням Шварца-Крістофеля, отримуємо:

$$\zeta(t) = ia - \frac{a\sqrt{2}}{\int_0^1 F(\eta) d\eta} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}}, \quad (4)$$

де $F(\eta) = (\eta|1-\eta|)^{-1/4}$. Тут і далі під дробовим степенем комплексної змінної розумітимемо аналітичну функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли її аргумент є дійсний і додатний.

Побудуємо тепер конформне відображення області **H** на область **G**. Точки на межі цих областей А, В, С мають фіксовані координати, глибина розрізу ВКС рівна τ_0 . Потрібне відображення знаходимо композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = \frac{k \sqrt{k^4 - \tau_0^4 - \sqrt{(k^4 - \tau_0^4)^2 - 4k^4 \tau_0^4 \lambda(t)}}}{\sqrt{2} k \tau_0 \sqrt[4]{\lambda^2(t) - 1}}, \quad (5)$$

де $\lambda(t) = \frac{p + (1-2t)q}{p(2t-1) - q}$, $p = \tau_0^2(k^4 + \tau_\infty^4)$, $q = \sqrt{(\tau_0^4 + \tau_\infty^4)(k^8 + \tau_\infty^4 \tau_0^4)}$, $\tau_0 \in (0; k)$.

Функція $\tau(t)$ має таку обернену:

$$t = \frac{p+q}{2p} \frac{(k^4 + \tau_\infty^4) \sqrt{\tau_0^4(k^8 + \tau_\infty^8) + \tau^4(k^8 + \tau_0^8)} + p(k^4 + \tau^4)}{(k^4 + \tau_\infty^4) \sqrt{\tau_0^4(k^8 + \tau_\infty^8) + \tau^4(k^8 + \tau_0^8)} + q(k^4 + \tau^4)}. \quad (6)$$

Зауважимо, що $\tau = \tau_0 \exp(i\pi/4)$ є точка галуження функції $\sqrt{\tau_0^4(k^8 + \tau^8) + \tau^4(k^8 + \tau_0^8)}$ і що ця функція на стороні ВК розрізу області **G** приймає значення, дійсна частина яких є додатною, а на КС їхня дійсна частина є від'ємна.

Оскільки відомо координати точок D і E у площині τ , то за формулою (6), надавши змінній τ значень $-ik$ і k , отримаємо їхні координати t_D і t_E у площині t :

$$t_D = K \frac{m+1}{m-n}, \quad t_E = K \frac{m-1}{m+n},$$

де $K = \frac{1-n}{2}$, $n = -\frac{q}{p}$, $m = \frac{k^4 + \tau_0^4}{2k^2\tau_0^2}$.

Координата t_D точки D у площині **H** залежить від параметра τ_0 — максимального зсувного напруження на грані призми. Беручи до уваги, що координата точки D відома в площині ζ , зі співвідношення (4) отримуємо рівняння для знаходження τ_0 :

$$t_D \int_1^{t_D} F(\eta) d\eta = \frac{l}{\sqrt{2}} \int_0^1 F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Скориставшись його розв'язком, який тут отримано методом послідовних наближень, одержуємо розв'язок крайової задачі (1), (2) у параметричній формі (4), (5).

Оскільки координати початку та кінця пластичної смуги стали відомими у площині t , то за формулою (4) отримуємо довжини $d = L - l$ смуг в одиницях пів діагоналі поперечного перерізу призми:

$$\frac{d}{a} = \sqrt{2} \int_{t_D}^{t_E} F(\eta) d\eta \left(\int_0^1 F(\eta) d\eta \right)^{-1},$$

і в одиницях довжини тріщин

$$\frac{d}{l} = \int_{t_D}^{t_E} F(\eta) d\eta \left(\int_1^{t_D} F(\eta) d\eta \right)^{-1}. \quad (8)$$

Залежності довжини смуги від навантаження для декількох співвідношень між шириною грані призматичного вирізу та довжиною тріщин проілюстровані на рис. 4 (крива зі значком ∞ стосується випадку $a = 0$ [6], штрихова лінія — відсутності тріщин [7]).

Зі збільшенням навантаження пластичні смуги підростають прискорено щодо того, як вони ростуть за відсутності вирізу при вершинах тріщини довжиною $a + l$. Це, можливо, зумовлено впливом вершин вирізу на його вертикальних діагоналях, де напруження є також нульовими, як і у вершинах горизонтальної діагоналі. Таким чином, наявність вирізу спричиняє послаблення поля напружень біля тріщин на певній відстані від неї, внаслідок чого пластична смуга, як зона релаксації напружень, збільшується.

Можна сподіватися, що коли $l \ll a$, пластичні смуги розвиватимуться приблизно так, як в околі кутових точок $x = \pm a, y = 0$ вирізу $|x| + |y| \leq a$, а коли

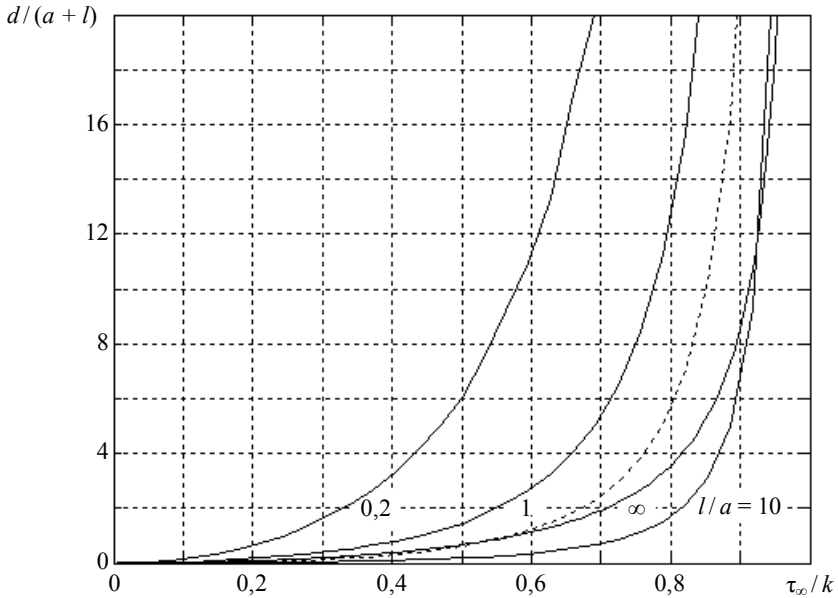


Рис. 4

$l \gg a$ — як в околі вершин тріщини довжиною $2(l + a)$. У цьому зв'язку виникають два питання: чи має границю напружено-деформівний стан розглянутого тіла з вирізом і тріщинами у випадках: 1) $a \rightarrow 0$; 2) $l \rightarrow 0$. І, коли так, то чи дають такі граничні переходи напружено-деформівний стан тіла з тріщиною $|x| \leq a, y = 0$ і тіла з вирізом $|x| + |y| \leq a$.

Зупинимося спочатку на випадку зникаючого вирізу ($a \rightarrow 0$). Аби у функції реалізувати перехід $a \rightarrow 0$, змінимо у площині t координату точки С, поклавши її рівною α ($0 \leq \alpha < 1$). Окрім того, оскільки точка С перестала бути фіксованою, можна зафіксувати точку D: прийmemo $t_D = 1$. І, отже,

$$\zeta(t) = ia - \frac{a\sqrt{2}}{\int_0^\alpha [\eta(\alpha - \eta)]^{-1/4} d\eta} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta - \alpha)}}.$$

Спрямувавши в останній формулі $a \rightarrow 0$ і $\alpha \rightarrow 0$ дістаємо

$$\zeta = l\sqrt{t}. \quad (9)$$

Оскільки у вершинах вирізу обидві компоненти напружень є нульові, то при $a \rightarrow 0$ нульовою буде також границя максимального напруження на гранях вирізу: $\tau_0 \rightarrow 0$. Поклавши у формулі (5) $\tau_0 = 0$, дістаємо:

$$\tau(t) = \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)\sqrt{t^2 - 1} - \sqrt{(k^2 - \tau_\infty^2)t^2 - (k^2 + \tau_\infty^2)}}{2\tau_\infty t}. \quad (10)$$

Із двох останніх формул отримуємо функцію напружень у явному вигляді

$$\tau(\zeta) = k \frac{L\sqrt{\zeta^2 - l^2} - l\sqrt{\zeta^2 - L^2}}{\zeta\sqrt{L^2 - l^2}},$$

де $L = l \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{k^2 - \tau_\infty^2}$, і просту, раніше відому [6] залежність довжини пластичних смуг від навантаження $d = 2l \tau_\infty^2 / (k^2 - \tau_\infty^2)$.

Отже, відповідь на питання, чи можливий граничний перехід у співвідношеннях (4), (5) коли $a \rightarrow 0$, та чи отримується у його результаті напружено-деформівний стан для самої тріщини — позитивна. Зближення залежностей $d(\tau_\infty)$ для вирізу з тріщиною, коли $l \gg a$, і самої тріщини прослідковується на рис. 4.

Аби дати відповідь на друге поставлене запитання про поведінку функції (4), (5), коли $l \rightarrow 0$, попередньо дамо пружний розв'язок вихідної задачі, спрямувавши у співвідношеннях (4), (5) границю текучості k до нескінченності.

Оскільки функція (4) не містить параметра k , то вона залишається незмінною у разі граничного переходу та справедливою також для пружного розв'язку. Функція (6) набуде такого вигляду:

$$t = \frac{\tau_0^2 \sqrt{2} - \sqrt{\tau_\infty^4 + \tau_0^4}}{(\sqrt{2} + 1)\tau_0^2} \frac{\sqrt{\tau^4 + \tau_0^4} + \tau_0^2}{\sqrt{\tau^4 + \tau_0^4} - \sqrt{\tau_\infty^4 + \tau_0^4}} \quad (11)$$

Суттєво спрощується формула для координати t_D точки D у площині t :

$$t_D = \frac{\tau_0^2 \sqrt{2} - \sqrt{\tau_\infty^4 + \tau_0^4}}{(\sqrt{2} + 1)\tau_0^2} \quad (12)$$

і залишиться без зміни рівняння (7), що зв'язує довжину тріщин l з максимальним напруженням на гранях призми τ_0 .

Отже, пружний розв'язок вихідної задачі дають формули (4), (5), у яких параметр τ_0 визначається системою рівнянь (7), (12).

Визначену рівностями (4), (11) залежність τ від t позначимо $\tau^{(e)}(\zeta)$ та дослідимо її асимптотику в околі вершини тріщини $\zeta = a + l$.

Оскільки $\zeta \rightarrow a + l$, якщо $t \rightarrow t_D$, то з формул (11), (12) отримуємо асимптотичну рівність для $t \rightarrow t_D$

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{Q}{\sqrt{t-t_D}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t-t_D}}\right), \quad (13)$$

де $Q = 4\sqrt{\left(\tau_0^2 + \sqrt{\tau_0^4 + \tau_\infty^4}\right)\left[t_D^2\left(\sqrt{\tau_0^4 + \tau_\infty^4} - 3\tau_0^2\right)\right]}$.

В околі точки $t = t_D$ функцію $\zeta(t)$ можна подати так:

$$\zeta(t) = a + l - \frac{a\sqrt{2}}{\int_0^1 F(\eta) d\eta} \frac{t-t_D}{\sqrt[4]{t_D(t_D-1)}} + o(t-t_D). \quad (14)$$

Із формул (13), (14) знаходимо шукану асимптотику функції $\tau^{(e)}(\zeta)$:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = Q \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{\int_0^1 F(\eta) d\eta}} \frac{1}{\sqrt{\zeta - a - l}}.$$

Таким чином порядок сингулярності пружного розв'язку становить у вершинах тріщини величину $1/2$. Разом із тим пружний розв'язок задачі для тіла з квадратним вирізом [7] сингулярний у вершинах вирізу з показником $1/4$. Отже при $l \rightarrow +0$ показник сингулярності пружного розв'язку дорівнює $1/2$, а для $l = 0$ є вдвічі менший. Тому, як функція довжини тріщини, показник сингулярності розривний у точці $l = 0$. Граничний перехід у розв'язку (4), (5) для зникаючої тріщини неможливий для $k = \infty$ (пружний розв'язок) і, звичайно, буде неможливим для довільного значення границі текучості. З формул (4), (5) розв'язок задачі для тіла з квадратним вирізом не можливо отримати в результаті граничного переходу при $l \rightarrow 0$.

Висновки. Отримано аналітичний розв'язок задачі про напружено-деформівний стан тіла з квадратним вирізом і тріщинами на продовженні одної з його діагоналей. Досліджено розвиток пластичних смуг у площині тріщин під квазістатично зростаючим навантаженням. Проаналізовано вплив розміру вирізу на розвиток пластичних смуг і показано, що коли довжина тріщин набагато перевищує довжину сторони квадрата, виріз мало впливає на розвиток пластичних смуг. Разом із тим малі порівняно зі стороною ромба тріщини суттєво змінюють картину розвитку пластичних смуг. Якщо довжина тріщин прямує до нуля, напружено-деформівний стан не зводиться до стану тіла з квадратним вирізом.

Література

- [1] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термпружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими вклученнями: монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [2] Панасюк В. В., Анорейків А. Е., Партон В. З. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4 т. — Т. 1. Основы механики разрушения материалов. — Киев: Наук. думка, 1988. — 488 с.

- [3] Berto F., Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2009. — Vol. 52. — P. 183-194.
- [4] Zappalorto M., Lazzarin P. Analytical study of the elastic-plastic stress fields ahead of parabolic notches under antiplane shear loading // Int J Fract. — 2007. — Vol. 48. — P. 139-154.
- [5] Механіка руйнування: успіхи та проблеми (книга-огляд МКР-8). Підготували: В. В. Панасюк, О. С. Андрейків, Л. М. Лобанов та ін. — Львів: ФМІ, 1994. — 173 с.
- [6] Костров Б. В., Никитин Л. В. Трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной // Прикладная математика и механика. — 1967. — Т. 31, № 2. — С. 334-336.
- [7] Кривень В. А. Антиплоская задача для пружно-идеально-пластичного тела с двопериодической системой ромбических вырезов // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2001. — № 6. — С. 21-24.

Plastic zones development in fractures thresholds at square notch tips

Vasyl Kryven', Vladimir Valiashek, Andriy Kaplun, Miroslava Yavors'ka

Analytical solution of the problem concerning the state of strain-stressed body with square notch and fractures on its bisectrices extension was obtained. Plastic zones development on fractures extension under quasistatically increasing loading were investigated. Dependences of plastic zone lengths on load value for random relations between square side and fracture length were found. The effect of notch on plastic zones development was analyzed. The fractures with sufficiently longer lengths located opposite to square side have little effect on plastic zones development. But if the fractures of even considerably small lengths are present, plastic zones on their extensions develop significantly in a different manner than zones beginning from notch tip without fractures n to neglect even the shortest fractures beginning from the notch tip.

Развитие пластических полос в окрестности трещин при вершинах квадратного выреза

Василь Кривень, Владимир Валяшек, Андрий Каплун, Мырослава Яворська

Получено аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии тела с квадратным вырезом и трещинами на продолжении его биссектрис. Исследовано развитие пластических полос на продолжении трещин под квазистатически возрастающей нагрузкой. Найдены зависимости длин пластических полос от величины нагрузки для произвольных соотношений между стороной квадрата и длиной трещины. Проанализировано влияние выреза на развитие пластических полос. Трещины длин, значительно превышающих сторону квадрата, мало влияют на развитие пластических полос даже очень малой длины трещины, начинающиеся от вершин выреза, существенно влияют на развитие пластических полос.

Представлено професором Р. Мусяєм

Отримано 09.12.14