

Математичне моделювання та дослідження термопружного стану кусково-однорідного по осі термочутливого циліндра

Ірина Ракоча¹, Василь Попович²

¹ Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: irinka.rakocha@gmail.com

² д. т. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

Сформульовано математичну модель і на її основі визначено стаціонарний розподіл температури у трискладовому по осі термочутливому циліндрі за умов задання сталих значень температури плоских обмежувальних поверхонь, ізоляції циліндричної поверхні, тепловиділень у внутрішньому складнику й ідеальному теплообміні контактуючих складників. Знайдено температурні напруження та досліджено вплив залежності теплових (коефіцієнтів теплопровідності) та механічних (модулів пружності, коефіцієнтів Пуассона та температурних коефіцієнтів лінійного розширення) характеристик матеріалів складників від температури на рівень і характер розподілу температури та напружень.

Ключові слова: кусково-однорідний циліндр, термочутливий матеріал, температура, температурні напруження.

Вступ. Для реалізації сучасних вимог інженерної практики щодо розрахунку температурних полів і викликаних ними напружень у багатошарових елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, використовують модель термочутливого тіла, що враховує залежність теплових і механічних характеристик матеріалів складників від температури. Така модель точніше описує їх тепловий і термопружний стани. Однак відповідні задачі, які є математичними моделями для визначення полів температури та напружень, зазвичай, не мають точних аналітичних розв'язків, а тому потребують розробки нових методів їх побудови. При цьому важливо також враховувати реальні умови їх нагрівання та взаємодії з навколишнім середовищем.

Детальний огляд досліджень, які стосуються визначення термопружного стану термочутливих тіл від початку виникнення проблеми до її сучасного стану, подано в роботі [1]. Математичні моделі термопружного стану багатошарових тіл, у яких враховано залежність термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури, та нові методи їх розв'язування описані в працях [1-3]. Про важливість врахування термочутливості матеріалів складників під час визначення розподілів температури та напружень свідчать публікації у вітчизняних і зарубіжних виданнях [1, 2, 4-8]. Дослідження термопружного стану таких кусково-

однорідних циліндричних тіл є актуальним, наприклад, за теплового проектування мікроелектронних пристроїв [9], де протікає електричний струм, що є причиною наявності у складниках неоднорідного виділення тепла.

1. Формулювання задачі

Розглядається скінченної висоти термочутливий циліндр, який складається з трьох різної висоти циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається розташованими в середньому складнику джерелами тепла, які розподілені за параболічним законом. На плоских обмежувальних поверхнях складників циліндра $\tilde{z} = \{\tilde{z}_1, \tilde{z}_4\}$ підтримуються сталі температури $t = \{t_{\text{en}1}, t_{\text{en}2}\}$, а їх зовнішні поверхні теплоізовані. На поверхнях дотику сусідніх складників $\tilde{z} = \{\tilde{z}_2, \tilde{z}_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту. За таких умов ставиться завдання визначити розподіл температури та спричинений нею напружений стан такого кусково-однорідного циліндра. Зазначимо відразу, що за заданих теплових дій і теплової ізоляції циліндричної поверхні потік тепла у радіальному напрямі відсутній, а, отже, розподіл температури в циліндрі буде залежати від осевої координати.

2. Математична модель для визначення розподілу температури

Вона включає рівняння теплопровідності складників

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{d\tilde{z}} \right) = 0, \quad \tilde{z}_1 < \tilde{z} < \tilde{z}_2, \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\tilde{z}} \right) = -\frac{4W}{(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2)^2} (\tilde{z} - \tilde{z}_2)(\tilde{z} - \tilde{z}_3), \quad \tilde{z}_2 < \tilde{z} < \tilde{z}_3; \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{dt_3}{d\tilde{z}} \right) = 0, \quad \tilde{z}_3 < \tilde{z} < \tilde{z}_4; \quad (3)$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$t_1|_{\tilde{z}=\tilde{z}_1} = t_{\text{en}1}, \quad t_3|_{\tilde{z}=\tilde{z}_4} = t_{\text{en}2}; \quad (4)$$

- умови контакту на поверхнях дотику складників циліндра:

$$t_1|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2} = t_2|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2}, \quad t_2|_{\tilde{z}=\tilde{z}_3} = t_3|_{\tilde{z}=\tilde{z}_3}; \quad (5)$$

$$\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2} = \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2}, \quad \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_3} = \lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{dt_3}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_3}. \quad (6)$$

Модель (1)-(6) є нелінійна внаслідок залежності коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ ($i = 1, 3$) від температур t_i та такі експериментально отримані залежності у довідниковій літературі переважно задають у вигляді таблиць.

Нехай коефіцієнти теплопровідності кожного складника циліндра задані у діапазоні температури $[t_p, t_k]$. Під час проведення теоретичних досліджень їх будемо описувати доволі поширеними лінійними залежностями $\lambda_i^{(i)} = a_i t_i + b_i$, де параметри a_i та b_i є невідомі. За методом найменших квадратів їх підбираємо так, щоб сума квадратів різниць їх експериментальних і теоретичних значень була найменшою.

Подамо коефіцієнти теплопровідності складників циліндра у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*}(T_i)$, де величини $\lambda_{t_0}^{(i)}$ мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а $\lambda_t^{(i)*}(T_i)$ — безрозмірна функція безрозмірної температури $T_i = t_i/t_k$, $i = \overline{1,3}$ (тут за відлікову вибрано температуру t_k). За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такі подання матимуть вигляд

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \left[1 + k_i (T_i - T_p) \right], \quad (7)$$

де $\{T_p, T_{\text{ен1}}, T_{\text{ен2}}\} = \{t_p, t_{\text{ен1}}, t_{\text{ен2}}\}/t_k$, $k_i = a_i t_k / (a_i t_p + b_i)$, а $\lambda_{t_0}^{(i)} = a_i t_p + b_i$.

Для запису задачі (1)-(6) у безрозмірному вигляді виберемо за характерний розмір деяке значення l_0 і введемо безрозмірну координату $z = \tilde{z}/l_0$.

Внаслідок знерозмірення та введення змінних Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T_i) dT_i, \quad i = \overline{1,3},$$

із задачі (1)-(6) отримаємо задачу щодо змінних θ_i :

$$\frac{d^2 \theta_1}{dz^2} = 0, \quad z_1 < z < z_2; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dz^2} = -\frac{4Po}{(z_3 - z_2)^2} (z - z_2)(z - z_3), \quad z_2 < z < z_3; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \theta_3}{dz^2} = 0, \quad z_3 < z < z_4; \quad (10)$$

$$\theta_1|_{z=z_1} = \theta_{\text{ен1}}, \quad \theta_3|_{z=z_4} = \theta_{\text{ен2}}; \quad (11)$$

$$T_1(\theta_1)|_{z=z_2} = T_2(\theta_2)|_{z=z_2}, \quad T_2(\theta_2)|_{z=z_3} = T_3(\theta_3)|_{z=z_3}; \quad (12)$$

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda^{(2)} \frac{d\theta_2}{dz} \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{d\theta_2}{dz} \Big|_{z=z_3} = K_\lambda^{(3)} \frac{d\theta_3}{dz} \Big|_{z=z_3}, \quad (13)$$

де $Po = W l_0^2 / (t_k \lambda_{t_0}^{(2)})$ — критерій Померанцева; $T_c = t_c/t_k$, $K_\lambda^{(2)} = \lambda_{t_0}^{(2)} / \lambda_{t_0}^{(1)}$, $K_\lambda^{(3)} = \lambda_{t_0}^{(3)} / \lambda_{t_0}^{(2)}$.

Бачимо, що внаслідок застосування перетворення Кірхгофа з нелінійної задачі теплопровідності отримано простішу задачу щодо змінних Кірхгофа, в якій проблема нелінійності перемістилася у вирази температури $T_i(\theta_i)$ на поверхнях контакту сусідніх складників циліндра. За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності складників від температури (7), із формул змінних Кірхгофа отримуємо рівняння

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_i^{(i)*}(T_i) dT_i = (T_i - T_p) + \frac{k_i}{2}(T_i - T_p)^2, \quad (14)$$

розв'язавши які, знаходимо

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1}{k_i} + T_p. \quad (15)$$

Зазначимо, що вибраний перед коренем квадратним у виразах $T_i(\theta_i)$ знак забезпечує їх фізичну коректність.

Інтегрування рівняння (8)-(10) дає

$$\begin{aligned} \theta_1 &= C_{11}(z - z_1) + C_{12}, \\ \theta_2 &= C_{21}(z - z_2) + C_{22} - \frac{4Po}{(z_3 - z_2)^2} \left[\frac{z^4}{12} - \frac{z^3}{6}(z_2 + z_3) + \frac{z^2}{2}z_2z_3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{6}(z_2^3 - 3z_2^2z_3) - \frac{z_2^3}{12}(z_2 - 2z_3) \right], \\ \theta_3 &= C_{31}(z - z_3) + C_{32}. \end{aligned} \quad (16)$$

Із крайових умов (11) і (13) знаходимо значення сталої інтегрування C_{12} та отримуємо залежність C_{11} , C_{31} , C_{32} від C_{21}

$$\begin{aligned} C_{11} &= K_\lambda^{(2)} C_{21}, \quad C_{12} = (T_{\text{вн1}} - T_p) + k_1 (T_{\text{вн1}} - T_p)^2 / 2, \quad C_{31} = (2C_{21} + PoU) / K_\lambda^{(3)}, \\ C_{32} &= (T_{\text{вн2}} - T_p) + k_3 (T_{\text{вн2}} - T_p)^2 / 2 - (z_4 - z_3)(2C_{21} + PoU) / K_\lambda^{(3)}. \end{aligned}$$

Замість умов (12) використаємо подані в роботі [2] рівносильні їм умови

$$\begin{aligned} (\theta_2 - \theta_1) \Big|_{z=z_2} &= \frac{k_2 - k_1}{2} (T_1(\theta_1) - T_p)^2 \Big|_{z=z_2}, \\ (\theta_3 - \theta_2) \Big|_{z=z_3} &= \frac{k_3 - k_2}{2} (T_2(\theta_2) - T_p)^2 \Big|_{z=z_3}. \end{aligned} \quad (17)$$

де $T_i(\theta_i)$ ($i=1,2$) мають вигляд (15). Це дає змогу отримати залежності сталих інтегрування C_{22} від C_{21}

$$C_{22} = K_{\lambda}^{(2)} C_{21} (z_2 - z_1) + (T_{\theta n1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{\theta n1} - T_p)^2 + \\ + \frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \left\{ \sqrt{1 + 2k_1 \left[K_{\lambda}^{(2)} C_{21} (z_2 - z_1) + (T_{\theta n1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{\theta n1} - T_p)^2 \right]} - 1 \right\}^2$$

та отримати рівняння для визначення сталої C_{21} :

$$C_{32} + PoV - C_{21} (z_3 - z_2) - C_{22} - \\ - \left[(k_3 - k_2) / 2k_2^2 \right] \left\{ \sqrt{1 + 2k_2 \left[C_{21} (z_2 - z_1) + C_{22} - PoV \right]} - 1 \right\}^2 = 0.$$

В отриманих вище формулах для обчислення сталих інтегрування залежностей (16) введено позначення

$$U = -4 \left(-z_3^3 / 6 + z_3^2 z_2 / 2 + z_2^3 / 6 - z_2^2 z_3 / 2 \right) / (z_3 - z_2)^2, \\ V = -4 \left(-z_3^4 / 12 + z_3^3 z_2 / 3 + z_2^3 z_3 / 3 - z_2^2 z_3^2 / 3 - z_2^4 / 12 \right) / (z_3 - z_2)^2.$$

Рівняння для визначення сталої C_{21} розв'язано з допомогою програми аналітичних перетворень. Воно має два аналітичні розв'язки, які не приводимо через їх громіздкість. Із них для подальшого числового дослідження вибираємо максимально наближений до значення цієї сталої у відповідному виразі температури нетермочутливого циліндра, що забезпечує фізичну коректність розв'язку.

3. Визначення розподілу температури в кусково-однорідному по осі нетермочутливому циліндрі

Знерозмірена математична модель для визначення температури в аналогічному нетермочутливому циліндрі має вигляд:

$$\frac{d^2 T_{1n}}{dz^2} = 0, \quad z_1 < z < z_2; \quad (18)$$

$$\frac{d^2 T_{2n}}{dz^2} = -\frac{4Po_n}{(z_3 - z_2)^2} (z - z_2)(z - z_3), \quad z_2 < z < z_3; \quad (19)$$

$$\frac{d^2 T_{3n}}{dz^2} = 0, \quad z_3 < z < z_4; \quad (20)$$

$$T_{1n}|_{z=z_1} = T_{\theta n1}, \quad T_{3n}|_{z=z_4} = T_{\theta n2}; \quad (21)$$

$$T_{1n}|_{z=z_2} = T_{2n}|_{z=z_2}, \quad T_{2n}|_{z=z_3} = T_{3n}|_{z=z_3}; \quad (22)$$

$$\frac{dT_{1n}}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_{\lambda n}^{(2)} \frac{dT_{2n}}{dz} \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{dT_{2n}}{dz} \Big|_{z=z_3} = K_{\lambda n}^{(3)} \frac{dT_{3n}}{dz} \Big|_{z=z_3}, \quad (23)$$

де $Po_n = Po \lambda_{t0}^{(2)} / \lambda_{tn}^{(2)}$, $K_{\lambda n}^{(2)} = K_{\lambda}^{(2)} (\lambda_{t0}^{(1)} \lambda_{tn}^{(2)}) / (\lambda_{tn}^{(1)} \lambda_{t0}^{(2)})$, $K_{\lambda n}^{(3)} = K_{\lambda}^{(2)} (\lambda_{t0}^{(1)} \lambda_{tn}^{(2)}) / (\lambda_{tn}^{(1)} \lambda_{t0}^{(2)})$.

Із задачі (18)-(20) знаходимо

$$\begin{aligned} T_{1n} &= \bar{C}_{11}(z - z_1) + \bar{C}_{12}, \\ T_{2n} &= \bar{C}_{21}(z - z_2) + \bar{C}_{22} - \frac{4Po_n}{(z_3 - z_2)^2} \left[z^4/12 - (z_2 + z_3)z^3/6 + z_2z_3z^2/2 + \right. \\ &\quad \left. + (z_2^3 - 3z_2^2z_3)z/6 - (z_2 - 2z_3)z_2^3/12 \right], \\ T_{3n} &= \bar{C}_{31}(z - z_3) + \bar{C}_{32}. \end{aligned} \quad (24)$$

З умов (21)-(23) отримуємо сталі інтегрування:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ K_{\lambda n}^{(2)} \left[K_{\lambda n}^{(3)} (T_{\text{вн}2} - T_{\text{вн}1} - Po_n V) - Po_n U (z_4 - z_3) \right] \right\}, \quad \bar{C}_{12} = T_{\text{вн}1}, \\ \bar{C}_{21} &= \frac{1}{\Delta} \left[K_{\lambda n}^{(3)} (T_{\text{вн}2} - T_{\text{вн}1} - Po_n V) - Po_n U (z_4 - z_3) \right], \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ T_{\text{вн}1} \left[K_{\lambda n}^{(3)} (z_3 - z_2) + (z_4 - z_3) \right] - K_{\lambda n}^{(2)} (z_2 - z_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[Po_n U (z_4 - z_3) + K_{\lambda n}^{(3)} (Po_n V - T_{\text{вн}2}) \right] \right\}, \\ \bar{C}_{31} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ T_{\text{вн}2} - T_{\text{вн}1} - Po_n V + Po_n U \left[(z_3 - z_2) + K_{\lambda n}^{(2)} (z_2 - z_1) \right] \right\}, \\ \bar{C}_{32} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ (z_4 - z_3) (T_{\text{вн}1} + Po_n V) + \left[(z_3 - z_2) + K_{\lambda n}^{(2)} (z_2 - z_1) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[K_{\lambda n}^{(3)} T_{\text{вн}2} - Po_n U (z_4 - z_3) \right] \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\Delta = K_{\lambda n}^{(2)} K_{\lambda n}^{(3)} (z_2 - z_1) + K_{\lambda n}^{(3)} (z_3 - z_2) + (z_4 - z_3).$$

4. Визначення температурних напружень

Якщо модулі пружності $E_i(t_i)$, коефіцієнти Пуассона $\nu_i(t_i)$ та коефіцієнти теплового розширення $\alpha_{ii}(t_i)$ складників циліндра подати у вигляді $\chi_i(t) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T)$, де $\chi_0^{(i)}$ — розмірні величини, що дорівнюють значенню відповідної характеристики за температури t_p , а величини $\chi_i^*(T_i)$ — безрозмірні функції від безрозмірних температур T_i , то

$$\nu_i(t_i) = \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T_i), \quad \alpha_{ii}(t_i) = \alpha_{i0}^{(i)} \alpha_{ii}^*(T_i), \quad E_i(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i),$$

а безрозмірні напруження $\sigma(z)$ обчислюватимуться за формулою [1]:

$$\sigma(z) = \frac{E(z, t)}{1 - \nu(z, t)} \left[\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z, T) \right], \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \frac{\tilde{\sigma}(\hat{z})}{E_0^{(1)} \alpha_{t_0}^{(1)} t_k}, \quad \Phi_i^*(T_i) = (T_i - T_p) + \frac{k_\alpha^{(i)}}{2} (T_i - T_p)^2, \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0; \end{cases} \\ \Phi(z, T) &= \Phi_1^*(T_1) + \left(\Phi_2^*(T_2) \alpha_{t_0}^{(2)} / \alpha_{t_0}^{(1)} - \Phi_1^*(T_1) \right) S_+(z - z_2) + \\ &+ \left(\Phi_3^*(T_3) \alpha_{t_0}^{(3)} / \alpha_{t_0}^{(1)} - \Phi_2^*(T_2) \alpha_{t_0}^{(2)} / \alpha_{t_0}^{(1)} \right) S_+(z - z_3), \\ A &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad B = \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \\ C &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z^2 E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad N_t = \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{\alpha_{t_0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \\ M_t &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{\alpha_{t_0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} z dz. \end{aligned}$$

5. Часткові випадки

1. Розглянемо випадок, якщо коефіцієнти теплопровідності та механічні характеристики складників нетермочутливого циліндра дорівнюють опорним значенням відповідних складників термочутливого. Тоді розподіл температури матиме вигляд (24), де $\lambda_{im}^{(i)} = \lambda_{i0}^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$.

Коефіцієнти Пуассона, теплового розширення та модулі пружності складників такого циліндра будуть

$$\nu_i = \nu_0^{(i)}, \quad \alpha_{ti} = \alpha_{t_0}^{(i)}, \quad E_i = E_0^{(i)}, \quad i = \overline{1, 3},$$

а формула для обчислення напружень набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left[\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z) \right], \quad (26)$$

$$\text{де } \{E(z), \nu(z), \Phi(z)\} = \begin{cases} \left\{ 1, \nu_0^{(1)}, T_{1n} - T_p \right\}, & z_1 \leq z < z_2, \\ \left\{ E_0^{(2)} / E_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}, (T_{2n} - T_p) \alpha_{t_0}^{(2)} / \alpha_{t_0}^{(1)} \right\}, & z_2 \leq z < z_3, \\ \left\{ E_0^{(3)} / E_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}, (T_{3n} - T_p) \alpha_{t_0}^{(3)} / \alpha_{t_0}^{(1)} \right\}, & z_3 \leq z \leq z_4, \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1}^2 - z_i^2) / 2, \quad B = \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1} - z_i), \quad C = \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1}^3 - z_i^3) / 3,$$

$$N_t = \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} \left[\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^2 + (\bar{C}_{i2} - T_p)(z_{i+1} - z_i) \right] \alpha_{i0}^{(i)} / \alpha_{i0}^{(1)},$$

$$M_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} \left[(z_{i+1} - z_i)^3 \bar{C}_{i1} / 3 + (z_{i+1} - z_i)^2 (\bar{C}_{i1} z_i + \bar{C}_{i2} - T_p) \right] / 2 +$$

$$+ z_i (z_{i+1} - z_i) (\bar{C}_{i2} - T_p) \alpha_{i0}^{(i)} / \alpha_{i0}^{(1)},$$

$$\bar{E}_{i0} = E_0^{(i)} / \left[E_0^{(1)} (1 - \nu_0^{(i)}) \right], \quad i = \overline{1, 3}.$$

2. У випадку середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик, тобто якщо

$$\lambda_{in}^{(i)} = \lambda_{ic}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \left\{ \lambda_{i0}^{(i)} \left[1 + k_i (T_i - T_p) \right] \right\} dT = \lambda_{i0}^{(i)} \left[1 + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p) \right], \quad i = \overline{1, 3},$$

термопружні характеристики набудуть вигляду

$$\{ \nu_i, \alpha_{ii}, E_i \} = \{ \nu_c^{(i)}, \alpha_{ic}^{(i)}, E_c^{(i)} \} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \{ \nu_i(T_i), \alpha_{ii}(T_i), E_i(T_i) \} dT_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Тоді у розподілі температури (24) треба вважати

$$P_{O_n} = P_0 \lambda_{i0}^{(2)} / \lambda_{ic}^{(2)}, \quad K_{\lambda_n}^{(2)} = \lambda_{ic}^{(2)} / \lambda_{ic}^{(1)}, \quad K_{\lambda_n}^{(3)} = \lambda_{ic}^{(3)} / \lambda_{ic}^{(2)}.$$

Формула для обчислення напружень матиме вигляд (26), у якій опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

6. Числові дослідження

Для прикладу досліджено вплив залежності теплових і механічних характеристик матеріалів складників циліндра (вольфрам–сталь–мідь) від температури на рівень і характер розподілу температури та напружень залежно від вхідних параметрів.

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності та термомеханічні характеристики проапроксимували з використанням методу найменших квадратів лінійними залежностями типу (7). При цьому отримали, що для вольфраму

$$\lambda_{i1} = 161,72 \left[1 - 0,407 (T_1 - T_p) \right], \quad \nu_1 = 0,29 \left[1 + 0,05172 (T_1 - T_p) \right],$$

$$\alpha_{i1} = 4,43 \cdot 10^{-6} \left[1 + 0,10457 (T_1 - T_p) \right], \quad E_1 = 4,04 \cdot 10^{11} \left[1 - 0,2277 (T_1 - T_p) \right],$$

для сталі марки 25X2M1Ф —

$$\lambda_{t2} = 32,757 \left[1 - 0,337(T_2 - T_p) \right], \quad \nu_2 = 0,24 \left[1 + 0,291(T_2 - T_p) \right],$$

$$\alpha_{t2} = 12,7 \cdot 10^{-6} \left[1 + 0,294(T_2 - T_p) \right], \quad E_2 = 2,197 \cdot 10^{11} \left[1 - 0,278(T_2 - T_p) \right],$$

для міді —

$$\lambda_{t3} = 400,59 \left[1 - 0,1741(T_3 - T_p) \right], \quad \nu_3 = 0,31 \left[1 + 0,145(T_3 - T_p) \right],$$

$$\alpha_{t3} = 16,94 \cdot 10^{-6} \left[1 + 0,267(T_3 - T_p) \right], \quad E_3 = 1,304 \cdot 10^{11} \left[1 - 0,453(T_3 - T_p) \right].$$

За координати меж складників циліндра взяли $z_1 = 0$; $z_2 = 0,3$; $z_3 = 0,7$; $z_4 = 1$, за характерний розмір — $l_0 = z_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = 1/3$, $T_k = 1$, $T_{вн1} = 1/3$, $T_{вн2} = 1/3$. Характеристики матеріалів взяли в діапазоні температур $300 \div 900$ К.

Для визначення меж допустимих значень безрозмірного критерію Померанцева побудували тривимірний графік розподілу температури (рис. 1а). З огляду на те, що безрозмірна температура не повинна виходити за діапазон $[1/3; 1]$, у подальшому використовували значення $Po = \{-1; -3; -5\}$.

На рис. 1 подано графіки зміни розподілів температур і напружень відповідно уздовж складових циліндра: тут і далі суцільні лінії — термочутливий циліндр, штрихові — нетермочутливий циліндр за опорних значень, штрих-пунктирні — середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик. Криві 1-3 відповідають значенням $Po = -1; -3; -5$.

Завдяки тому, що коефіцієнт теплопровідності сталі (матеріал другого складника) є менший, аніж у вольфраму та міді, інтенсивність розташованого в межах другого шару джерела тепла може набувати значень $Po < -10$ (рис. 1а). При цьому, розподіл температури залишатиметься в межах допустимих значень $[1/3; 1]$.

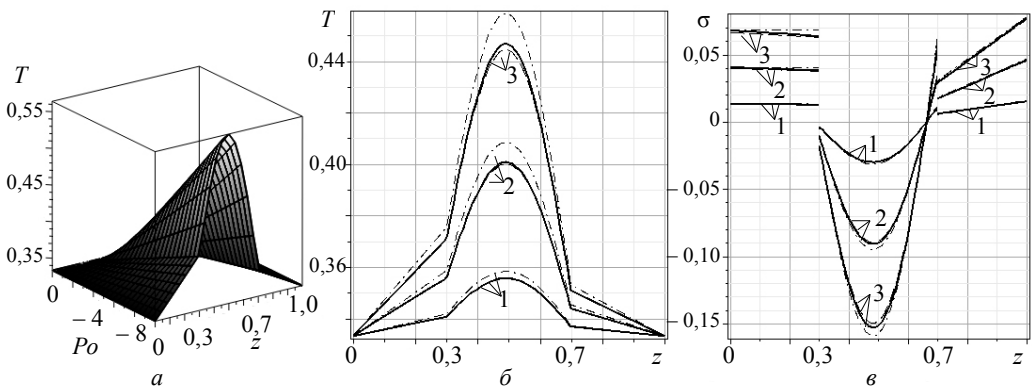


Рис. 1. Графіки розподілу температур (а, б) та напружень (е)

Однак, чим більшою є теплопровідність матеріалу складника, в якій діють джерела тепла, тим меншою за абсолютною величиною повинна бути їхня інтенсивність, щоб розподіл температури не виходив за діапазон задання характеристик матеріалів $[T_p; T_k]$. Для прикладу, у розглянутому вище складеному циліндрі змінили матеріали складників, залишивши координати меж складників і безрозмірні температури незмінними. Графіки розподілів температур для цього випадку зображені на рис. 2, де сіра площина — верхня межа допустимого діапазону температур, причому рис. 2а відповідає комбінації матеріалів сталь-вольфрам-мідь, рис. 2б — сталь-мідь-вольфрам, рис. 2в — мідь-вольфрам-сталь. Значення безрозмірного критерію Померанцева для кожної з комбінацій матеріалів складників брали: рис. 3а і 3в — $Po = \{-3; -5; -8\}$, рис. 3б — $Po = \{-1; -2; -3\}$.

Відповідно до розподілів температур, істотно змінювалися і розподіли напружень. Отримані результати засвідчили, що збільшення за модулем значення Po призводить до збільшення рівня напружень для кожної комбінації матеріалів складників циліндра. Значимо, що криві 1 відповідають першому зі значень критерію Померанцева для кожного з випадків, 2 — другому, 3 — третьому.

Для вивчення залежності розподілів температур і напружень від товщини складників циліндра (рис. 4) взяли сталь для першого складника, мідь для другого

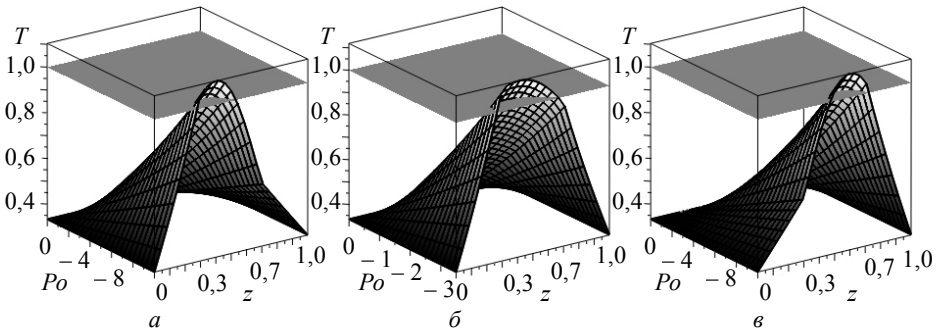


Рис. 2. Графіки розподілу температур для різних комбінацій матеріалів складників

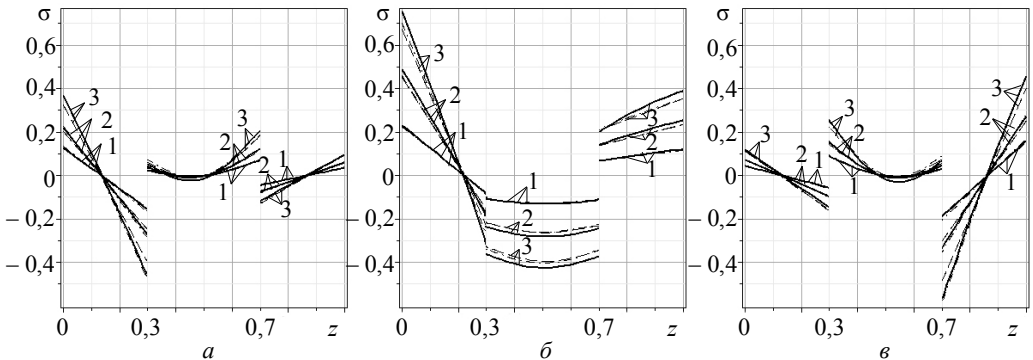


Рис. 3. Графіки розподілу напружень для різних комбінацій матеріалів складників

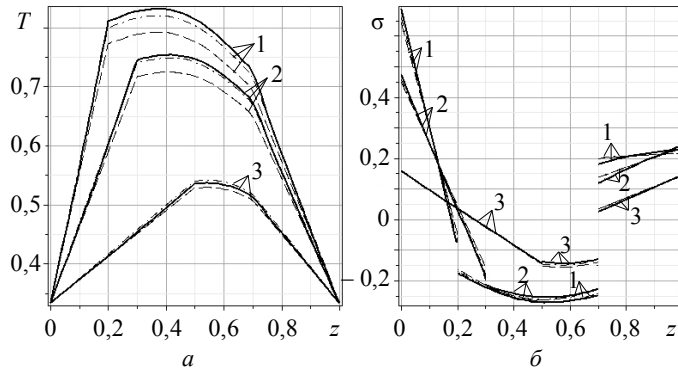


Рис. 4. Графіки розподілу температур (а) та напружень (б)

та вольфрам для третього; значення безрозмірних температур залишили такими ж, $Po = -2$, координати меж складників прийняли рівними: $z_1 = 0$, $z_2 = 0,2$ — криві 1, $z_2 = 0,3$ — криві 2, $z_2 = 0,5$ — криві 3, $z_3 = 0,7$, $z_4 = 1$.

Видно, що товщина складника з джерелом істотно впливає на розподіли температури та напружень у тілі. Менша інтенсивність виділення тепла викликає зменшення величини існуючих температур у циліндрі, що, своєю чергою, є причиною зменшення за модулем напружень у тілі.

Висновки. Сформульовано нелінійну математичну модель розподілу температури в трискладовому термочутливому циліндрі, в другому складнику якого наявні джерела тепла, розподілені за параболічним законом, а на плоских обмежувальних поверхнях підтримуються сталі температури.

Визначено напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури та досліджено вплив термочутливості матеріалів складників на характер і рівень розподілу температури та напружень.

З'ясовано, що врахування залежності теплових і механічних характеристик матеріалів складників від температури є важливе, оскільки за вибраних значень вхідних параметрів максимальні розбіжності між напруженнями в термочутливому та нетермочутливих за опорних і середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик циліндрах у точках, де вони набувають максимальних значень, сягають 15%. Водночас ці ж розбіжності між розподілами температур не перевищують 8% для кожного з розглянутих випадків. Подібні результати було отримано у статті [8].

Література

- [1] *Kushnir R. M., Popovych V. S. Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conduction — Basic Research / V. S. Vikhrenko (ed.). — In Tech, 2011. — P. 131-154.*
- [2] *Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатшарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013. — № 3. — С. 42-47.*
- [3] *Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — Москва: Наука, 1964. — 487 с.*

- [4] *Kushnir R. M., Protsiuk Yu. B.* Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Bodies of Revolution for the Quadratic Dependence of the Heat-Conduction Coefficients // *Materials Science*. — 2010. — Vol. 46, No 1. — P. 1-15.
- [5] *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / *R. B. Hetnarski* (ed.). — 1986. — P. 391-483.
- [6] *Protsyuk Yu. B.* Static Thermoelasticity Problems for Layered Thermosensitive Plates with Cubic Dependence of the Coefficients of Heat Conductivity on Temperature // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2012. — Vol. 181, No 4. — P. 481-496.
- [7] *Ракоча І. І., Попович В. С.* Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового термочутливого циліндра за складного нагрівання // *Прикл. пробл. мех. і матем.* — 2014. — Вип. 12. — С. 69-77.
- [8] *Федасюк Д. В.* Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. — Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка», 1999. — 228 с.

The mathematical modeling and research of the thermostressed state of the piecewise uniform along the axis thermosensitive cylinder

Iryna Rakocha, Vasylyl Popovych

A mathematical model has been formulated. The stationary temperature distribution of three-component along the axis thermosensitive cylinder under the condition of constant temperature on flat limiting surfaces, the isolation of cylindrical surface, the heat release inside middle component, and the ideal heat transfer between contacting components has been defined. The stress distribution has been obtained. The influence of the dependence of thermal (thermal conductivity coefficient) and mechanical (elastic modulus, Poisson ratio and temperature coefficients of linear expansion) characteristics of material components on temperature on the level and nature of the temperature and stresses distribution have been determined.

Математическое моделирование и исследование термоупругого состояния кусочно-однородного по оси термочувствительного цилиндра

Ирина Ракоча, Василий Попович

Сформулировано математическую модель и на ее основе определены стационарное распределение температуры в трехсоставном по оси термочувствительном цилиндре в условиях задания постоянных значений температуры плоских ограничивающих поверхностей, изоляции цилиндрической поверхности, тепловыделений во внутренней составляющей и идеальном теплообмене контактирующих составляющих. Найдены температурные напряжения и исследовано влияние зависимости тепловых (коэффициентов теплопроводности) и механических (модулей упругости, коэффициентов Пуассона и температурных коэффициентов линейного расширения) характеристик материалов составляющих от температуры на уровень и характер распределения температуры и напряжений.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 25.03.15