УДК 519.6

Ітераційний метод розв'язування системи поліноміальних рівнянь другого степеня

Анастасія Недашковська

К. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів

Системи нелінійних алгебричних рівнянь мають широке практичне застосування. Зазвичай, такі системи розв'язують за допомогою ітераційних методів, які ґрунтуються на розкладі нелінійного функціоналу в ряд Тейлора в околі розв'язку. Однак ці методи потребують досить точного задання початкового наближення, а також практично неможливо перевірити виконання умов збіжності заздалегідь. У цій роботі запропоновано новий перспективний метод розв'язування систем поліноміальних рівнянь другого степеня з багатьма невідомими. Отримано рекурентні співвідношення для знаходження наближених розв'язків поліноміальних рівнянь над полем дійсних чисел. Досліджено збіжність операторних ланцюгових дробів, що використовуються в обчислювальній схемі та наведено деякі їх властивості, проведено чисельні експерименти, що підтверджують ефективність методу.

Ключові слова: ітераційний метод, поліноміальні рівняння, збіжність, операторні ланцюгові дроби.

Вступ. Системи нелінійних алгебричних рівнянь мають широке практичне застосування, зокрема до їх розв'язування зводяться деякі задачі аналітичної геометрії, безумовної мінімізації, задачі фізики ядра, конденсованих середовищ, елементарних часток та інші. Одним із можливих варіантів розв'язування таких систем є ітераційні методи, які ґрунтуються на розкладі нелінійного функціоналу в ряд Тейлора в околі розв'язку. Однак ці методи потребують досить точного задання початкового наближення, а також практично неможливо перевірити виконання умов збіжності заздалегідь. Окрім того, ці методи важко узагальнити для випадку нелінійних матричних рівнянь. Тому й виникла потреба у застосуванні інших схем розв'язування систем поліноміальних рівнянь.

У пропонованій роботі зосередимо свою увагу на розв'язуванні систем рівнянь другого степеня.

1. Обчислювальна схема методу

Розглянемо систему n рівнянь другого степеня, що задані над полем дійсних чисел

$$\begin{aligned}&a_{i,200\ldots0}x_1^2 + a_{i,110\ldots0}x_1x_2 + a_{i,101\ldots0}x_1x_3 + \ldots + a_{i,100\ldots1}x_1x_n + a_{i,020\ldots0}x_2^2 + \\ &a_{i,011\ldots0}x_2x_3 + \ldots + a_{i,010\ldots1}x_2x_n + a_{i,002\ldots0}x_3^2 + \ldots + a_{i,001\ldots1}x_3x_n + \ldots + a_{i,000\ldots2}x_n^2 \\ &+a_{i,100\ldots0}x_1 + a_{i,010\ldots0}x_2 + a_{i,001\ldots0}x_3 + \ldots + a_{i,000\ldots1}x_n + a_{i,000\ldots0} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Систему (1) можна подати у вигляді

$$\left(a_{i,200\ldots0}x_1+\frac{1}{2}a_{i,110\ldots0}x_2+\frac{1}{2}a_{i,101\ldots0}x_3+\ldots+\frac{1}{2}a_{i,100\ldots1}x_n+a_{i,100\ldots0}\right)x_1+$$
$$\left(\frac{1}{2}a_{i,110\ldots0}x_1+a_{i,020\ldots0}x_2+\frac{1}{2}a_{i,011\ldots0}x_3+\ldots+\frac{1}{2}a_{i,010\ldots1}x_n+a_{i,010\ldots0}\right)x_2+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2}a_{i,100\ldots1}x_1+\frac{1}{2}a_{i,010\ldots1}x_2+\frac{1}{2}a_{i,001\ldots1}x_3+\ldots+a_{i,000\ldots2}x_n+a_{i,000\ldots1}\right)x_n=$$
$$=-a_{i,000\ldots0},\qquad i=\overline{1,n}$$

або

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \ldots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_{1,000\ldots0}\\ a_{2,000\ldots0}\\ \vdots\\ a_{n,000\ldots0}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

де

$$\tilde{a}_{i1}=\left(a_{i,200\ldots0}x_1+\frac{1}{2}a_{i,110\ldots0}x_2+\frac{1}{2}a_{i,101\ldots0}x_3+\ldots+\frac{1}{2}a_{i,100\ldots1}x_n+a_{i,100\ldots0}\right),$$
$$\tilde{a}_{i2}=\left(\frac{1}{2}a_{i,110\ldots0}x_1+a_{i,020\ldots0}x_2+\frac{1}{2}a_{i,011\ldots0}x_3+\ldots+\frac{1}{2}a_{i,010\ldots1}x_n+a_{i,010\ldots0}\right),\ldots$$
$$\tilde{a}_{in}=\left(\frac{1}{2}a_{i,100\ldots1}x_1+\frac{1}{2}a_{i,010\ldots1}x_2+\frac{1}{2}a_{i,001\ldots1}x_3+\ldots+a_{i,000\ldots2}x_n+a_{i,000\ldots1}\right),\ i=\overline{1,n}\,.$$

Введемо такі позначення:

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{1,200\ldots0} & \frac{1}{2}a_{1,110\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1,100\ldots1}\\ a_{2,200\ldots0} & \frac{1}{2}a_{2,110\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2,100\ldots1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,200\ldots0} & \frac{1}{2}a_{n,110\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{n,100\ldots1}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a_{1,110\ldots0} & a_{1,020\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1,100\ldots1}\\ \frac{1}{2}a_{2,110\ldots0} & a_{2,020\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2,100\ldots1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2}a_{n,110\ldots0} & a_{n,020\ldots0} & \cdots & \frac{1}{2}a_{n,110\ldots0}\end{pmatrix},\ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{1,100\ldots1} & \frac{1}{2}a_{1,010\ldots1} & \cdots & a_{1,000\ldots2} \\ \frac{1}{2}a_{2,100\ldots1} & \frac{1}{2}a_{2,010\ldots1} & \cdots & a_{2,000\ldots2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n,100\ldots1} & \frac{1}{2}a_{n,010\ldots1} & \cdots & a_{n,000\ldots2} \end{pmatrix},$$

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,100\ldots0} & a_{1,010\ldots0} & \cdots & a_{1,000\ldots1} \\ a_{2,100\ldots0} & a_{2,010\ldots0} & \cdots & a_{2,000\ldots1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,100\ldots0} & a_{n,010\ldots0} & \cdots & a_{n,000\ldots1} \end{pmatrix}, \qquad b = -\begin{pmatrix} a_{1,000\ldots0} \\ a_{2,000\ldots0} \\ \vdots \\ a_{n,000\ldots0} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність (2) можна записати інакше:

$$\left(A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + A_{n+1}\right)\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} = b\,. \tag{3}$$

Окрім того, запис $\left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}}$ позначатиме функціонал $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i$, тоді рівність (3) можна подати у вигляді

$$\left(\left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} + A_{n+1}\right)\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} = b\,. \tag{4}$$

Припустимо тепер, що матриця $\left(\left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} + A_{n+1}\right)$ є невироджена, тоді зі співвідношення (4) отримаємо

$$\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} = \left(\left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} + A_{n+1}\right)^{-1} b\,. \tag{5}$$

Нехай $\mathbf{A}$ — деяка дійсна невироджена квадратна матриця розмірності $m\times m$, вектор $\mathbf{f}$ — вектор розмірності m над полем дійсних чисел. Операцію $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$ іноді для зручності будемо позначати, як $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{A}}$. Тоді співвідношення (5) також можемо записати так:

$$\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} = \frac{b}{A_{n+1} + \left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}}}\,. \tag{6}$$

З використанням формули (6) розв'язок можна записати у вигляді такого ланцюгового дробу

$$\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\right)^{\mathrm{T}} = \frac{b|}{|A_{n+1}} + \left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\frac{b|}{|A_{n+1}} + \left(A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n\right)\circ\frac{b|}{|A_{n+1}} + \ldots \tag{7}$$

у компактній формі запису Прінгсгейма.

З урахуванням рівності (5), можемо записати рекурентну формулу для обчислення наближеного розв’язку системи (1):

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + A_{n+1} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,000\dots0} \\ a_{2,000\dots0} \\ \vdots \\ a_{n,000\dots0} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,\dots \tag{8}$$

Для збіжності ітераційного процесу (8) необхідною є збіжність операторного ланцюгового дробу (7).

Для того, щоб переконатися у збіжності (7), зупинимося детальніше на питаннях збіжності ланцюгових дробів.

2. Збіжність операторних ланцюгових дробів

Останнім часом для багатьох прикладних задач одержані перспективні, щодо кількості арифметичних операцій або за іншими критеріями, формальні алгоритми, які подають розв’язок у вигляді операторного ланцюгового дробу з матричними елементами. Але реальне їх застосування неможливе без ретельного аналізу збіжності, обчислювальної стійкості та інших характеристик.

Далі будуть розглянуті деякі властивості операторних ланцюгових дробів. Як і у випадку гіллястих ланцюгових дробів для аналізу збіжності передусім треба отримати формулу різниці між підхідними дробами.

Нехай $P_i(1,2,\dots)$ — прямокутні матриці розмірності $m\times mn$, $b_i(i=1,2\dots)$ — вектори розмірності n $A_i(1,2,\dots)$ — квадратні матриці розмірності $m\times m$, що задані над полем дійсних чисел. Введемо позначення

$$\begin{cases} D_1 = P_1 \circ A_1^{-1} b_1 = P_1 \circ \dfrac{b_1|}{|A_1}; \\ D_2 = P_1 \circ \left(A_1 + P_2 \circ A_2^{-1} b_2 \right)^{-1} b_1 = P_1 \circ \dfrac{b_1|}{|A_1} + P_2 \circ \dfrac{b_2|}{|A_2}; \\ \dots \\ D_m = P_1 \circ \left(A_1 + P_2 \circ \left(A_2 + P_3 \circ \left(\dots P_{m-1} \circ \left(A_{m-1} + P_m \circ A_m^{-1} b_m \right)^{-1} b_{m-1} \dots \right) b_3 \right)^{-1} b_2 \right)^{-1} b_1 = \\ = P_1 \circ \dfrac{b_1|}{|A_1} + P_2 \circ \dfrac{b_2|}{|A_2} + P_3 \circ \dfrac{b_3|}{|A_3} + \dots + P_m \circ \dfrac{b_m|}{|A_m}; \\ \dots \\ D_\infty = P_1 \circ \dfrac{b_1|}{|A_1} + P_2 \circ \dfrac{b_2|}{|A_2} + P_3 \circ \dfrac{b_3|}{|A_3} + \dots + P_m \circ \dfrac{b_m|}{|A_m} + \dots \end{cases} \tag{9}$$

Означення 1. Скінченний дріб

$$D_m = P_1 \circ \frac{b_1|}{|A_1} + P_2 \circ \frac{b_2|}{|A_2} + \ldots + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m} \tag{10}$$

будемо називати m-им підхідним дробом нескінченного операторного ланцюгового дробу.

Розглянемо m-ий підхідний операторний дріб (10) і введемо позначення для його залишків

$$\begin{cases} D_{1,m} = A_1 + P_2 \circ \frac{b_2|}{|A_2} + P_3 \circ \frac{b_3|}{|A_3} + \ldots + P_{s-1} \circ \frac{b_{s-1}|}{|A_{s-1}} + P_s \circ \frac{b_s|}{|A_s} + P_{s+1} \circ \frac{b_{s+1}|}{|A_{s+1}} + \ldots + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m}; \\ D_{2,m} = A_2 + P_3 \circ \frac{b_3|}{|A_3} + \ldots + P_{s-1} \circ \frac{b_{s-1}|}{|A_{s-1}} + P_s \circ \frac{b_s|}{|A_s} + P_{s+1} \circ \frac{b_{s+1}|}{|A_{s+1}} + \ldots + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m}; \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{s-1,m} = A_{s-1} + P_s \circ \frac{b_s|}{|A_s} + P_{s+1} \circ \frac{b_{s+1}|}{|A_{s+1}} + \ldots + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m}; \\ D_{s,m} = A_s + P_{s+1} \circ \frac{b_{s+1}|}{|A_{s+1}} + \ldots + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m}; \\ \vdots \\ D_{m-1,m} = A_{m-1} + P_m \circ \frac{b_m|}{|A_m}; \\ D_{m,m} = A_m. \end{cases} \tag{11}$$

Використовуючи дані позначення, можемо сформулювати і довести наступне твердження:

Лема 1. Якщо для операторних ланцюгових дробів (11) виконуються умови $\det D_{i,s} \neq 0 \left(i = \overline{0,m};\ s = \overline{0,m-1} \right)$, то має місце рівність

$$D_{i,m+1} - D_{i,m} = (-1)^{m-i} \prod_{j=i+1}^{m} \left(P_j \circ D_{j,m}^{-1} \right) P_{m+1} \circ \prod_{j=i}^{m} \left(D_{m+i+1-j,m+1}^{-1} b_{m+i+1-j} \right). \tag{12}$$

Доведення. Покажемо вірність леми, використовуючи метод математичної індукції по i $\left(i = m,\ m-1,\ \ldots,\ 1 \right)$. Нехай $i = m$ тоді

$$D_{m,m+1} = A_m + P_{m+1} \circ \frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}, \qquad D_{m,m} = A_m,$$

а отже

$$D_{m,m+1}-D_{m,m}=A_m+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}-A_m=P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}=P_{m+1}\circ\left(D^{-1}_{m+1,m+1}b_{m+1}\right).$$

Нехай тепер $i = m - 1$, тоді

$$D_{m-1,m}=A_{m-1}+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m},\qquad D_{m-1,m+1}=A_{m-1}+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}.$$

Звідси

$$D_{m-1,m+1}-D_{m-1,m}=A_{m-1}+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}-\left(A_{m-1}+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}\right)=$$

$$=P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}-P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}=P_m\circ\left(\frac{1}{A_m+P_{m+1}\dfrac{b_{m+1}}{A_{m+1}}}-\frac{1}{A_m}\right)b_m=$$

$$=P_m\circ\left(D^{-1}_{m,m+1}-D^{-1}_{m,m}\right)\,b_m=(-1)\,P_m\left(D^{-1}_{m,m}-D^{-1}_{m,m+1}\right)b_m=$$

$$=(-1)\,P_m\circ D^{-1}_{m,m}\left(D_{m,m+1}-D_{m,m}\right)D^{-1}_{m,m+1}\,b_m=$$

$$=(-1)\,P_m\circ D^{-1}_{m,m}\left(P_{m+1}\circ\left(D^{-1}_{m+1,m+1}b_{m+1}\right)\right)\left(D^{-1}_{m,m+1}b_m\right).$$

Припустимо, що твердження леми виконується для $i=i_0$ і перевіримо його виконання для $i=i_0-1$.

$$D_{i_0-1,m+1}=A_{i_0-1}+P_{i_0}\circ\frac{b_{i_0}|}{|A_{i_0}}+\ldots+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}},$$

$$D_{i_0-1,m}=A_{i_0-1}+P_{i_0}\circ\frac{b_{i_0}|}{|A_{i_0}}+\ldots+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}.$$

Тоді

$$D_{i_0-1,m+1}-D_{i_0-1,m}=\left(P_{i_0}\circ\frac{b_{i_0}|}{|A_{i_0}}+\ldots+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}\right)-\left(P_{i_0}\circ\frac{b_{i_0}|}{|A_{i_0}}+\ldots+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}\right)=$$

$$=P_{i_0}\circ\left(\frac{1}{|A_{i_0}}+\ldots+P_{m+1}\circ\frac{b_{m+1}|}{|A_{m+1}}-\left(P_{i_0}\circ\frac{b_{i_0}|}{|A_{i_0}}+\ldots+P_m\circ\frac{b_m|}{|A_m}\right)\right)b_{i_0}=$$

$$= P_{i_0} \circ D_{i_0,m}^{-1}\left(D_{i_0,m} - D_{i_0,m+1}\right)D_{i_0,m+1}^{-1} b_{i_0} = -P_{i_0} \circ D_{i_0,m}^{-1}\left(D_{i_0,m+1} - D_{i_0,m}\right)D_{i_0,m+1}^{-1} b_{i_0} =$$

$$= P_{i_0} \circ \left(D_{i_0,m+1}^{-1} - D_{i_0,m}^{-1}\right)b_{i_0} =$$

$$= (-1)^{m-i_0+1} P_{i_0} \circ D_{i_0,m}^{-1} \prod_{j=i_0+1}^{m}\left(P_j \circ D_{j,m}^{-1}\right)P_{m+1} \circ \prod_{j=i_0}^{m}\left(D_{m+i_0+1-j,m+1}^{-1} b_{m+i_0+1-j}\right)D_{i_0,m+1}^{-1} b_{i_0} =$$

$$= (-1)^{m-i_0+1} P_{i_0} \circ D_{i_0,m}^{-1} \prod_{j=i_0}^{m}\left(P_j \circ D_{j,m}^{-1}\right)P_{m+1} \circ \prod_{j=i_0}^{m}\left(D_{m+i_0-j,m+1}^{-1} b_{m+i_0-j}\right)D_{i_0,m+1}^{-1} b_{i_0}\,.$$

Лему доведено.

Наслідок 1. Якщо покласти у співвідношенні (12) $i = 0$, то різниця між його підхідними дробами одержується за формулою

$$D_{m+1} - D_m = (-1)^m \prod_{j=2}^{m}\left(P_j \circ D_{j,m}^{-1}\right)P_{m+1} \circ \prod_{j=1}^{m}\left(D_{m+1-j,m+1}^{-1} b_{m+1-j}\right). \qquad (13)$$

Наслідок 2. Якщо для операторних ланцюгових дробів (9) виконується співвідношення $\det D_s \neq 0 \; \left(s = 1, 2, \ldots\right)$, то для всіх m залишковий член R_m обчислюється за такою формулою

$$R_m = D_\infty - D_m = (-1)^m \prod_{j=2}^{m}\left(P_j \circ D_{j,m}^{-1}\right)P_{m+1} \circ \prod_{j=1}^{m}\left(D_{m+1-j,\infty}^{-1} b_{m+1-j}\right),$$

де $D_{j,\infty}$ — залишки нескінченного операторного ланцюгового дробу (9) для $m = 1, 2, \ldots$

Означення 2. Операторний ланцюговий дріб називається абсолютно збіжним, якщо збігається такий ряд, складений із його підхідних дробів:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left\|D_{s+1} - D_s\right\|. \qquad (14)$$

Означення 3. Говоритимемо, що один операторний ланцюговий дріб G мажорує інший операторний ланцюговий дріб D, якщо існує таке невід'ємне ціле число n_0 і деяка додатна константа M, що для всіх цілих n та m $\left(n \geq n_0,\, m \geq m_0\right)$ виконується співвідношення

$$\left\|D_n - D_m\right\| \leq M\left\|G_n - G_m\right\|. \qquad (15)$$

Тут D_i, G_i — підхідні дроби нескінченних операторних дробів D_∞, G_∞ відповідно.

Лема 2 [3]. Нехай X — банахів простір квадратних матриць порядку $r \times r$ над полем дійсних чисел. Якщо матриця $F \in X$, $\left\|F\right\| < 1$ і I — одинична матриця, то матриця $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ має обернену і при цьому:

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}F^{k}, \quad \left\|\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|\mathbf{F}\|}. \tag{16}$$

Наслідок 3 [3]. Якщо матриця **A** — невироджена та матриця **H** — її збурення, таке що $\left\|A^{-1}H\right\|<1$, то матриця **A** + **H** невироджена та при цьому

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{H}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\right)^{k}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\right)^{k}\le\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|}{1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\right\|}. \tag{17}$$

Теорема 1 (Ознака мажорації). Якщо для операторного ланцюгового дробу

$$D_{\infty}=P_1\circ\frac{b_1|}{|A_1}+P_2\circ\frac{b_2|}{|A_2}+\ldots+P_s\circ\frac{b_s|}{|A_s}+\ldots \tag{18}$$

виконується умова (15) та існує такий абсолютно збіжний числовий ланцюговий дріб

$$\hat{D}_{\infty}=\hat{a}_0+\frac{\hat{b}_1|}{|\hat{a}_1}+\frac{\hat{b}_2|}{|\hat{a}_2}+\ldots+\frac{\hat{b}_s|}{|\hat{a}_s}+\ldots$$

зі знакосталими частинними чисельниками, для яких виконується

$$\begin{cases}\hat{D}_{s,m}^{-1}\ge\|P_s\|\left\|D_{s,m}^{-1}\right\|>0 & \left(s=1,2,\ldots;\ m=s+1,\ s+2,\ldots\right);\\ \|P_s\|\|b_s\|\le\left|\hat{b}_s\right| & \left(s=1,2,\ldots\right),\end{cases}$$

то даний операторний ланцюговий дріб також абсолютно збіжний.

Доведення. Скориставшись формулою різниці між двома підхідними дробами порядку m і $m+1$ можна записати:

$$\|D_{m+1}-D_m\|\le\left\|(-1)^m\prod_{j=2}^{m}\left(P_j\circ D_{j,m}^{-1}\right)P_{m+1}\circ\prod_{j=1}^{m}\left(D_{m+i+1-j}^{-1}b_{m+1-j}\right)\right\|\le$$
$$\left\|\prod_{j=2}^{m}\|P_j\|\left\|D_{j,m}^{-1}\right\|\|P_{m+1}\|\prod_{j=1}^{m}\left\|D_{m+1-j,m+1}^{-1}\right\|\|b_{m+1-j}\|\right\|.$$

Звідки з урахуванням умов теореми одержимо:

$$\|D_{m+1}-D_m\|\le\left\|\prod_{j=2}^{m}\hat{D}_{j,m}^{-1}\prod_{j=1}^{m}\left(\hat{D}_{m+i+1-j}^{-1}b_{m+1-j}\right)\right\|\le\left|\hat{D}_{m+1}-\hat{D}_m\right|.$$

За умовою ряд $\sum_{s=1}^{\infty}\left|\hat{D}_{s+1}-\hat{D}_s\right|$ збіжний. Отже, ряд $\sum_{s=1}^{\infty}\left\|\hat{D}_{s+1}-\hat{D}_s\right\|$ також збігається, тобто операторний ланцюговий дріб збігається абсолютно. Що й потрібно було довести.

Означення 4. Нехай M — деяка підмножина банахового простору $R^{n\times n}\times R^n$. Множину M називатимемо областю збіжності операторного ланцюгового дробу (18), якщо для всіх $A_s\in R^{n\times n}$ та $b_s\in R^n$ $(s=1,2,\ldots)$ даний операторний ланцюговий дріб збігається.

Означення 5. Замкнута підмножина лінійного простору, якій належить значення операторних ланцюгових дробів, а також значення всіх підхідних дробів операторного ланцюгового дробу (18) за умови, що всі $(A_s,b_s)\in M$ називається множиною значень дробу (18).

А тепер розглянемо ознаку збіжності, яка для звичайних ланцюгових дробів розглядалася Слєшинським, Марковим і Прінгсгеймом [1], [2], [4].

Теорема 2. Якщо елементи операторного ланцюгового дробу (18) задовольняють умови

$$\left\|A_s^{-1}\right\|\le\frac{1}{\|P_s\|\|b_s\|+1}\quad\left(s=1,2,\ldots\right),\tag{19}$$

то він абсолютно збігається, а його множиною значень є область $\left\{z\in R^n:\ \|z\|\le 1\right\}$.

Доведення. Введемо до розгляду ланцюговий дріб із дійсними елементами:

$$\hat{D}_\infty=\hat{a}_0+\frac{\hat{b}_1|}{|\hat{a}_1}+\frac{\hat{b}_2|}{|\hat{a}_2}+\ldots+\frac{\hat{b}_s|}{|\hat{a}_s}+\ldots,\ \text{де}\ \hat{b}_s=-\|P_s\|\|b_s\|,\ \hat{a}_s=\|P_s\|\|b_s\|+1\ \left(s=1,2,\ldots\right).$$

Методом математичної індукції доведемо таку нерівність

$$\left\|D_{s,m}^{-1}\right\|\le\hat{D}_{s,m}^{-1}<\|P_s\|\|b_s\|^{-1}.\tag{20}$$

Дійсно, для $s=m$

$$\left\|D_{m,m}^{-1}\right\|\le\frac{1}{\|P_m\|\|b_m\|+1}=\hat{a}_m^{-1}=\hat{D}_{m,m}^{-1}<\frac{1}{\|P_m\|\|b_m\|}.$$

Припустимо тепер, що співвідношення (20) справджується для $s=i+1$. Тоді на основі нерівності (19), *наслідку 3* та припущення індукції одержимо

$$\left\|D_{i,m}^{-1}\right\|=\left\|\left(A_i+P_{i+1}\circ D_{i+1,m}^{-1}b_{i+1}\right)^{-1}\right\|=\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(-A_i^{-1}P_{i+1}\circ D_{i+1,m}^{-1}b_{i+1}\right)^j A_i^{-1}\right\|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{\infty}\left(\left\|A_i^{-1}\right\|\|P_{i+1}\|\left\|D_{i+1,m}^{-1}\right\|\|b_{i+1}\|\right)^j\left\|A_i^{-1}\right\|\le\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\hat{a}_j^{-1}\hat{D}_{j,m}^{-1}\hat{b}_j\right)^j\hat{a}_j^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\hat{a}_i+\hat{D}_{i+1,m}^{-1}\hat{b}_{i+1}}=\hat{D}_{i,m}^{-1}\le\frac{1}{\|P_i\circ b_i\|+1-\left\|P_i\circ D_{i+1,m}^{-1}b_{i+1}\right\|}\le$$

$$\le\frac{1}{\|P_i\|\|b_i\|+1-\|P_i\|\left\|D_{i+1,m}^{-1}\right\|\|b_{i+1}\|}<\frac{1}{\|P_i\|\|b_i\|}.$$

Таким чином, співвідношення (20) доведено.

На основі *леми 1* можемо записати таке

$$\left\|D_{m+1}-D_m\right\| \le \left\|(-1)^m \prod_{j=2}^{m}\left(P_j \circ D_{j,m}^{-1}\right) P_{m+1} \circ \prod_{j=1}^{m} D_{m+1-j,m+1}^{-1} b_{m+1-j}\right\| \le$$

$$\left|(-1)^m \prod_{j=2}^{m} \hat{D}_{j,m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} \hat{D}_{m+1-j,m+1}^{-1} \left|b_{m+1-j}\right|\right| = \left|\prod_{j=2}^{m} \hat{D}_{j,m}^{-1} \prod_{j=1}^{m+1} \hat{D}_{m+1-j,m+1}^{-1} b_{m+1-j}\right| = \left\|\hat{D}_{m+1}-\hat{D}_m\right\|.$$

Отже,

$$\left\|D_{m+1}-D_m\right\| \le \left\|\hat{D}_{m+1}-\hat{D}_m\right\|. \tag{21}$$

З умов теореми випливають такі нерівності:

$$\left\|A_1^{-1}\right\|\left\|P_1\right\|\left\|b_1\right\| \le 1, \qquad \left\|\hat{D}_{1,m}^{-1}\right\|\left\|P_1\right\|\left\|b_1\right\| \le 1.$$

Тобто можна зробити висновок, що

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left|D_{s+1}-D_s\right| \le \left|\sum_{s=0}^{\infty}\left(\hat{D}_{s+1}-\hat{D}_s\right)\right| = \left|\lim_{m\to\infty} \hat{D}_m - \hat{D}_1\right| \le 2. \tag{22}$$

Нерівності (21) і (22) закінчують доведення обох частин теореми.

Ця достатня ознака збіжності легко може бути перевірена для конкретних операторних ланцюгових дробів, що дозволяє застосовувати її на практиці.

3. Чисельні експерименти

Запропонований вище алгоритм було реалізовано у середовищі FreeMat. Щоб продемонструвати його застосовність і ефективність розглянемо такий приклад.

Розглянемо систему поліноміальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1^2+2x_1x_2-x_1x_3+3x_2^2-x_2x_3-x_3^2+4x_1+2x_2-x_3-8=0; \\ x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-4x_1+2x_2-2x_3-2=0; \\ x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3+x_3^2+x_1+3x_2+4x_3-11=0. \end{cases} \tag{23}$$

Систему (23) можна подати у вигляді (3):

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

або

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Звідси, якщо матриця системи (24) є невироджена, то для обчислення невідомих x_1, x_2 та x_3 можна побудувати ітераційний процес:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

Одним із точних розв'язків системи (23) є кортеж $x_1 = 1;\ x_2 = 1; x_3 = 1$. За початкового наближення $x_1^{(0)} = 2;\ x_2^{(0)} = -4; x_2^{(0)} = 3$ отримано такі результати:

Таблиця 1

Результати обчислень для системи (23)

ε	Кількість ітерацій	Наближений розв'язок
0,01	17	$\tilde{x}_1 = 0,9989;\ \tilde{x}_2 = 1,0013;\ \tilde{x}_3 = 0,9997$
0,001	21	$\tilde{x}_1 = 0,9996;\ \tilde{x}_2 = 1,0003;\ \tilde{x}_3 = 1,0000$
0,0001	26	$\tilde{x}_1 = 0,9999;\ \tilde{x}_2 = 1,0001;\ \tilde{x}_3 = 1,0000$

Висновки. У цій роботі розглянуто системи поліноміальних рівнянь другого степеня з багатьма невідомими. Запропоновано новий перспективний метод розв'язування таких нелінійних систем та отримано рекурентні співвідношення для знаходження їх наближених розв'язків над полем дійсних чисел. Досліджено збіжність операторних ланцюгових дробів, що використовуються в обчислювальній схемі, наведено деякі їх властивості. Проведено чисельні експерименти, що підтверджують ефективність запропонованого методу.

Література

[1] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[2] *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — Москва: Наука, 1983. — 311 с.

[3] *Тыртышников Е. Е.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — Москва: ВИНИТИ, 1994. — 220 с.

[4] *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: analytic theory and applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 11. — Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. — 428 p.

Iterative method for solving second degree polynomials

Anastasiya Nedashkovska

Systems of nonlinear algebraic equations have a wide application. As a rule, such systems are solved using some iterative methods, which are based on the nonlinear functional expansion in a Taylor series in the neighborhood of the solution. However, these methods require giving the initial approximation with sufficient accuracy, moreover, it is practically impossible to verify the conditions of the convergence beforehand. This paper suggests a new perspective method for solving systems of polynomial equations of the second degree with many unknowns. Recurrence relations for finding approximate solutions of polynomial equations over the field of real numbers are obtained. The convergence of operator continued fractions used in the computational scheme is investigated and some of their properties are shown. The numerical experiments confirming the efficiency of the method proposed have been conducted.

Итерационный метод решения полиномиальных уравнений второй степени

Анастасия Недашковская

Системы нелинейных алгебраических уравнений имеют широкое практическое применение. Обычно такие системы решают с помощью итерационных методов, основанных на разложении нелинейного функционала в ряд Тейлора в окрестности решения. Однако эти методы требуют достаточно точного задания начального приближения, а также практически невозможно заранее проверить выполнение условий сходимости. В данной работе предложен новый перспективный метод решения систем полиномиальных уравнений второй степени со многими неизвестными. Получены рекуррентные соотношения для нахождения приближенных решений полиномиальных уравнений над полем действительных чисел. Исследована сходимость операторных цепных дробей, используемых в вычислительной схеме и приведены некоторые их свойства, проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного метода.

Представлено професором П. Малачівським

Отримано 02.03.15