

Антиплоска деформація бруса скінченного поперечного перерізу з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування

Любов Піскозуб¹, Назар Оліярник¹, Ярослав Пастернак², Георгій Сулим³

¹ Українська академія друкарства, вул. Підголокко, 19, Львів, e-mail: piskozub@uad.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

² Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, e-mail: pasternak @ ukrpost. ua

³ Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

Розглянуто задачу поздовжнього зсуву бруса скінченного поперечного перерізу з міжфазною закритою тріщиною з урахуванням тертя. Розв'язок сформульованої задачі побудовано із застосуванням гранично-елементного методу функції стрибка. Здійснено числові розрахунки для різних поперечних перерізів бруса (квадрат, прямокутник), навантаженого зсувними зосередженими силами. Проаналізовано вплив їхньої інтенсивності та розміщення, відношення розмірів поперечного перерізу бруса до ширини тріщини та відношення модулів зсуву матеріалів тіла на виникнення зони фрикційного проковзування та її ширини, а також на характеристики розподілу стрибків переміщень. Зіставленням отриманих даних у часткових випадках квадратного бруса з відповідним аналітичним розв'язком для біматеріалу підтверджено достовірність результатів та ефективність застосованої методики до розв'язування цього класу задач.

Ключові слова: антиплоска деформація, тріщина, брус, скінченний поперечний переріз, тертя, проковзування, біматеріал, функції стрибка, граничні елементи

Вступ. Задачі теорії пружності та руйнування для тіл із тріщинами постійно викликають велике зацікавлення дослідників (див. огляди [1-6]). У деяких випадках для тіл простої геометрії та крайових умов отримані аналітичні розв'язки таких задач [4, 7]. Можливість фрикційної взаємодії на поверхні контакту тіл значно ускладнює розв'язування задач. Помітний внесок у вивчення впливу фрикційного проковзування на напружено-деформований стан контактуючих тіл належить теорії вивчення тріщин на межі поділу двох середовищ, яка для усунення фізично некоректної осцилюючої особливості широко використовує модель локального фрикційного контакту берегів безпосередньо біля вістря [3, 8-10]. Значні здобутки у цьому напрямі містять праці [6, 11-19].

Метою цієї публікації є узагальнення на випадок довільного навантаження й обмеженості розмірів контактуючих тіл результатів попередніх робіт авторів [20-22], де методом стрибків і сингулярних інтегральних рівнянь [4, 23] отримані аналітичні розв'язки антиплоскої задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазним фрикційним проковзуванням за симетричного навантаження. Для цього пропонується застосувати гранично-елементний підхід [24-27].

1. Формулювання задачі

Розглянемо безмежний у напрямі твірної брус скінченного поперечного перерізу ширини $2W$ та висоти $2H$, що складається з двох матеріалів (шарів), взаємно притиснутих до межі поділу нормальними рівномірними зусиллями $\sigma_{yy} < 0$ (рис. 1). Зовнішнє навантаження у поздовжньому напрямі визначається монотонно квазістатично зростаючими від нуля до деякого максимального значення збалансованими зосередженими силами інтенсивності $Q_2(t) = -Q_1(t) = Q(t)$, де t — параметр зміни навантажування (час).

Введемо в розгляд декартову систему координат $Oxyz$ з початком у площині контакту матеріалів xOy . При цьому використання однакового традиційного позначення для осі z і комплексної змінної $z = x + iy$ під час розв’язування задачі не повинно викликати непорозумінь. Вважатимемо, що механічні поля та навантаження, які виникають у тілі, не змінюються вздовж напрямку, паралельного до твірної тіла. Тоді характеристики напружено-деформованого стану тіла у кожному із перпендикулярних до поздовжнього напрямку поперечних перерізів будуть однакові.

Розглянемо один із таких перерізів бруса площиною xOy , перпендикулярною до осі z (рис. 1). Межа $L = [-W; W]$ поділу матеріалів розміщена по осі абсцис x , а S_k ($k=1,2$) — площі верхнього та нижнього матеріалів відповідно.

На проміжку $L' = [-b; b] \subset L$ лежить серединна лінія перерізу тунельної тріщини, береги якої знаходяться у контакті. На ділянці контакту матеріалів поза межами тріщини $L'' = L \setminus L'$ задовольняються умови ідеального механічного контакту. Умови контакту берегів тріщини формулюємо таким чином: 1) ідеальний механічний контакт на L' , коли дотичні напруження $\sigma_{yz}(x,0)$ менші певного критичного значення τ_{yz}^{\max} ; 2) проковзування на деякій ділянці $\gamma = [a_-, a_+] \subset L'$

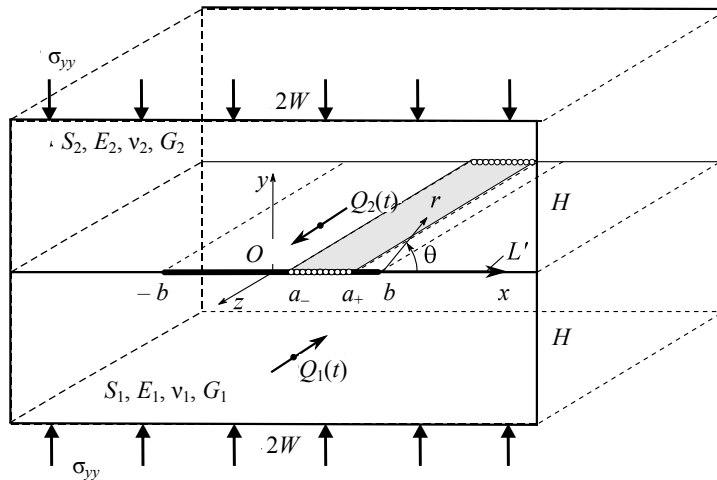


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

у разі досягнення дотичними напруженнями значення τ_{yz}^{\max} . За дії на поверхнях бруса стискувальних напружень $\sigma_{yy}(x, 0) < 0$ зусилля тертя $\sigma_{yz}(x, 0)$ у всіх точках ділянки $\gamma \subset L'$ згідно класичного закону Амонтона дорівнюють

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x, 0) = -\operatorname{sgn}([w])\tau_{yz}^{\max}, \quad \tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}(x, 0), \quad (1)$$

де α — коефіцієнт тертя ковзання, $[w] = w^-(x, 0) - w^+(x, 0)$ — стрибок переміщень. Індeksi «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому та нижньому краях лінії L' . Поза ділянкою $\gamma \subset L'$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує рівня максимально допустимих

$$|\sigma_{yz}(x, 0)| \leq \tau_{yz}^{\max}, \quad [w] = 0 \quad (2)$$

і взаємного переміщення берегів немає. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знаку різниці переміщень $[w]$ на L' у розглядуваній точці.

Взаємне переміщення берегів у зоні проковзування моделюватимемо стрибком компонент вектора переміщень на L' , а саме:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'} \equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \begin{cases} f_6(x, t), & x \in L'; \\ 0, & x \notin L'. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $f_6(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F_6(x)$, де $F_6(x, t) = -\int f_6(x, t) dx = w^+(x, t) - w^-(x, t)$; t — момент часу як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю сили.

Таким чином, сформульована задача поздовжнього зсуву бруса скінченного поперечного перерізу парою квазістатичних зосереджених сил $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ з додатковим впливом стискувальних напружень $\sigma_{yy}(x, 0)$.

2. Розв'язування задачі

На основі принципу спряження континуумів різної вимірності розміщену на межі поділу матеріалів тріщину із невідомими переміщеннями на берегах моделюємо лінією (математичним розрізом) L' із невідомими стрибками компонент вектора переміщень $f_6(x, t)$. Враховуючи симетричність тензора пружних сталей, запишемо формулу Сомільяни для визначення переміщень $w(\mathbf{y})$ (\mathbf{y} — внутрішня точка тіла) у тілі з розрізом.

Далі спрямувавши точку \mathbf{y} почергово до точки ξ на розрізі L' та замкнутого контуру межі бруса $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, де Γ_i — сторона бруса, сформульована задача зведеться до системи інтегральних рівнянь (СІР):

$$\frac{1}{2}w(\xi) = -\text{CPV} \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \xi) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{L'} T(\mathbf{x}, \xi) F(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) W(\mathbf{x}_k^*, \xi), \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\Sigma w(\xi) = \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \xi) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{L'} T(\mathbf{x}, \xi) F(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) W(\mathbf{x}_k^*, \xi), \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}\Delta t(\xi) = n_j^+ \left[\text{HPV} \int_{L'} S_j(\mathbf{x}, \xi) F(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} S_j(\mathbf{x}, \xi) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) D_j(\mathbf{x}_k^*, \xi) \right]. \quad (6)$$

Тут CPV означає головне значення інтеграла (Cauchy Principal Value), RPV — головне значення невластивого інтеграла (Riemann Principal Value), HPV — скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром (Hadamard Principal Value); \mathbf{x}_k^* — точка прикладання сили $Q_k(t)$ ($k=1,2$). Ядра інтегральних рівнянь (4)-(6) відповідно до [24-26] означені такими виразами:

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_1$:

$$W(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A_1^2 \ln(Z(\mathbf{x} - \xi)) \right\} + \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A_1 \ln(\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)) G_1^{(1)} \bar{A}_1 \right\};$$

$$T(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x} - \xi)} \right\} + \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A_1 G_1^{(1)} \bar{B}_1 \left(\frac{n_2(\mathbf{x}) + in_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right) \right\};$$

$$D_j(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B_1 \left[A_1 \frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{Z(\mathbf{x} - \xi)} + G_1^{(1)} \bar{A}_1 \left(\frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right) \right] \right\};$$

$$S_j(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B_1 (\delta_{2j} - i\delta_{1j}) \left[B_1 \left(\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{[Z(\mathbf{x} - \xi)]^2} \right) + G_1^{(1)} \bar{B}_1 \left(\frac{n_2(\mathbf{x}) + in_1(\mathbf{x})}{[\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)]^2} \right) \right] \right\};$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_1$:

$$W(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A_1 A_2 G_2^{(1)} \ln(Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)) \right\};$$

$$T(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_1 B_2 G_2^{(1)} \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right] \right\};$$

$$D_j(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_1 G_2^{(1)} A_2 \left[\frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right] \right\};$$

$$S_j(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_1 (\delta_{2j} - i\delta_{1j}) \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{[Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)]^2} \right] G_2^{(1)} B_2 \right\};$$

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_2 :$

$$W(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_2 A_1 G_1^{(2)} [\ln(Z(\mathbf{x}) - Z(\xi))] \right\};$$

$$T(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_2 G_1^{(2)} B_1 \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right] \right\};$$

$$D_j(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_2 A_1 G_1^{(2)} \left[\frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right] \right\};$$

$$S_j(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_2 (\delta_{2j} - i\delta_{1j}) G_1^{(2)} B_1 \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{[Z(\mathbf{x}) - Z(\xi)]^2} \right] \right\};$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_2 :$

$$W(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_2^2 \ln(Z(\mathbf{x} - \xi)) \right\} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_2 G_2^{(2)} \bar{A}_2 [\ln(\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi))] \right\};$$

$$T(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x} - \xi)} \right\} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ A_2 G_2^{(2)} \bar{B}_2 \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) + in_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right] \right\};$$

$$D_j(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_2 \left[A_2 \left(\frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{Z(\mathbf{x} - \xi)} \right) - G_2^{(2)} \bar{A}_2 \left(\frac{\delta_{2j} - i\delta_{1j}}{\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right) \right] \right\};$$

$$S_j(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ B_2 (\delta_{2j} - i\delta_{1j}) \left[B_2 \left(\frac{n_2(\mathbf{x}) - in_1(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x} - \xi)} \right) - G_2^{(2)} \bar{B}_2 \left(\frac{n_2(\mathbf{x}) + in_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}(\mathbf{x}) - Z(\xi)} \right) \right] \right\}. \quad (7)$$

Тут $Z(\mathbf{x}) = x_1 + ix_2$, $Z(\mathbf{x} - \xi) = x_1 - \xi_1 + i(x_2 - \xi_2)$; δ_{ij} — символи Кронекера; n_j — компоненти одиничного вектора \mathbf{n} зовнішньої нормалі; $A_i = 1/\sqrt{2iG_i}$, $B_i = \sqrt{iG_i}/2$ ($i=1,2$) — комплексні сталі, що залежать від механічних властивостей матеріалів півпросторів, заданих їхніми модулями зсуву G_1, G_2 [25]. Коефіцієнти $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, G_2^{(1)}, G_2^{(2)}$ дорівнюють

$$G_1^{(1)} = -\frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2}; \quad G_1^{(2)} = \frac{2\sqrt{G_1 G_2}}{G_1 + G_2}; \quad G_2^{(1)} = -\frac{2\sqrt{G_1 G_2}}{G_1 + G_2}; \quad G_2^{(2)} = -\frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2}. \quad (8)$$

Таким чином, сформульована задача зводиться до визначення із СІР (4)-(6) невідомих стрибків переміщень $F_6(x, t)$ на лінії L' і не заданої крайовими умовами функції w на межі Γ тіла. До розв'язування цієї СІР застосуємо метод граничних елементів [24-26] із використанням розривних квадратичних елементів. Для цього межу тіла Γ та лінії L' апроксимуємо з використанням відповідно q_Γ та $q_{L'}$ прямолінійних відрізків — граничних елементів Γ_q . На кожному елементі вибрано по 3 вузлові точки: одна у центрі, а дві інші — на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний граничний елемент). Крайові функції $F_6(x, t)$ та w апроксимуємо на кожному елементі їхніми вузловими значеннями. При цьому для граничних елементів, що описують кінцеві частини лінії L' використано спеціальні функції, що враховують розриви переміщень у вершинах тріщини:

$$\phi_p = \Phi_{p1}\sqrt{\rho} + \Phi_{p2}\rho + \Phi_{p3}\rho^{3/2} \quad (p = \overline{1,3}), \quad (9)$$

де $\rho = 1 \pm \xi$, $|\xi| \leq 1$ — параметр розташування точки на елементі; Φ_{pj} — матриці сталих, що визначаються з рівнянь $\phi_p(\xi_p) = 1$, $\phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0$; ξ_p — координати вузлових точок на граничному елементі.

3. Числовий аналіз

Проаналізуємо вплив властивостей геометричної та силової схем задачі (рис. 2) на розміри ділянки проковзування та величину стрибка переміщень.

Для верифікації результатів числових розрахунків розглянемо спочатку випадок симетричного щодо осі ординат зсувного навантаження двома антипаралельними силами $Q_1/\pi aP = Q_2/\pi aP = 2$, прикладеними у точках $(0; h)$ та $(0; -h)$ відповідно ($0 < h < H$) бруса квадратного перерізу ($W = H$). На рис. 3 зображені графічні залежності зміни величини нормованих стрибків переміщень $C[w]/(bQ)$ на ділянці проковзування $|\gamma|/b$ тріщини для різних значень відношення b/H (ширини тріщини до сторони квадрата). Помітно, що значне зменшення відношення b/H наближає значення стрибків переміщень $[w]$ до відповідних результатів аналітичного розв'язку (штрихова лінія) отриманих за такого ж навантаження для безмежного тіла [21, 22]. Обмеженість

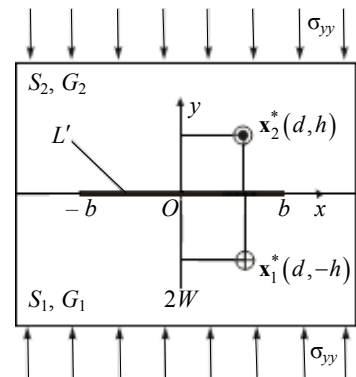


Рис. 2. Силова схема задачі

розмірів контактуючих тіл (зменшення відносного розміру тріщини у брусі за незмінності способу та величини навантаження) істотно збільшує значення стрибків переміщень. Зазначимо також, що у вибраній конфігурації задачі прикладеного навантаження достатньо для утворення ділянки проковзування співрозмірної з усією шириною тріщини ($|\gamma|/b=1$). Параметр $C = G_1G_2/(G_1 + G_2)$ характеризує відношення модулів зсуву матеріалів тіла. Коефіцієнт тертя ковзання для розрахунків обрано великим для більш яскравого ілюстрування проявів тертя — $\alpha = 0,9$, а відношення модулів зсуву матеріалів шарів $G = G_1/G_2 = 1$ (однорідне тіло з можливістю проковзування на певній ділянці). У разі гранично-елементного моделювання цієї задачі за $W = H = 2b$ для розбиття осі тріщини використано 40, а для сторони прямокутника — 80 тривузлових граничних елементів [24].

Розглянемо випадок несиметричного щодо осі ординат розташування точок прикладання зосереджених сил $(d;h)$ і $(d;-h)$ відповідно ($0 < h < H$; $0 < d < W$). Ширина тріщини зафіксована: $b = 0,5H$, інші геометричні та механічні параметри такі ж, як і в попередньому випадку. Результати обчислення нормованих стрибків переміщень у цьому випадку відображені на рис. 4, де суцільні лінії відповідають значенням стрибків переміщень $[w]$ обчислених для бруса з розмірами $W = H = 2b$, а штрихові — для $W = H = 4b$. Як і у попередньому випадку навантаження помітна тенденція до зменшення значень стрибків переміщень зі збільшенням відносних розмірів бруса. Зміщення вбік (уздовж осі абсцис) точок прикладання зосереджених сил, зміщує в цьому ж напрямі екстремальне значення стрибка $[w]$ та робить несиметричною зону проковзування. При цьому у такій конфігурації задачі зміщення сили на відстань більшу за ширину тріщини істотно зменшує розмір зони проковзування та величину стрибків переміщень, зменшуючи їх практично до нуля.

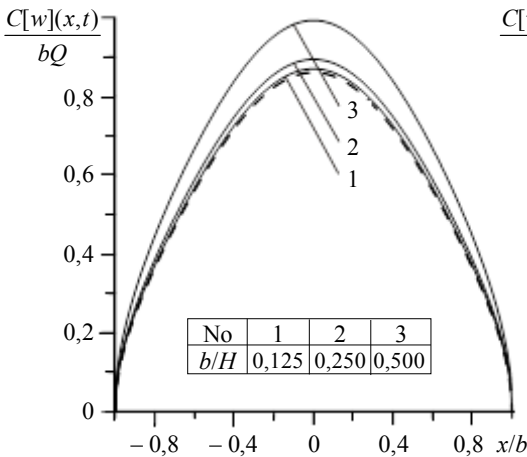


Рис. 3. Залежність нормованих значень стрибків переміщень $[w]$ від розмірів квадратного бруса

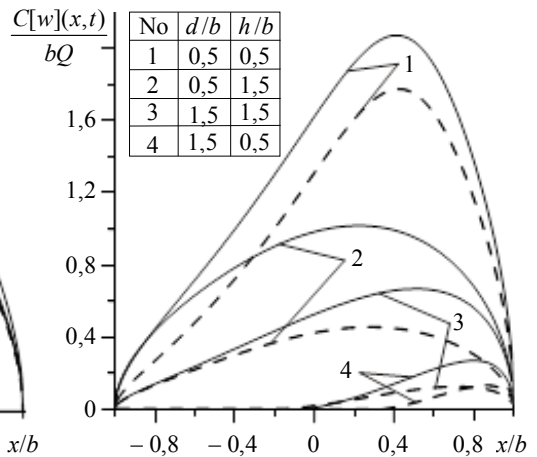


Рис. 4. Залежність значень нормованих стрибків переміщень від зміщення точок прикладання сил

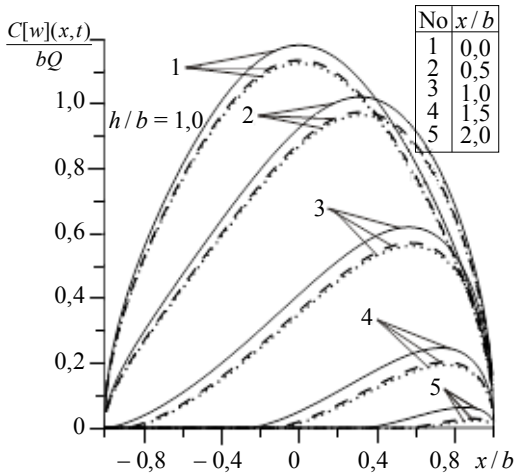


Рис. 5. Вплив зміни пропорцій розмірів поперечного перерізу бруса на значення нормованих стрибків переміщень

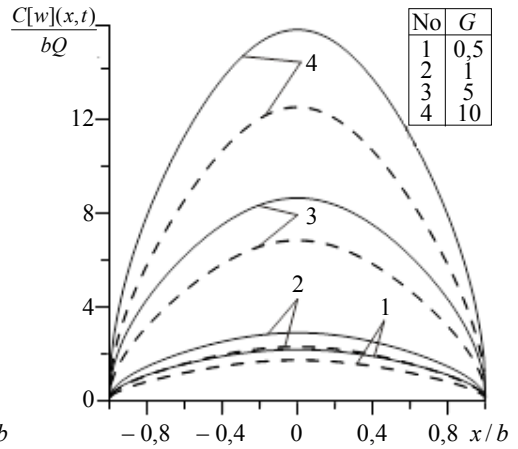


Рис. 6. Вплив зміни параметра G на значення нормованих стрибків переміщень

Залежність значень стрибків переміщень на ділянці проковзування за такого ж навантаження від зміни пропорцій розмірів поперечного перерізу прямокутного бруса проілюстровано на рис. 5. Розрахунки здійснено для співвідношень сторін прямокутного бруса: $W/H=1,5$ (суцільна лінія), $W/H=2$ (штрихова) та $W/H=2,5$ (пунктир) за ширини тріщини $b=0,5H$. Кількість граничних елементів для цих пропорцій бруса становила: 40 для тріщини, 160 — для сторін бруса. Отримані результати дозволяють помітити тенденцію до зменшення значень стрибка переміщень $[w]$ на ділянці проковзування $|y|/b$ зі зростанням ширини W перерізу бруса за незмінних його висоти та ширини тріщини. При цьому, уже за доволі невеликої зміни ширини W (з $2H$ на $2,5H$) значення $[w]$ практично не змінюються. Зі зміщенням точок прикладання сил у напрямку осі абсцис стрибки переміщень також зменшуються.

На рис. 6 відображено вплив зміни відношення сталів матеріалів $G = G_1/G_2$ на значення стрибків переміщень на ділянці проковзування. Точки прикладання зосереджених сил розміщені на осі ординат на відстані $h = b$ від осі тріщини. Суцільні лінії на рис. 6 відповідають розрахункам для квадратного бруса ($W = H$), а штрихові — для прямокутного ($W = 2H$). Ширина тріщини в обох випадках $b=0,5H$. Помітно, що значення нормованих стрибків переміщень $[w]/(bQ)$ для розглянутого прямокутного перерізу менші, ніж для квадратного. З огляду на це можна зробити висновок щодо доцільності використання на практиці брусів прямокутного поперечного перерізу порівняно з квадратним.

Висновки. Побудовано гранично-елементний розв'язок задачі антиплоского деформування безмежного бруса скінченного поперечного перерізу з міжфазною

тріщиною з урахуванням проковзування. Верифікацію отриманих результатів здійснено зіставленням з аналітичним розв'язком для двох стиснутих півпросторів із ділянкою проковзування у контактї, навантаженого зосередженими силами прикладеними на осї ординат.

Числові розрахунки дали змогу проаналізувати вплив основних силових і геометричних чинників (величина сил, розміщення точок їх прикладання, розміри поперечного перерізу та тріщини) і різномодульності матеріалів на величину зони проковзування та характеристики розподілу стрибків переміщень на ній. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлені такі закономірності: 1) у разі зміщення точок прикладання сил у напрямі осі абсцис симетричність розподілу стрибків переміщень порушується та його екстремум зміщується в бік точки прикладання сили; 2) зміщення сили по осі абсцис на відстань більшу від довжини тріщини практично не спричиняє проковзування і стрибків переміщень відповідно; 3) за збільшення розмірів поперечного перерізу бруса значення стрибків переміщень зменшуються, що свідчить про зменшення впливу на них бічних поверхонь бруса; 4) зміна одного із розмірів перерізу бруса (ширини чи висоти) або модуля зсуву матеріалу дає змогу коригувати (збільшувати чи зменшувати) значення стрибків переміщень, що виникатимуть на ділянці проковзування тріщини.

Література

- [1] *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — Москва: Наука, 2001. — 478 с.
- [2] *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ. — Москва: Мир, 1989. — 510 с.
- [3] *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. — 1979. — № 3. — С. 387-396.
- [4] *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [5] *Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З.* Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3. — С. 110-125.
- [6] *Hills D. A., Nowell D., Sackfield A.* Mechanics of elastic contact. — Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993. — P. 238.
- [7] *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дащишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. — Киев: Наукова думка, 1976. — 444 с.
- [8] *Черепанов Г. П.* О развитии трещин в сжатых телах // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, № 1. — С. 82-93.
- [9] *Comninou M., Schmueser D., and Dundurs J.* Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // Int. J. Engn. Sci. — 1980. — Vol. 18. — P. 131-137.
- [10] *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Archive of App. Mech. — 1999. — Vol. 69. — P. 317-335.
- [11] *Архипенко К. М., Кривий О. Ф.* Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // Машинознавство. — 2008. — № 3 (129). — С. 16-21.
- [12] *Кундрат М. М., Сулим Г. Т.* Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. — Львів, 2003. — С. 322-324.
- [13] *Мартыняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. С.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 101-109.
- [14] *Мартыняк Р. М., Криштафович А. А.* Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками // Трение и износ. — 2000. — Т. 21, №4. — С. 350-360.

- [15] *Острык В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. — Киев: Наук. думка, 2006. — 328 с.
- [16] *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. — Киев: Наук. думка, 1988. — 280 с.
- [17] *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I—Theory. II — Examples // Int. J. Solid Structures. — 1998. — Vol. 35. — P. 2349-2378.
- [18] *Jager J.* Half-planes without coupling under contact loading // Arch.Appl.Mech. — 1997. — Vol. 67. — P. 247-259.
- [19] *Mindlin R. D., Deresiewicz H.* Elastic spheres in contact under varying oblique forces // ASME J.Appl.Mech. — 1953. — Vol. 75. — P. 327-344.
- [20] *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г.* Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 (Минск, 25 окт. - 1 нояб. 2010 г.) В 2 ч. Ч. 2. — Минск: БГУ, 2010. — С. 399-404.
- [21] *Пискозуб Л. Г.* Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 160-172.
- [22] *Пискозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. — Вип. 12. — С. 184-191.
- [23] *Piskozub J. Z., Sulim G. T.* Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // Journal of Engineering Mathematics. Special Issue Thermomechanics. — 2008. — Vol. 61. — P. 315-337.
- [24] *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Оліярник Н. Р.* Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех-мат. — 2012. — Вип. 76. — С. 119-134.
- [25] *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.* Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 2. — С. 46-57.
- [26] *Pasternak Ia.* Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2012. — Vol. 36 — P. 1931-1941.
- [27] *Wu W.-L.* Dual Boundary Element Method Applied to Antiplane Crack Problems // Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering. — Vol. 2009, Article ID 132980, 10 p. — doi:10.1155/2009/132980

Antiplane deformation of the beam of finite cross-section with the interfacial crack considering frictional sliding

Lyubov Piskozub, Nazariy Oliyarnyk, Iaroslav Pasternak, Heorhiy Sulym

The longitudinal shear problem for the beam containing closed interface crack with possibility of sliding friction is considered. A solution of the formulated problem is constructed by applying the boundary element method of the jump functions. Several forms (square, rectangle) of beam cross sections exposed to the concentrated shear forces are numerically calculated. The friction zone width and the displacement dependence on the intensity of the forces and location of their points of application, the aspect ratio of the beam cross-section and shear modulus of the beam materials are analyzed. Comparison of the data for the square timber in partial cases with the corresponding analytical solution for bimaterial has confirmed the accuracy of the results and effectiveness of the methodology applied to the solution of this class of problems.

Антиплоская деформация бруса конечного поперечного сечения с межфазной трещиной с учетом фрикционного проскальзывания

Любовь Пискозуб, Назар Оліярник, Ярослав Пастернак, Георгий Сулим

Рассмотрена задача продольного сдвига бруса конечного поперечного сечения с межфазной закрытой трещиной с учетом трения. Решение сформулированной задачи построено на основе применения граничноэлементного метода функций скачка. Произведены численные расчеты для различных поперечных сечений бруса (квадрат, прямоугольник), нагруженного сдвигающими сосредоточенными силами. Проанализировано влияние их интенсивности и размещения точек их приложения, отношения размеров поперечного сечения бруса к ширине трещины, отношения модулей сдвига материалов тела на возникновение зоны фрикционного проскальзывания и ее ширины, а также на характеристики распределения скачков перемещений. Сопоставлением полученных данных для квадратного бруса в частных случаях с соответствующим аналитическим решением для биматериала подтверждена достоверность полученных результатов и эффективность примененной методики к решению этого класса задач.

Представлено професором Б. Герою

Отримано 03.04.15