

Термонапружений стан порожнистої біметалевої кулі за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом

Роман Мусій¹, Наталя Мельник²

¹ д. ф.-м. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: musij@polynet.ua

² Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: melnyk.n.pz@gmail.com

Сформульовано початково-крайову задачу термомеханіки для порожнистої біметалевої кулі за дії імпульсного електромагнітного поля. За визначальні функції вибрано азимутальну компоненту вектора напруженості магнітного поля, температуру та радіальну компоненту вектора переміщення. Запропоновано методику розв'язування відповідних контактних задач електродинаміки, теплопровідності та термонапруженості, яка використовує квадратичну апроксимацію розподілів всіх визначальних функцій за радіальною координатою в кожному складовому шарі. На основі цієї методики вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші на їх інтегральні (сумарні по пакету шарів) характеристики. Отримано загальні розв'язки цих задач за однорідної нестационарної електромагнітної дії, на основі яких записано розв'язки задачі за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом. Чисельно проаналізовано термонапружений стан і несучу здатність кулі залежно від параметрів такої дії.

Ключові слова: термонапружений стан, несуча здатність, біметалева порожниста куля, імпульсна електромагнітна дія, режим з імпульсним модульним сигналом.

Вступ. У сучасних механізмах і пристроях широко використовують кусково-однорідні електропровідні структурні елементи, які перебувають в умовах багатофакторних навантажень. Одним із таких елементів, особливо в електромагнітних перехідниках, є порожниста біметалева куля, що зазнає впливу імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) [1, 2]. Від збереження її несучої здатності залежить надійність роботи відповідних пристроїв [1].

У літературі відомі дослідження термонапруженого стану та несучої здатності однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних ЕМП [3-6] і біметалевого шару та циліндрів [7, 8] за такої дії. Проте недостатньо висвітлено дослідження для порожнистої біметалевої кулі.

У цій роботі розглядається початково-крайова задача термомеханіки для порожнистої біметалевої кулі за дії імпульсного ЕМП і пропонується методика її розв'язування. Досліджується термонапружений стан і несуча здатність розглядуваної кулі за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом (РІМС).

1. Формулювання задачі

Розглядається порожниста біметалева куля з внутрішнім $r = r_0$ і зовнішнім $r = r_2$ радіусами, віднесена до сферичної системи координат (r, φ, θ) , центр O якої співпадає з центром кулі. Матеріали складових шарів кулі однорідні ізотропні неферромагнітні, а їх фізико-механічні характеристики постійні. Куля перебуває за дії нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти $H_\varphi^{(n)}$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)} = \{0; H_\varphi^{(n)}; 0\}$ на її внутрішній і зовнішній поверхнях, які теплоізоляовані від довкілля та вільні від силового навантаження. На поверхні $r = r_1$ з'єднання складових шарів кулі виконуються умови ідеальних електромагнітного, теплового та механічного контактів. Всі визначальні функції задачі — компонента $H_\varphi^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$, температура $T^{(n)}(r, t)$ та відмінна від нуля радіальна компонента $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)} = \{u_r^{(n)}; 0; 0\}$ — функції радіальної координати r і часу t .

Розрахункова схема визначення термонапруженого стану кулі за дії імпульсного ЕМП складається з трьох етапів [9]. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне ЕМП, яке описується вектором $\vec{H}^{(n)}$, та зумовлені ним джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ і пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$ у кожному n -ому ($n = 1, 2$) складовому шарі за врахування заданих граничних і контактних умов. На другому етапі з рівняння теплопровідності, в якому джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ є об'ємними джерелами тепла, визначається нестационарне температурне поле $T^{(n)}$ за конвективного теплообміну з довкіллям і заданих контактних умов. На третьому етапі з рівнянь динамічної термодинаміки за знайденою температурою $T^{(n)}$ та пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$ визначаємо вектор переміщень $\vec{u}^{(n)}$ і тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ за заданих граничних і контактних умов.

Для оцінки несучої здатності кулі визначаємо інтенсивності $\sigma_i^{(n)}$ в n -ому шарі сумарних напружень $\sigma_{jj}^{(n)} = \sigma_{jj}^{(n)Q} + \sigma_{jj}^{(n)F}$ ($j = r, \varphi, \theta$), які обчислюються за формулою $\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)}))} / 2$ [10, 11], і порівнюємо їх величину з межею пружності $\sigma_T^{(n)}$ матеріалу n -ого шару. Тут $\sigma_{jj}^{(n)Q}, \sigma_{jj}^{(n)F}$ — напруження, зумовлені джоулевім теплом $Q^{(n)}$ і пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$, $I_j(\hat{\sigma}^{(n)}) (j = 1, 2)$ — j -ий інваріант тензора напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$. Біметалева куля зберігає несучу здатність, якщо в обох її шарах виконується умова $\sigma_i^{(n)} < \sigma_T^{(n)}$. Згідно вибраної розрахункової схеми розглянемо послідовно визначення ЕМП, температури та термонапруженого стану.

1.1. Визначення ЕМП. Азимутальна компонента $H_{\phi}^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$ в кожному n -ому складовому шарі визначається з рівняння [4, 5, 12]

$$\frac{\partial^2 H_{\phi}^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_{\phi}^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_{\phi}^{(n)}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

за граничних умов на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$H_{\phi}^{(1)}(r_0, t) = H_{\phi}^{-}(t), \quad H_{\phi}^{(2)}(r_2, t) = H_{\phi}^{+}(t)$$

та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні з'єднання шарів кулі

$$H_{\phi}^{(1)}(r_1, t) = H_{\phi}^{(2)}(r_1, t),$$

$$\frac{\partial H_{\phi}^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{H_{\phi}^{(1)}(r_1, t)}{r_1} = k_{\sigma} \left(\frac{\partial H_{\phi}^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{H_{\phi}^{(2)}(r_1, t)}{r_1} \right),$$

а також початкових умов $H_{\phi}^{(n)}(r, 0) = 0$. За знайденою функцією $H_{\phi}^{(n)}(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень $Q^{(n)}(r, t)$ та пондеромоторної сили $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$ визначаються за формулами

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left(\frac{\partial H_{\phi}^{(n)}}{\partial r} + \frac{H_{\phi}^{(n)}}{r} \right)^2, \quad F_r^{(n)} = -\mu_n \left(\frac{\partial H_{\phi}^{(n)}}{\partial r} + \frac{H_{\phi}^{(n)}}{r} \right) H_{\phi}^{(n)}.$$

1.2. Визначення температурного поля. На другому етапі за знайденими питомими густинами джоулевих тепловиділень $Q^{(n)}(r, t)$ визначаємо розподіл температури $T^{(n)}(r, t)$ в кожному n -ому шарі кулі з рівняння теплопровідності [13, 14]

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n}, \quad (2)$$

за крайових умов теплоізоляції на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0$$

та умов ідеального теплового контакту на поверхні з'єднання її складових шарів

$$T^{(1)}(r_1, t) = T^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_{\lambda} \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r},$$

а також за початкових умов $T^{(n)}(r, 0) = 0$.

1.3. Визначення термонапруженого стану. Для визначення відмінних від нуля радіальної $\sigma_{rr}^{(n)}$, азимутальної $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ та меридіанної $\sigma_{\theta\theta}^{(n)}$ компонент тензора динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}(r, t)$ в кожному n -ому шарі кулі за вихідну вибираємо систему рівнянь центрально-симетричної задачі термопружності в переміщеннях [4, 13, 14]. Тоді радіальна компонента $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень в n -ому шарі кулі визначається з рівняння [4]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r^{(n)} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2} = \\ & = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F_r^{(n)} \end{aligned} \quad (3)$$

за крайових умов на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{2}{r_0} u_r^{(1)}(r_0, t) = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t), \\ & \frac{\partial u_r^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{2}{r_2} u_r^{(2)}(r_2, t) = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_2, t), \end{aligned}$$

умов ідеального механічного контакту на поверхні з'єднання її шарів

$$\begin{aligned} & u_r^{(1)}(r_1, t) = u_r^{(2)}(r_1, t), \\ & (1 - \nu_1) \frac{\partial u_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{2}{r_1} u_r^{(1)}(r_1, t) - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) = \\ & = k_E \left[(1 - \nu_2) \frac{\partial u_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{2}{r_1} u_r^{(2)}(r_1, t) - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right], \end{aligned}$$

а також за початкових умов $u_r^{(n)}(r, 0) = 0$, $\frac{\partial u_r^{(n)}(r, 0)}{\partial r} = 0$.

За знайденою компонентою $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень визначаємо компоненти $\sigma_{ij}^{(n)}$ тензора напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ в n -ому шарі кулі за формулами [13, 14]

$$\begin{aligned} & \sigma_{rr}^{(n)} = \frac{E_n}{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)} \left[(1 - \nu_n) \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{2}{r} u_r^{(n)} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (4) \\ & \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \sigma_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{E_n}{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)} \left[\nu_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(n)}}{r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right]. \end{aligned}$$

За відомими сумарними переміщеннями $u_r^{(n)}$ і напруженнями $\sigma_{jj}^{(n)}$ запишемо інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в n -ому шарі кулі, які будуть

$$\sigma_i^{(n)} = \left| \sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\phi\phi}^{(n)} \right|. \quad (5)$$

2.Методика побудови розв'язків початково-крайових задач

Для розв'язування сформульованих початково-крайових задач електродинаміки, теплопровідності та термопружності стосовно визначальних функцій $\Phi^{(n)} = \{H_\phi^{(n)}(r,t), T^{(n)}(r,t), u_r^{(n)}(r,t)\}$ апроксимуємо їх розподіли за радіальною змінною r в n -ому шарі кулі квадратичними многочленами [7,8]

$$\Phi^{(n)}(r,t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{\Phi^{(n)}}(t) r^i. \quad (6)$$

Коефіцієнти $a_i^{\Phi^{(n)}}(t)$ апроксимаційних поліномів (6) визначаємо через інтегральні (сумарні по пакету шарів) характеристики $\Phi_s(t)$ ключових функцій $\Phi^{(n)}(r,t)$

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r,t) r^{s+l} d\gamma, \quad s=1,2 \quad (7)$$

та задані крайові умови на внутрішній і зовнішній поверхнях і на поверхні з'єднання шарів. Тут $l=0$ для визначення $H_\phi^{(n)}(r,t)$, $T^{(n)}(r,t)$ і $l=1$ для визначення $u_r^{(n)}(r,t)$. Для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(t)$ вихідні рівняння (1)-(3) інтегруємо відповідно до співвідношення (7) за врахування виразів (6). В результаті вихідні початково-крайові задачі на ключові функції зведено до відповідних задач Коші на інтегральні характеристики цих функцій, які описуються системами рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dH_1(t)}{dt} - d_1 H_1(t) - d_2 H_2(t) = d_3 H_j^-(t) + d_4 H_j^+(t), \\ \frac{dH_2(t)}{dt} - d_5 H_1(t) - d_6 H_2(t) = d_7 H_j^-(t) + d_8 H_j^+(t), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} + d_1^T T_1 + d_2^T T_2 = Q_1^*(t), & \frac{d^2 u_{r1}}{dt^2} - d_1^* u_{r1} - d_2^* u_{r2} = W_1^*(t), \\ \frac{dT_2}{dt} + d_3^T T_1 + d_4^T T_2 = Q_2^*(t), & \frac{d^2 u_{r2}}{dt^2} - d_6^* u_{r1} - d_7^* u_{r2} = W_2^*(t), \end{cases}$$

і розв'язуються за відповідних початкових умов із використанням перетворення Лапласа. Тут коефіцієнти $d_{1\div 8}$, $d_{1\div 4}^T$, $d_{1\div 4}^*$ визначаються через геометричні параметри та фізико-механічні характеристики складових шарів кулі, $Q_s^*(t)$, $W_s^*(t)$ ($s = 1, 2$) — праві частини рівнянь (2) та (3), зінтегровані відповідно до співвідношення (7) з урахуванням виразів $T^{(n)}$ і $F_r^{(n)}$ на поверхні з'єднання шарів.

Розв'язки задач Коші (8) записуємо у вигляді згорток заданих крайових умов та однорідних розв'язків. Отримуємо вирази компоненти $H_\phi^{(n)}(r, t)$

$$H_\phi^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 a_{is}^{(n)} \sum_{k=10}^2 \int_0^t [A_{s1}(k)H_j^-(\tau) + A_{s2}(k)H_j^+(\tau)] e^{p_k(t-\tau)} d\tau + a_{i3}^{(n)}H_j^-(t) + a_{i4}^{(n)}H_j^+(t) \right\} r^i, \quad (9)$$

температури $T^{(n)}(r, t)$ та складників $u_r^{(n)Q}(r, t)$ і $u_r^{(n)F}(r, t)$ радіальної компоненти $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$

$$T^{(n)}(r, t) = \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^2 \left(b_{ks}^{(n)} \sum_{m=1}^2 \int_0^t [B_{s1}(m)W_1^Q(\tau) + B_{s2}(m)W_2^Q(\tau)] e^{p_m(t-\tau)} d\tau \right) r^k, \quad (10)$$

$$u_r^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 c_{is}^{(n)} \sum_{\beta=1}^4 \int_0^t [R_{s1}^*(k)W_1^*(\tau) + R_{s2}^*(k)W_2^*(\tau)] e^{p_\beta(t-\tau)} d\tau \right\} r^i, \quad (11)$$

де p_k , p_m , p_β — корені відповідних характеристичних рівнянь задач електродинаміки, теплопровідності та термопружності.

За відомими виразами (11) функцій $u_r^{(n)}(r, t)$ зі співвідношень (4), (5) визначаємо радіальні $\sigma_{rr}^{(n)}$, азимутальні $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$ і меридіанні $\sigma_{\theta\theta}^{(n)}$ компоненти тензора напружень та інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$.

3. Розв'язки задачі за електромагнітної дії в РІМС

Електромагнітна дія в РІМС математично описується значенням функції $H_\phi^\pm(t)$ у вигляді [3, 6] $H_\phi^\pm(t) = k_0 H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}) \cos(\omega t)$. Тут k_0 — нормувальний множник, β_1, β_2 — параметри, що характеризують часи фронтів наростання t_{iner} і спадання t_{dekr} модульованого імпульсу тривалості t_i , H_0 — амплітуда синусоїдальних несучих електромагнітних коливань частоти ω . Для зручності математичних перетворень подаємо функцію $H_\phi^\pm(t)$ у комплексній формі [7]

$$H_\phi^\pm(t) = \frac{k_0 H_0}{2} \left(e^{(i\omega - \beta_1)t} - e^{(i\omega - \beta_2)t} + e^{-(i\omega + \beta_1)t} - e^{-(i\omega + \beta_2)t} \right), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (12)$$

Підставляючи вираз (12) у формули (9)-(11), записуємо розв'язки задачі термомеханіки для розглядуваної кулі. Отримуємо вирази компоненти $H_\phi^{(n)}(r, t)$

$$H_\phi^{(n)}(r, t) = \frac{k_0 H_0}{2} \sum_{i=0}^2 \left(e^{-(\beta_1 - i\omega)t} B_{i1}^{(n)} + e^{-(\beta_2 - i\omega)t} B_{i2}^{(n)} + e^{-(\beta_1 + i\omega)t} B_{i3}^{(n)} + e^{-(\beta_2 + i\omega)t} B_{i4}^{(n)} + e^{p_1 t} B_{i5}^{(n)} + e^{p_2 t} B_{i6}^{(n)} \right) r^i,$$

питомих густин джоулевого тепла та пондеромоторних сил

$$Q^{(n)}(r, t) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \sum_{l=1}^{20} C_{ijl}^{(n)} e^{\alpha_l t} r^{i+j-2},$$

$$F_r^{(n)}(r, t) = -\mu_n \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1) \sum_{l=1}^{20} C_{ijl}^{(n)} e^{\alpha_l t} r^{i+j-1},$$

температури

$$T^{(n)}(r, t) = \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{p=0}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \sum_{l=1}^{20} M_{ijlm}^{(n)} \frac{e^{p_m t} - e^{\alpha_l t}}{p_m - \alpha_l} r^p,$$

складника $u_r^{(n)Q}(r, t)$ та складника $u_r^{(n)F}(r, t)$

$$u_r^{(n)Q}(r, t) = \sum_{\alpha=0}^2 \left[c_{\alpha 1}^{(n)Q} u_{r1}^Q(t) + c_{\alpha 2}^{(n)Q} u_{r2}^Q(t) + c_{\alpha 3}^{(n)Q} T^{(1)}(r_0, t) + c_{\alpha 4}^{(n)Q} T^{(2)}(r_2, t) + c_{\alpha 5}^{(n)Q} N_0^Q(r_1, t) \right] r^\alpha,$$

$$u_r^{(n)F}(r, t) = \sum_{\alpha=0}^2 \left[c_{\alpha 1}^{(n)F} u_{r1}^F(t) + c_{\alpha 2}^{(n)F} u_{r2}^F(t) \right] r^\alpha$$

радіальних переміщень. Тут коефіцієнти $B_{ij}^{(n)}$, $C_{ijl}^{(n)}$, $M_{ijlm}^{(n)}$, N_{sijl} , B_{sjm} , $P_{s\alpha q}$, $R_{s\beta k}^Q$, $R_{s\beta k}^F$, g_{ps} , f_{sij} , γ_s , $K_{\alpha E}$, $c_{0f}^{(n)}$, $b_{ij}^{(n)}$, $c_{ms}^{(n)F}$ подаються через геометричні та фізико-механічні параметри кулі, $N_0^Q(r_1, t) = K_{\alpha E} T^{(1)}(r_1, t)$,

$$u_{rs}^Q(t) = \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{\beta=1}^4 \sum_{p=0}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \sum_{l=1}^{20} \frac{1}{p_m - \alpha_l} \left(\frac{e^{p_m t} - e^{p_\beta t}}{p_m - p_\beta} - \frac{e^{\alpha_l t} - e^{p_\beta t}}{\alpha_l - p_\beta} \right) \times$$

$$\times \left\{ R_{s\beta 1}^Q \left[d_3^Q M_{ijlm}^{(1)} r_0^p + d_4^Q M_{ijlm}^{(2)} r_2^p + d_5^Q M_{ijlm}^{(1)} K_{\alpha E} r_1^p - p \left(g_{p11} M_{ijlm}^{(1)} + g_{p12} M_{ijlm}^{(2)} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + R_{s\beta 2}^Q \left[d_8^Q M_{ijlm}^{(1)} r_0^p + d_9^Q M_{ijlm}^{(2)} r_2^p + d_{10}^Q M_{ijlm}^{(1)} K_{\alpha E} r_1^p - p \left(g_{p21} M_{ijlm}^{(1)} + g_{p22} M_{ijlm}^{(2)} \right) \right] \right\},$$

$$u_{rs}^F(t) = -\frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{\beta=1}^4 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1) \sum_{l=1}^{20} \frac{e^{\alpha_l t} - e^{p_\beta t}}{\alpha_l - p_\beta} \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 R_{s\beta m}^F \frac{\mu_p}{\rho_p} q_{mp} C_{ijl}^{(p)}, \quad s = 1, 2.$$

4. Числовий аналіз задачі за електромагнітної дії в РІМС

Дослідження проведено для кулі з радіусами поверхонь $r_0 = 8$ мм, $r_1 = 9$ мм, $r_2 = 10$ мм, складові шари якої виготовлені зі сталі Х18Н9Т та міді. Характеристики модульного імпульсу рівні $t_i = 10^{-4}$ с, 10^{-3} с, 10^{-2} с, $\beta_1 = 6,9/t_i$, $\beta_2 = 2\beta_1$, $k_0 = 2,5$, $\sigma_d = 300$ МПа — для сталі та $\sigma_d = 70$ МПа — для міді [15].

Термонапружений стан і несучу здатність розглядуваної кулі чисельно проаналізовано за частоти несучих електромагнітних коливань ω поза околom резонансних $\omega \neq \omega_{rs}$ ($s = 1, 2$ — порядок резонансної частоти) та на першій резонансній частоті при $\omega = \omega_{r1}$.

На рис. 1 проілюстровано зміну в часі радіальних $\sigma_{rr}^{(n)}$ і азимутальних $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ напружень за частоти $\omega = 4,44 \cdot 10^5$ 1/с поза околom резонансних частот. На рис. 2, 3 показано зміну в часі складників $\sigma_{jj}^{(n)Q}$ і $\sigma_{jj}^{(n)F}$ ($j = r, \varphi$) на серединній поверхні кожного складового шару за першої резонансної частоти $\omega = \omega_{r1}$. На рис. 4 подано залежності максимальних значень інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)\max}$ у складових

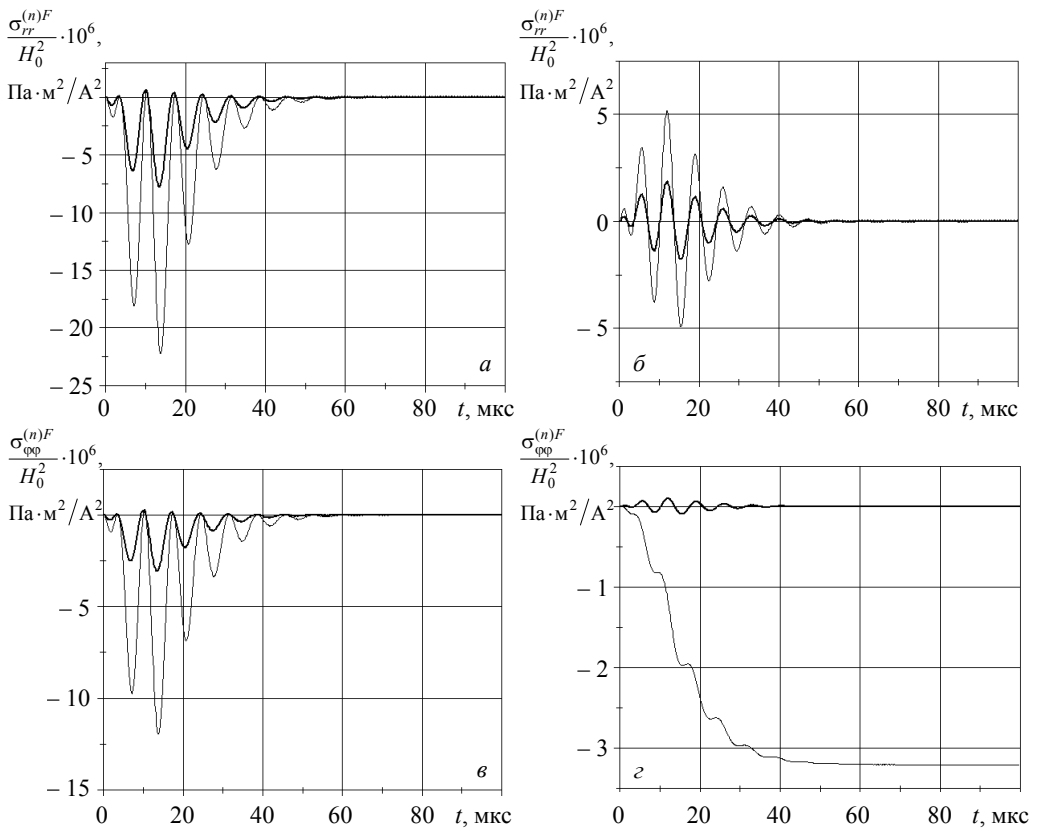


Рис. 1. Зміна в часі радіальних (а, б) й азимутальних (в, г) напружень за частоти $\omega = 4,44 \cdot 10^5$ 1/с (поза околom резонансних частот)

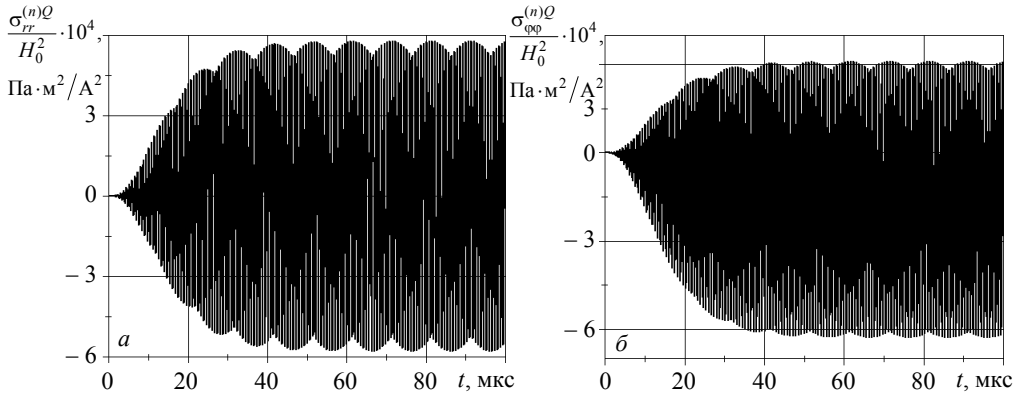


Рис. 2. Зміна в часі складників $\sigma_{rr}^{(n)Q}$ і $\sigma_{\phi\phi}^{(n)Q}$ радіальних (а) й азимутальних (б) напружень

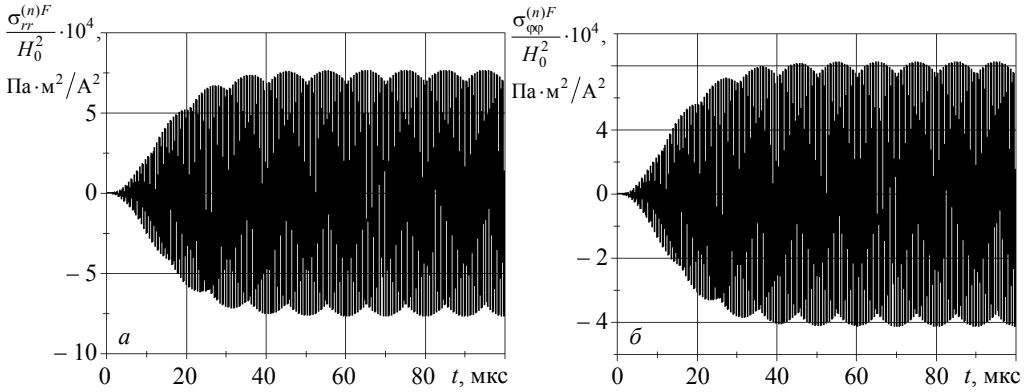


Рис. 3. Зміна в часі складників $\sigma_{rr}^{(n)F}$ і $\sigma_{\phi\phi}^{(n)F}$ радіальних (а) й азимутальних (б) напружень

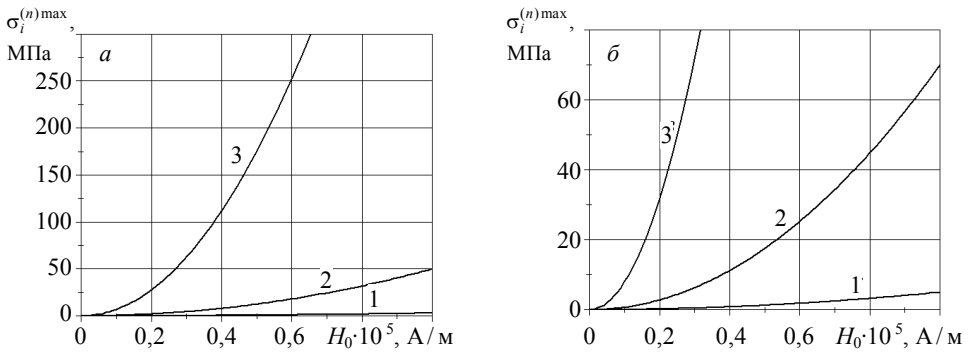


Рис. 4. Залежність максимальних значень інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)\max}$ у сталевому (а) та мідному (б) складових шарах кулі від величини H_0

шарах кулі від величини H_0 . Лінії 1-3 відповідають тривалостям модульного імпульсу $t_i = 10^{-4}\text{с}$, 10^{-3}с , 10^{-2}с . Отримано, що за частоти $\omega \neq \omega_{rs}$ несуча здатність розглядуваної кулі зберігається за тривалостей модульного імпульсу в межах $10^{-4}\text{с} \leq t_i \leq 10^{-2}\text{с}$, а за частоти $\omega = \omega_{r1}$ несуча здатність кулі втрачається при $t_i = 10^{-3}\text{с}$, оскільки вона втрачається в мідному шарі, хоча несуча здатність сталевому шару ще зберігається.

Висновки. Квадратична апроксимація розподілів всіх визначальних функцій розглядуваної задачі термомеханіки за радіальною координатою в кожному шарі кулі дала можливість точно врахувати в розв'язках складових контактних задач електродинаміки, теплопровідності і термопружності всі задані крайові умови як на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі, так і на поверхні з'єднання її шарів. Вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші на їх інтегральні характеристики, розв'язки яких знайдено з допомогою перетворення Лапласа у вигляді згорток заданих крайових умов та однорідних розв'язків для довільної однорідної нестационарної електромагнітної дії на всьому часовому проміжку її зміни. На основі запропонованої методики записано розв'язки задачі за електромагнітної дії в РІМС у вигляді зручних для числового аналізу аналітичних виразів. Встановлено закономірності термомеханічної поведінки розглядуваної кулі і критичні значення її параметрів за такої дії.

Література

- [1] Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хименко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. — Харьков: МОСТ – Торнадо, 2003. — 288 с.
- [2] Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение; под ред. Ф. Херлаха. — Москва: Мир, 1988. — 456 с.
- [3] Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій П. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 75-84.
- [4] Мусій П. С. Напружений стан електропровідної кулі за електромагнетної дії з імпульсним модульним сигналом // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* — 2010. — Т. 6, № 6. — С. 76-81.
- [5] Мусій П. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. — Львів: Вид-во «Растр-7», 2010. — 216 с.
- [6] Гачкевич О. Р., Мусій П. С., Тарлаковський Д. В. Термомеханіка неферромагнетних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнетних полів з модуляцією амплітуди. — Львів: СПОЛЮМ, 2011. — 216 с.
- [7] Rearing capability of bimetallic plate at effect of pulse electromagnetic field with amplitude modulation / O. Hachkevych, R. Musij, N. Melnyk, J. Szymczak // *Optimization of manufacturing processes and work environment; ed. by M. Gajek / Studia i monografie z. 276. Ch. 6.* — Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2010. — P. 57-70.
- [8] Термонапруженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях / P. С. Мусий, Н. Б. Мельник, P. Ф. Терлецкий, И. Шимчак // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2013. — № 6(52). — С. 89-98.
- [9] Прогнозування несучої здатності біметалевих циліндрів за імпульсних електромагнітних дій / О. Р. Гачкевич, P. С. Мусій, Н. Б. Мельник, Й. Шимчак // *Матеріали міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки», Дніпродзержинськ (15-18 квітня 2013).* — Ч. 2. — С. 4-6.
- [10] Ионов В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. — Москва: Высшая школа, 1975. — 463 с.

- [11] Лурье А. И. Теория упругости. — Москва: Наука, 1970. — 940 с.
- [12] Тамм И. Е. Основы теории электричества. — Москва: Наука, 1976. — 616 с.
- [13] Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. — Киев: Наукова думка, 1976. — 312 с.
- [14] Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. — Москва: Машиностроение, 1984. — 184 с.
- [15] Баженков В. Г., Петров М. В. О применении магнитоимпульсного способа деформирования для исследования вязкопластических характеристик материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. ун-та. — 1980. — С. 18-25.

Thermostressed state of bimetallic hollow ball subjected to electromagnetic action under the mode of impulse modulating signal

Roman Musij, Nataliya Melnyk

The initial-boundary value problem of thermomechanics of bimetallic hollow ball subjected to the actions of pulse electromagnetic field has been formulated. The azimuthal component of the vector of magnetic field, temperature and radial component of the displacement vector have been selected as key functions. A method of solving the corresponding contact problems of electrodynamics, heat conductivity and thermoelasticity, using a quadratic approximation of distributions of the key functions by the radial coordinate in each composite layer has been proposed. Being based on this methodology, the initial boundary value problems for the key functions are reduced to the Cauchy problem for their integral (total for a package of layers) characteristics. The general solutions for these problems have been obtained for homogeneous nonstationary electromagnetic action, on the base of which the solutions for the problem of electromagnetic action mode with impulse modulating signal are written down. Numerical analysis of the thermostressed state and balls carrying capacity depending on the parameters of such action has been carried out.

Термонапряженное состояние полого биметаллического шара при электромагнитном воздействии в режиме с импульсным модулирующим сигналом

Роман Мусий, Наталия Мельник

Сформулирована начально-краевая задача термомеханики для полого биметаллического шара под воздействием импульсного электромагнитного поля. Ключевыми функциями являются азимутальная компонента вектора напряженности магнитного поля, температура и радиальная компонента вектора перемещений. Предложена методика решения соответствующих контактных задач электродинамики, теплопроводности и термоупругости, использующая квадратичную аппроксимацию распределений всех определяющих функций по радиальной координате в каждом составном слое. На основе этой методики исходные начально-краевые задачи на определяющие функции сведены к задачам Коши на их интегральные (суммарные по пакету слоев) характеристики. Получены общие решения этих задач для однородного нестационарного электромагнитного воздействия, на основе которых записаны решения задачи для электромагнитного воздействия в режиме с импульсным модулирующим сигналом. Численно проанализированы термонапряженное состояние и несущая способность шара в зависимости от параметров такого воздействия.

Отримано 30.03.15