УДК 519.6: 539.3

Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки

Ігор Прокопишин

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com

Здійснено варіаційні формулювання задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі проміжкові шари, нормальна та зсувна жорсткість яких описується нелінійною вінклерівською моделлю. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку варіаційних задач. Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано на континуальному рівні ряд паралельних нестаціонарних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна. Проведено числові дослідження цих методів для задачі про плоску деформацію трьохшарового прямокутного тіла на основі скінченноелементних апроксимацій.

Ключові слова: контактні задачі, нелінійні вінклерівські шари, нелінійні варіаційні рівняння, ітераційні методи, методи декомпозиції області, скінченноелементні апроксимації.

Вступ. Проблема аналізу напружено-деформованого стану неоднорідних пружних тіл із тонкими прошарками виникає під час дослідження багатошарових композитних конструкцій, геологічних структур, клейових і адгезійних з'єднань.

Найпростішою моделлю м'яких пружних прошарків, жорсткість яких порівняльна або менша жорсткості основних тіл, є модель пружного шару, нормальна та зсувна жорсткість якого описується вінклерівським законом [1, 2].

Короткий огляд досліджень контактних задач для пружних тіл із тонкими проміжковими шарами та покриттями наведено у роботі [3], а більш повний аналіз стану проблеми можна знайти у цитованих там працях.

Числові методи для задач про контакт скінченних тіл із тонкими покриттями та прошарками, що базуються на теорії варіаційних рівнянь і нерівностей та скінченноелементних апроксимаціях, розвинуто в працях [3-11]. Зокрема, у роботах [9, 10] розроблено метод декомпозиції області для розв'язування задачі про статичну рівновагу двох пружних тіл, з'єднаних через тонкий нелінійний адгезійний прошарок. Цей метод побудовано на основі двоїстого формулювання та алгоритму Удзави.

У працях [3, 11] запропоновано клас континуальних паралельних методів декомпозиції області (МДО) типу Робіна для розв'язування задач про односторонній контакт без тертя багатьох пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських проміжкових шарів. Вони ґрунтуються на неявних нестаціонарних ітераційних методах для абстрактних нелінійних варіаційних рівнянь у рефлексивних банахових

просторах. Деякі з цих МДО можна розглядати як модифікації неявного напівгладкого методу Ньютона.

У пропонованій статті на основі результатів праць [3, 11] розроблено ряд паралельних методів декомпозиції області типу Робіна для розв'язування задач про статичну рівновагу багатьох пружних тіл, з'єднаних через пружні прошарки, нормальна та зсувна жорсткість яких описується нелінійною вінклерівською моделлю. Проведено числовий аналіз задачі про плоску деформацію трьохшарової плити, використовуючи скінченноелементні апроксимації. Вивчено вплив параметрів прошарків на нормальні та дотичні контактні напруження.

1. Формулювання задачі

У тривимірному просторі введемо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, базисні вектори якої позначимо через $\mathbf{e}_i$, $i=\overline{1,3}$. Розглянемо задачу про статичну рівновагу системи N пружних анізотропних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha=\overline{1,N}$ (рис. 1). Вважаємо, що тіла з'єднані між собою через тонкі пружні проміжкові шари, нормальна та зсувна жорсткість яких описується нелінійним вінклерівським законом. Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N}\Omega_\alpha$.

Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha\, i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

$$\sum_{j=1}^{3}\partial\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\big/\partial x_j + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0\,,\quad i=\overline{1,3}\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega_\alpha\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^{3} C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})\ \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x})\,,\quad i,j=\overline{1,3}\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega_\alpha\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \left(\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})\big/\partial x_j + \partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})\big/\partial x_i\right)\big/2\,,\quad i,j=\overline{1,3}\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega_\alpha\,, \tag{3}$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α, а $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ — компоненти симетричного тензора пружних сталих, що володіють властивістю [12]:

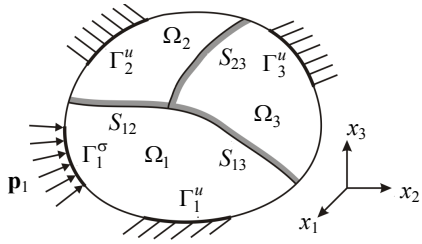

Рис. 1. Система пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки

$$\left(\exists b_\alpha, c_\alpha > 0\right)\left(\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha\right)\left\{ b_\alpha \sum\nolimits_{i,j} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \le \sum\nolimits_{i,j,k,l} C_{\alpha ijkl}\, \varepsilon_{\alpha ij}\, \varepsilon_{\alpha kl} \le c_\alpha \sum\nolimits_{k,l} \varepsilon_{\alpha kl}^2 \right\}. \quad (4)$$

На межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл уведемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\tau}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де $\mathbf{n}_\alpha$ — одинична зовнішня нормаль до Γ_α, а $\boldsymbol{\xi}_\alpha$, $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ — одиничні дотичні. Вектори переміщень і напружень на межі Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha.$$

Припустимо, що поверхня Γ_α складається з трьох частин: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \bigcup \Gamma_\alpha^\sigma \bigcup S_\alpha$ таких, що $\Gamma_\alpha^u \bigcap \Gamma_\alpha^\sigma \bigcap S_\alpha = \varnothing$, $\Gamma_\alpha^u \ne \varnothing$. Тут $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in I_\alpha} S_{\alpha\beta} \ne \varnothing$ — спільна межа тіла Ω_α з іншими тілами, $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ — спільна межа тіла Ω_α з тілом Ω_β, а $I_\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}$, $I_\alpha \ne \varnothing$, — множина індексів усіх тіл, які мають спільні межі з тілом Ω_α. На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задані кінематичні крайові умови (умови Діріхле), які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_α^σ — статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad (5)$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + p_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$ — задані граничні зусилля.

Тіла з'єднані вздовж поверхонь $S_{\alpha\beta}$ через тонкі прошарки вінклерівського типу. Стрибки $w_{\alpha\beta m} = -u_{\alpha m} - u_{\beta m}$, $m = \xi, \tau, n$, дотичних і нормальних переміщень тіл через ці поверхні є відомими нелінійними функціями відповідних контактних напружень

$$w_{\alpha\beta m}(\mathbf{x}) = \tilde{g}_{\alpha\beta m}(\sigma_{\alpha m}(\mathbf{x})) = \tilde{g}_{\alpha\beta m}(\sigma_{\beta m}(\mathbf{x})), \quad m = \xi, \tau, n, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Залежності, обернені до співвідношень (6), запишемо так:

$$\sigma_{\alpha m}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta m}(\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta m}(w_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})), \quad m = \xi, \tau, n, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Отже, на спільних межах $S_{\alpha\beta}$ тіл виконуються такі умови взаємодії через нелінійні вінклерівські прошарки:

$$\sigma_{\alpha m}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta m}(\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta m}(-u_{\alpha m}(\mathbf{x}) - u_{\beta m}(\mathbf{x})), \quad m = \xi, \tau, n, \quad (8)$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\beta \in I_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$.

Надалі вважатимемо, що нелінійні функції $g_{\alpha\beta m}(z)$, $m = \xi, \tau, n$, — неперервні та володіють властивостями:

$$\left(\forall m\right)\left(\forall \alpha, \beta\right)\left\{ g_{\alpha\beta m}(0) = 0 \right\}, \quad (9)$$

$$\left(\forall m\right)\left(\forall \alpha, \beta\right)\left(\forall y, z\right)\left\{ y < z \Rightarrow g_{\alpha\beta m}(y) < g_{\alpha\beta m}(z) \right\}, \quad (10)$$

$$\left(\forall m\right)\left(\forall \alpha, \beta\right)\left(\exists \tilde{M}_{\alpha\beta m} > 0\right)\left(\forall y, z\right)\left\{ \left| g_{\alpha\beta m}(y) - g_{\alpha\beta m}(z) \right| \le \tilde{M}_{\alpha\beta m} \left| y - z \right| \right\}. \quad (11)$$

2. Варіаційні формулювання

Здійснимо варіаційні формулювання контактної задачі (1)-(3), (5), (8) у вигляді проблеми мінімізації неквадратичного функціонала у гільбертовому просторі та нелінійного варіаційного рівняння.

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = \left[H^1(\Omega_\alpha)\right]^3$ та уведемо в них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \left\{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha :\ \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\right\}$ зі скалярним добутком $\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\alpha} \left(u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega$ і нормою $\left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_{V_\alpha^0} = \left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha\right)_{V_\alpha^0}^{1/2}$.

Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [13] і для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \ldots \times V_N^0 = \left\{\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N\right)^{\mathrm{T}} :\ \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0\right\}$. У просторі V_0 означимо скалярний добуток $\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right)_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right)_{V_\alpha^0}$ і норму $\left\| \mathbf{u} \right\|_{V_0} = \left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_{V_0}^{1/2}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$.

Введемо у просторі V_0 білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ таку, що $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2$ визначає сумарну енергію пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right),\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0,\ \ a_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \hat{\sigma}_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right) : \hat{\varepsilon}_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right) d\Omega, \quad (12)$$

лінійну форму $L(\mathbf{u})$, рівну роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} l_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad l_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, dS, \quad (13)$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in \left[L_2\left(\Omega_\alpha\right)\right]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in \left[L_2\left(\Gamma_\alpha^\sigma\right)\right]^3$, $\alpha = \overline{1, N}$, а також неквадратичний функціонал $J(\mathbf{u})$, що відповідає енергії пружної деформації нелінійних проміжкових шарів:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} \left[\int_0^{-u_{\alpha m} - u_{\beta m}} g_{\alpha\beta m}(z)\, dz \right] dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (14)$$

Тут $Q = \left\{\{\alpha,\beta\} :\ \alpha \in \{1,2,\ldots,N\},\ \beta \in I_\alpha\right\}$ — множина всеможливих невпорядкованих пар індексів тіл, з'єднаних через нелінійні вінклерівські шари.

Лема 1. [3, 14] Нехай межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$, тіл є ліпшицевими, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$, $\mathbf{f}_\alpha \in \left[L_2\left(\Omega_\alpha\right)\right]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in \left[L_2\left(\Gamma_\alpha^\sigma\right)\right]^3$, $C_{\alpha ijkl} \in L_\infty\left(\Omega_\alpha\right)$ та виконується умова (4). Тоді

білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — симетрична, неперервна з константою $M_A > 0$ і коерцитивна з константою $B_A > 0$, а лінійна форма $L(\mathbf{u})$ — неперервна.

Тепер розглянемо властивості неквадратичного функціонала $J(\mathbf{u})$. Цей функціонал — диференційовний за Ґато:

$$J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int\limits_{S_{\alpha\beta}}\sum_{m=\xi,\tau,n} g_{\alpha\beta m}\left(-u_{\alpha m}-u_{\beta m}\right)\left[v_{\alpha m}+v_{\beta m}\right]dS,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0. \quad (15)$$

Його диференціал Ґато $J'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — лінійний за $\mathbf{v}$, однак нелінійний за $\mathbf{u}$.

Нами доведено таке твердження:

Лема 2. Нехай поверхні $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, є ліпшицевими та виконуються умови (9)-(11). Тоді функціонал $J'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ володіє властивостями:

$$\left(\forall \mathbf{u}\in V_0\right)\left(\exists R_J>0\right)\left(\forall \mathbf{v}\in V_0\right)\left\{\left|J'(\mathbf{u},\mathbf{v})\right|\le R_J\left\|\mathbf{v}\right\|_{V_0}\right\}, \quad (16)$$

$$\left(\exists D_J>0\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V_0\right)\left\{\left|J'(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v})-J'(\mathbf{u},\mathbf{v})\right|\le D_J\left\|\mathbf{v}\right\|_{V_0}\left\|\mathbf{w}\right\|_{V_0}\right\}, \quad (17)$$

$$\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0\right)\left\{J'(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v})-J'(\mathbf{u},\mathbf{v})\ge 0\right\}. \quad (18)$$

Сформулюємо наступні теореми (доведення яких тут не наводимо).

Теорема 1. Контактна задача (1)-(3), (5), (8) еквівалентна в слабкому розумінні задачі мінімізації у просторі V_0 неквадратичного функціонала

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{u})/2 + J(\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in V_0}. \quad (19)$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови *леми 1* і *леми 2*. Тоді задача (19) має єдиний розв'язок $\overline{\mathbf{u}}\in V_0$ та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі V_0 нелінійного за $\mathbf{u}$ варіаційного рівняння

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}\in V_0,\quad \mathbf{u}\in V_0. \quad (20)$$

Отже, розв'язування вихідної контактної задачі (1)-(3), (5), (8) зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20) у гільбертовому просторі. Далі запропонуємо деякі ітераційні методи для розв'язування цього варіаційного рівняння.

3. Методи декомпозиції області

Для наближеного розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20), що відповідає вихідній контактній задачі, застосуємо такий неявний нестаціонарний ітераційний метод [3, 15]:

$$G^k\left(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}\right) = G^k\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) - \gamma^k\left[A\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) + J'\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) - L(\mathbf{v})\right],\quad k=0,1,\ldots, \quad (21)$$

де $G^k : V_0\times V_0\to\mathbb{R}$, $k=0,1,\ldots$, — деякі білінійні форми, задані у просторі V_0, $\gamma^k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\ldots$, — ітераційні параметри, а $\mathbf{u}^k\in V_0$, $k=0,1,\ldots$, — k-те наближення до точного розв'язку рівняння (20). Ми довели таке твердження про збіжність цього ітераційного методу.

Теорема 3. Нехай виконуються умови *леми 1* і *леми 2.* Окрім цього, нехай білінійні форми G^k, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,...\}$, є симетричні, неперервні з константою $M_G^* > 0$ і коерцитивні з константою $B_G^* > 0$, а також справджуються умови:

$$\left(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0\right)\left(\forall k \geq k_0\right)\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right)\left\{ G^k(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq G^{k+1}(\mathbf{u},\mathbf{u})\right\}, \tag{22}$$

$$\left(\exists \varepsilon \in \left(0,\, \gamma^*\right),\, \gamma^* = \frac{B_A B_G^*}{\left(M_A + D_J\right)^2}\right)\left(\exists k_1 \in \mathbb{N}_0\right)\left(\forall k \geq k_1\right)\left\{ \gamma^k \in \left[\varepsilon,\, 2\gamma^* - \varepsilon\right]\right\}. \tag{23}$$

Тоді для будь-якого $\mathbf{u}^k \in V_0$ задача, що розв'язується на кроці $k \in \mathbb{N}_0$ ітераційного методу (21), має єдиний розв'язок $\mathbf{u}^{k+1} \in V_0$, а послідовність $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$, отримана цим методом, збігається сильно у просторі V_0 при $k \to \infty$ до точного розв'язку $\overline{\mathbf{u}} \in V_0$ задачі (20), тобто $\left\|\mathbf{u}^k - \overline{\mathbf{u}}\right\|_{V_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 4 у роботі [16].

Якщо $\gamma^k = \gamma$, $k = 0,1,\ldots$, то умову (23) у *теоремі 3* слід замінити умовою $\left\{\gamma \in \left(0, 2\gamma^*\right),\, \gamma^* = B_A B_G^* \big/ \left(M_A + D_J\right)^2\right\}$.

Однак у загальному випадку ітераційний метод (21) для розв'язування рівняння (20) не призводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому запропонуємо такі варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують декомпозицію за підобластями, тобто які зводять розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20) у всій області Ω до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α. Декомпозиції можна досягти завдяки певному вибору білінійних форм G^k в ітераційному процесі (21).

Надалі будемо вважати, що функції $g_{\alpha\beta m}(z)$, $m = \xi, \tau, n$, — диференційовні. Тоді функціонали J та F будуть двічі диференційовними за Ґато. Виберемо білінійні форми G^k у методі (21) так:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{24}$$

$$J''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \sum_{\{\alpha,\,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right)\left[u_{\alpha m} + u_{\beta m}\right]\left[v_{\alpha m} + v_{\beta m}\right] dS, \tag{25}$$

де $F''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right)$ та $J''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right)$ — другі диференціали Ґато функціоналів F та J у точці $\mathbf{u}^k \in V_0$ за напрямками $\mathbf{u} \in V_0$ і $\mathbf{v} \in V_0$.

Ітераційний метод (21) із білінійними формами (24) при $\gamma^k = 1$, $k = 0,1,...$ відповідає неявному методу Ньютона для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20). Проте нестаціонарний ітераційний метод (21), (24) не призводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми G^k у методі (21) виберемо так:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{26}$$

де $X^k : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ — такі білінійні форми:

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta\in I_\alpha} \sum_{m=\xi,\tau,n} \int\limits_{S^k_{\alpha\beta m}} g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) u_{\alpha m} v_{\alpha m}\, dS =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta\in I_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} \psi^k_{\alpha\beta m}\, g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) u_{\alpha m} v_{\alpha m}\, dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{27}$$

Тут $S^k_{\alpha\beta m} \subseteq S_{\alpha\beta}$, $m = \xi,\tau,n$, $k \in \mathbb{N}_0$, — деякі задані підмножини поверхонь $S_{\alpha\beta}$, а $\psi^k_{\alpha\beta m}(\mathbf{x}) = \left\{0,\ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S^k_{\alpha\beta m}\right\} \vee \left\{1,\ \mathbf{x} \in S^k_{\alpha\beta m}\right\}$ — характеристичні функції, які визначають ці підмножини.

Покажемо, що такий вибір G^k зумовлює декомпозицію за підобластями. Увівши позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \left[\mathbf{u}^{k+1} - \left(1-\gamma^k\right)\mathbf{u}^k\right] \Big/ \gamma^k$, ітераційний метод (21) з білінійними формами (26) перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) + X^k\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) = L(\mathbf{v}) + X^k\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) - J'\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \tag{28}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \left(1-\gamma^k\right)\mathbf{u}^k, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{29}$$

Оскільки спільні величини для підобластей є відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (28) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α, і метод (28), (29) еквівалентний ітераційному процесу:

$$a_\alpha\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha\right) + \sum_{\beta\in I_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} \psi^k_{\alpha\beta m}\, g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) \tilde{u}^{k+1}_{\alpha m} v_{\alpha m}\, dS =$$

$$= l_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right) + \sum_{\beta\in I_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} \psi^k_{\alpha\beta m}\, g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) u^k_{\alpha m} v_{\alpha m}\, dS +$$

$$+ \sum_{\beta\in I_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \sum_{m=\xi,\tau,n} g_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) v_{\alpha m}\, dS \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V^0_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,N}, \tag{30}$$

$$\mathbf{u}^{k+1}_\alpha = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha + \left(1-\gamma^k\right)\mathbf{u}^k_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,N}, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{31}$$

На кожному ітераційному кроці k методу (30), (31) необхідно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (30) в окремих тілах Ω_α, які відповідають лінійним задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на спільних межах $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta m} + \varphi^k_{\alpha\beta m}\, \tilde{u}^{k+1}_{\alpha m} = g_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right) + \varphi^k_{\alpha\beta m}\, u^k_{\alpha m}, \quad m = \xi,\tau,n, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \tag{32}$$

де $\varphi^k_{\alpha\beta m} = \psi^k_{\alpha\beta m}\, g'_{\alpha\beta m}\left(-u^k_{\alpha m} - u^k_{\beta m}\right)$, $m = \xi, \tau, n$, а $\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta\xi}$, $\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta\tau}$, $\tilde{\sigma}^{k+1}_{\alpha\beta n}$ — невідомі дотичні та нормальні напруження на поверхнях $S_{\alpha\beta}$. Тому ітераційний метод (30), (31) належить до *паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області* [3, 11, 14-17].

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi^k_{\alpha\beta m} = \psi^k_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})$, $m = \xi, \tau, n$; $\beta \in I_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$, $k = 0, 1, \ldots$, у білінійній формі (27), тобто різні підмножини $S^k_{\alpha\beta m} \subseteq S_{\alpha\beta}$, отримаємо різні варіанти методу декомпозиції області (30), (31). Так, покладаючи $\psi^k_{\alpha\beta m}(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто $S^k_{\alpha\beta m} = \varnothing$, $\forall m$, $\forall \alpha, \beta$, $\forall k$, отримаємо *паралельну схему Неймана.* Інший граничний випадок відповідає $\psi^k_{\alpha\beta m}(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $S^k_{\alpha\beta m} = S_{\alpha\beta}$ $\forall m$, $\forall \alpha, \beta$, $\forall k$. Таку схему декомпозиції області назвемо *повною паралельною схемою Робіна.*

Числові експерименти, проведені нами, показали, що швидкість збіжності повної паралельної схеми Робіна, зазвичай, є вища, ніж паралельної схеми Неймана.

Отже, отримали клас методів декомпозиції області (30), (31), які зводять розв'язування вихідної нелінійної контактної задачі для системи тіл до розв'язування послідовності незалежних лінійних задач теорії пружності в окремих тілах. Такий підхід дозволяє застосовувати найефективніші числові методи та математичні моделі в окремих тілах, а також організовувати розпаралелення обчислень.

4. Числові дослідження

Числову апробацію запропонованих методів декомпозиції області (30), (31) здійснено для плоскої задачі про статичну рівновагу трьох пружних ізотопних прямокутних тіл Ω_1, Ω_2 й Ω_3, з'єднаних через тонкі нелінійні вінклерівські проміжкові шари (рис. 2).

Довжина та висота кожного з тіл відповідно дорівнюють $l = 4$ см та $h = 1$ см. Усі тіла жорстко закріплені з лівого боку та гладко закріплені на правій межі. На верхню грань тіла Ω_3 діє стискальне навантаження сталої інтенсивності $q = 10$ МПа. Модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл є однакові: $E_\alpha = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_\alpha = 0{,}3$, $\alpha = \overline{1, 3}$.

Тіла з'єднані між собою вздовж поверхонь S_{12} і S_{23} через нелінійні прошарки вінклерівського типу. Нелінійні функції, які описують зв'язок між напруженнями та стрибками переміщень вінклерівських прошарків, вибирали у вигляді:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta m}\left(\sigma_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right) = B_m \operatorname{sgn}\left(\sigma_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right)\left|\sigma_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right|^{a_m}, \quad m = \tau, n,$$

$$g_{\alpha\beta m}\left(w_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right) = B_m^{-1/a_m} \operatorname{sgn}\left(w_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right)\left|w_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\right|^{1/a_m}, \quad m = \tau, n,$$

$$\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\},$$

де $\sigma_{\alpha\beta m}(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha m}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta m}(\mathbf{x})$, $m = \tau, n$, $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, — контактні напруження на поверхні $S_{\alpha\beta}$. Параметри нелінійних проміжкових шарів задавали з інтервалів $B_m \in \left[10^{-6}\ \text{см}/(\text{МПа})^{a_m},\ 10^{-3}\ \text{см}/(\text{МПа})^{a_m}\right]$, $a_m \in (0, 1]$, $m = \tau, n$.

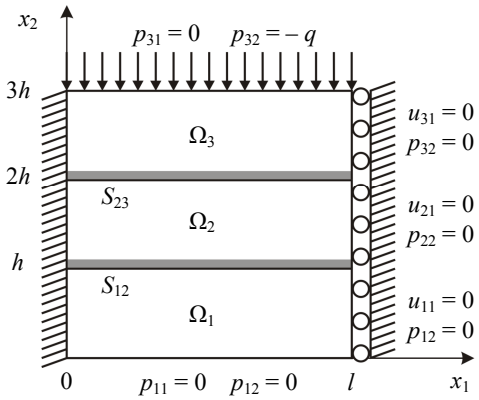

Рис. 2. Плоска деформація трьох пружних тіл,
з'єднаних через вінклерівські прошарки

Задачу розв'язано паралельним методом декомпозиції області (30), (31) з характеристичними функціями $\psi^k_{\alpha\beta m}(\mathbf{x})\equiv 1 \ \ \forall m$, $\forall\alpha,\beta$, $\forall k$. Для числового розв'язування лінійних задач теорії пружності (30) в окремих тілах на кожній ітерації застосовано метод скінченних елементів з лінійними трикутними елементами. Для кожного з тіл використовували розбиття на 1024 скінченні елементи. Початкові наближення для переміщень задавали у вигляді $u^0_{\alpha m}(\mathbf{x})\equiv 10^{-8}$ см, $m=\tau,n$, $\alpha=\overline{1,3}$. Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій

$$\left\|u^{k+1}_{\alpha m}-u^{k}_{\alpha m}\right\|_2 \Big/ \left\|u^{k+1}_{\alpha m}\right\|_2 \le \varepsilon_u, \quad m=\tau,n, \quad \alpha=\overline{1,3},$$

де $\left\|u_{\alpha m}\right\|_2=\sqrt{\sum_j\left[u_{\alpha m}\left(\mathbf{x}^j\right)\right]^2}$ — дискретна норма, $\mathbf{x}^j\in S_\alpha$ — вузли скінченно-елементного розбиття межі S_α, $\alpha=\overline{1,3}$, $S_1=S_{12}$, $S_2=S_{21}\bigcup S_{23}$, $S_3=S_{32}$, а $\varepsilon_u>0$ — відносна точність для переміщень. Ітераційні параметри γ^k задавали однаковими на кожній ітерації: $\gamma^k=\gamma$, $k=0,1,\ldots$. Обчислення проводили для відносної точності $\varepsilon_u=10^{-3}$ за ітераційного параметра $\gamma=0{,}7$.

Досліджено вплив параметра B_τ проміжкових шарів на числові розв'язки. На рис. 3 зображено графіки нормальних контактних напружень σ_{12n} між тілами Ω_1 і Ω_2 та σ_{23n} між тілами Ω_2 і Ω_3, а на рис. 4 — графіки дотичних контактних напружень $\sigma_{12\tau}$ та $\sigma_{23\tau}$, отриманих методом декомпозиції області (30), (31) для параметрів $a_\tau=1$; $a_n=0{,}5$; $B_n=10^{-5}$ см$/\left(\text{МПа}\right)^{a_n}$ за різних значень коефіцієнта B_τ. Криві 1-3 на рис. 3 відповідають нормальним напруженням σ_{12n} для коефіцієнтів $B_\tau=10^{-5},10^{-4},10^{-3}$ см / МПа, а криві 4-6 — напруженням σ_{23n} для цих же

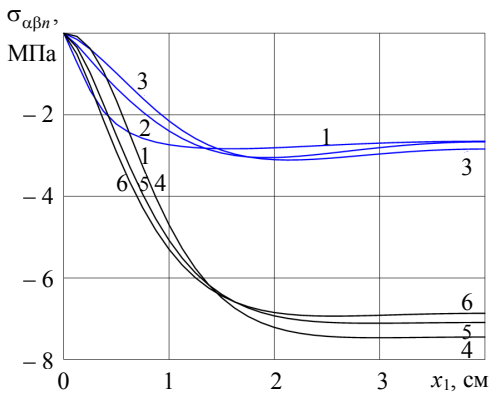

Рис. 3. Вплив B_τ на нормальні напруження $\sigma_{\alpha\beta n}$

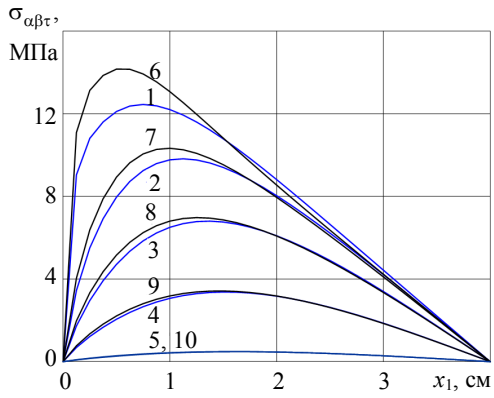

Рис. 4. Вплив B_τ на дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta\tau}$

коефіцієнтів. Криві 1-5 на рис. 4 відповідають дотичним напруженням $\sigma_{12\tau}$, а криві 6-10 — напруженням $\sigma_{23\tau}$ для коефіцієнтів $B_\tau = 10^{-6}, 10^{-5}, 3\cdot10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ см / МПа. При цьому схема декомпозиції області (30), (31) за коефіцієнтів B_τ, для яких наведено результати на рис. 4 (криві 1-5), досягає відносної точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ відповідно за 111, 50, 46, 77 та 156 ітерацій.

Отримані результати показують, що зміна параметра B_τ мало впливає на характер розподілів нормальних контактних напружень (рис. 3). Зменшення коефіцієнта B_τ за фіксованих значеннях параметрів a_τ, a_n, B_n призводить до зменшення нормального контактного напруження σ_{23n} між верхнім і середнім тілом на ділянці $x_1 \in [1{,}63 \text{ см}, 4 \text{ см}]$ та до його збільшення на ділянці $x_1 \in [0 \text{ см}, 1{,}375 \text{ см}]$ (криві 6, 5, 4). Вплив цього коефіцієнта на нормальне контактне напруження σ_{12n} між нижнім і середнім тілом є протилежним — під час зменшення коефіцієнта B_τ відбувається збільшення напруження σ_{12n} на відрізку $x_1 \in [1{,}76 \text{ см}, 4\text{см}]$ та його зменшення на відрізку $x_1 \in [0 \text{ см}, 1{,}32 \text{ см}]$ (криві 3, 2, 1). Мінімум контактного напруження σ_{23n} досягається на правій межі тіл у точці з абсцисою $x_1 = 4$ см, а мінімум контактного напруження σ_{12n} — у точках, що знаходяться ближче до середини межі S_{12}. При зменшенні параметра B_τ відбувається зменшення мінімуму напруження σ_{23n} та збільшення мінімуму напруження σ_{12n}. При цьому точка мінімуму контактного напруження σ_{12n} зміщується вліво.

Із рис. 4 випливає, що вплив коефіцієнта B_τ на розподіли дотичних контактних напружень $\sigma_{\alpha\beta\tau}$ є істотніший, ніж на нормальні контактні напруження $\sigma_{\alpha\beta n}$. За $B_\tau = 10^{-3}$ см / МПа графіки контактних напружень $\sigma_{12\tau}$ і $\sigma_{23\tau}$ близькі до нуля і майже співпадають (криві 5, 10). Зменшення цього коефіцієнта призводить до значного зростання дотичних контактних напружень $\sigma_{12\tau}$ і $\sigma_{23\tau}$.

При цьому напруження $\sigma_{23\tau}$ зростають швидше, ніж $\sigma_{12\tau}$, а їхні розподіли все більше відрізняються. Максимум дотичних контактних напружень за коефіцієнта $B_\tau = 10^{-3}$ см / МПа досягається біля середини ділянок контакту поблизу точки з абсцисою $x_1 = 2$ см. При зменшенні B_τ відбувається зміщення вліво точки максимуму дотичних контактних напружень.

Висновки. Розглянуто задачу про статичну рівновагу багатьох пружних скінченних тіл, з'єднаних через нелінійні шари вінклерівського типу. Здійснено слабкі формулювання цієї задачі у вигляді проблеми мінімізації неквадратичного функціонала у гільбертовому просторі та еквівалентного їй нелінійного варіаційного рівняння. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку цих варіаційних задач.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано на континуальному рівні клас паралельних нестаціонарних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна. Ці МДО зводять розв'язування нелінійної контактної задачі у всій області до паралельного розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих підобластях (тілах), що еквівалентні в слабкому розумінні лінійним задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна на спільних межах тіл.

Числову апробацію отриманих методів декомпозиції області проведено для задачі про плоску деформацію трьохшарового пружного прямокутного тіла, застосовуючи скінченноелементні апроксимації. Досліджено вплив параметрів проміжкових шарів на розподіли нормальних і дотичних контактних напружень.

Перевагами запропонованих методів є простота їх алгоритмів, можливість організації паралельних обчислень і використання різних математичних моделей та числових методів у окремих підобластях (тілах). Ці МДО мають лише один ітераційний цикл, у якому на кожній ітерації декомпозиція за підобластями здійснюється одночасно з урахуванням нелінійних контактних умов. Зазначимо, що, оскільки ці методи розроблено на континуальному рівні, то вибір числового методу для розв'язування задач в окремих тілах мало впливає на їхню швидкість збіжності.

Література

[1] *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. — Москва: Наука, 1983. — 488 с.

[2] *Suquet P. M.* Discontinuities and plasticity // In: Nonsmooth mechanics and applications / Ed. by *J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos*. — Springer: Wien-New York, 1988. — P. 279-340. — CISM Courses and Lectures. — No 302.

[3] *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 43-56.

[4] *Бабин А. П., Зернин М. В.* Конечноэлементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 4. — С. 84-107.

[5] *Блох М. В., Оробинский А. В.* О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. — 1983. — № 5. — С. 24-27.

[6] *Зайцев В. И., Щавелин В. М.* Метод решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых поверхностей взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 1. — С. 88-94.

[7] Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / *А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач* и др. — Киев: Наук. думка, 1989. — 232 с.

[8] *Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г.* Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. н.-т. конф. — Харьков, ХИСИ, 1989. — С. 83-85.

[9] *Bresch D., Koko J.* An optimization-based domain decomposition method for nonlinear wall laws in coupled systems // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2004. — Vol. 14, No 7. — P. 1085-1101.

[10] *Koko J.* Convergence analysis of optimization-based domain decomposition methods for a bonded structure // Appl. Numer. Math. — 2008. — Vol. 58, No 1. — P. 69-87.

[11] Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers / *I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn* // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2014. — Vol. 98. — P. 739-748.

[12] *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988. — 489 p.

[13] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 588 с.

[14] *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 — «Мат. моделювання та обчисл. методи». — Львів, 2010. — 163 с.

[15] *Прокопишин І. І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 75-87.

[16] *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin-Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. — 2012. — http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf. — 32 p.

[17] Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity / *I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn* // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2013. — Vol. 91. — P. 647-654.

Domain decomposition methods for problem of static equilibrium of system of elastic bodies connected through thin nonlinear interlayers

Ihor Prokopyshyn

We have proposed variational formulations of a problem of static equilibrium of a system of elastic bodies connected through intermediate layers, the normal and tangential stiffness of which is described by the nonlinear Winkler model. The conditions of existence and uniqueness of a solution of the variational problems have been established. For solving the nonlinear variational equation, that corresponds to the original contact problem, on the continuous level we have developed a set of parallel nonstationary iterative domain decomposition methods of Robin type. The numerical investigations of these methods for the problem of plane deformation of the three-layered rectangular body using the finite element approximations have been performed.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2015, вип. 21, 173-185

Методы декомпозиции области для задачи о статическом равновесии системы упругих тел, соединенных через тонкие нелинейные прослойки

Игорь Прокопышин

Осуществлены вариационные формулировки задачи о статическом равновесии системы упругих тел, соединенных через промежуточные слои, нормальная и сдвиговая жесткость которых описывается нелинейной винклеровской моделью. Установлены условия существования и единственности решения вариационных задач. Для нахождения решения нелинейного вариационного уравнения, соответствующего исходной контактной задаче, предложен на континуальном уровне ряд параллельных нестационарных итерационных методов декомпозиции области типа Робина. Проведены численные исследования этих методов для задачи о плоской деформации трехслойного прямоугольного тела на основе конечно-элементных аппроксимаций.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 20.02.15