

## Числовий аналіз двовимірної задачі про напружений стан неоднорідного тіла з урахуванням геометричної нелінійності

Ярема Савула<sup>1</sup>, Андрій Стягар<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: savula@lnu.edu.ua

<sup>2</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: astyahar@gmail.com

*Розглянуто нелінійну задачу деформування двовимірного неоднорідного пружного тіла, яке містить масивну та тонку частини. Запропоновано алгоритм побудови наближеного розв'язку задачі, що базується на поєднанні прямого методу граничних елементів у масивній частині конструкції та методу скінченних елементів у тонкій частині. Поєднання розв'язків здійснюється за допомогою декомпозиції областей, що дає можливість розв'язувати задачу в обидвох частинах незалежно. Для ілюстрації запропонованого алгоритму наведено числові результати.*

**Ключові слова:** нелінійна теорія оболонок Тимошенка, метод граничних елементів, метод скінченних елементів, метод декомпозиції областей, задача Гіркмана, напружено-деформований стан.

**Вступ.** Велика кількість природних та інженерних конструкцій є неоднорідними за своєю структурою та складаються з масивної і тонкої частин. Виникає необхідність створення ефективних моделей та алгоритмів для аналізу напружено-деформованого стану таких конструкцій.

Різні варіанти таких задач розглянуто у роботах [2, 3, 6] (у праці [2] досліджено напружено-деформований стан тіл із тонким покриттям); у статтях [3] і [6] розглянуто випадок задачі Гіркмана.

У статті запропоновано числовий розв'язок двовимірної задачі про напружений стан неоднорідного тіла, у якій тонку частину прикріплено торцем до основного тіла. Напружено-деформований стан масивної частини описується лінійною теорією пружності, а тонкої частини — геометрично нелінійною теорією оболонок Тимошенка. Числовий розв'язок у масивній частині побудовано за допомогою прямого методу граничних елементів (ПМГЕ), а у тонкій частині — за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), яка використовує апроксимації функціями-бульбашками [7]. Лінеаризація здійснюється за методом Ньютона. Обидва розв'язки поєднано з використанням методу декомпозиції областей.

Застосування методу декомпозиції областей дозволяє розділити задачу на дві незалежні задачі в кожній з підобластей.

## 1. Гетерогенна математична модель пружного тіла

Розглянемо плоску задачу про напружено-деформований стан конструкції, що займає область  $\Omega$  (рис. 1). Конструкція складається з масивного однорідного ізотропного тіла, поперечний переріз якого міститься в області  $\Omega_1$ , та тонкої частини в області  $\Omega_2$ .

Вважаємо, що межа  $\Gamma$  перерізу тіла складається з таких частин:  $\Gamma_D$  — частина межі, на якій задані умови на переміщення;  $\Gamma_N$  — частина межі, на якій задані умови на напруження;  $\Gamma_I$  — частина межі, яка є спільною для масивного тіла та тонкої частини.

Позначимо через  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))$  вектор переміщень у точці  $x = (x_1, x_2)$  тіла  $\Omega_1$ ;  $e_{ij}, i, j = 1, 2$  — компоненти тензора деформацій у тілі  $\Omega_1$ ;  $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2$  — компоненти тензора напружень у тілі  $\Omega_1$ ;  $\lambda_1, \mu_1$  — коефіцієнти Ляме для тіла  $\Omega_1$ , що визначаються співвідношеннями

$$\lambda_1 = \frac{E_1 \nu_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)},$$

де  $E_1$  — модуль Юнга матеріалу тіла,  $\nu_1$  — коефіцієнт Пуассона, через  $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$  — вектор об'ємних сил, що діють у точці  $x$  тіла  $\Omega_1$ .

Для опису напружено-деформованого стану в області  $\Omega_1$  використаємо співвідношення класичної теорії пружності

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \mu_1 e_{12}, \quad \sigma_{ii} = 2\mu_1 e_{ii} + \lambda_1 (e_{11} + e_{22}), \quad i = 1, 2, \\ e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Надалі без втрати загальності будемо вважати, що  $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$ .

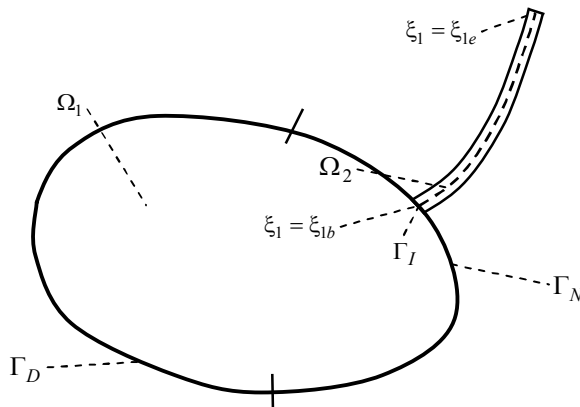


Рис. 1. Гетерогенне пружне тіло

Виберемо такі крайові умови на зовнішній межі тіла:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \quad (3)$$

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = t_{01}, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = t_{02} \quad \text{на} \quad \Gamma_N. \quad (4)$$

Тут  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  — одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі тіла  $\Omega_1$ ;  $t_{01}$ ,  $t_{02}$  — задані зусилля.

Для опису напружено-деформованого стану в тонкій частині конструкції  $\Omega_2$  застосуємо рівняння нелінійної теорії оболонки Тимошенка [4]

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dT_{11}}{d\xi_1} - k_1 T_{13} = p_1, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dT_{13}}{d\xi_1} + k_1 T_{11} = p_3, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dM_{11}}{d\xi_1} + T_{13} = m_1, \quad \xi_{1b} \leq \xi_1 \leq \xi_{1e}, \quad (7)$$

де  $T_{11}$ ,  $T_{13}$ ,  $M_{11}$  — зусилля та момент в оболонці;  $A_1 = A_1(\xi_1)$ ,  $k_1 = k_1(\xi_1)$  — параметр Ляме та кривизна серединної лінії оболонки.

Зауважимо, що рівняння теорії оболонки (5)-(7) є рівняннями плоскої задачі, які відповідають випадку циліндричної оболонки, нескінченної у напрямку  $\xi_2$  у криволінійній системі координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , яка є пов'язаною із серединною поверхнею.

Відомо, що фізичні співвідношення між деформаціями та силами і моментом у теорії оболонки (закон Гука) мають вигляд [4]

$$T_{11} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_2^2} \varepsilon_{11}, \quad T_{13} = k' G' h \varepsilon_{13}, \quad M_{11} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_2^2)} \chi_{11},$$

де  $E_2$  — модуль Юнга для оболонки,  $\nu_2$  — коефіцієнт Пуассона;  $h$  — товщина оболонки;  $G'$  — модуль зсуву;  $k'$  — коефіцієнт зсуву. Деформації  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\chi_{11}$  в оболонці, своєю чергою, виражаються відповідно через тангенціальні  $\nu_1$  та нормальні  $w$  переміщення точок серединної лінії та кут повороту  $\gamma_1$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{d\nu_1}{d\xi_1} + k_1 w + \frac{1}{8} \omega_{13}^2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{dw}{d\xi_1} + \gamma_1 - k_1 \nu_1,$$

$$\chi_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{d\gamma_1}{d\xi_1} + \frac{1}{2} \omega_{13} \tau_{13} - \frac{1}{8} k_1 \omega_{13}^2, \quad \omega_{13} = -\frac{1}{A_1} \frac{dw}{d\xi_1} + \gamma_1 + k_1 \nu_1, \quad \tau_{13} = k_1 \gamma_1.$$

Функції навантаження на оболонку за відсутності масових сил мають вигляд

$$p_1 = \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{13}^+ + \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{13}^-, \quad (8)$$

$$p_3 = \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{33}^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{33}^-, \quad (9)$$

$$m_1 = \frac{h}{2} \left[ \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{13}^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{13}^- \right]. \quad (10)$$

Тут  $\sigma_{ij}^+$ ,  $\sigma_{ij}^-$ ,  $i, j = 1, 3$  — компоненти вектора поверхневих сил на зовнішній ( $\xi_3 = h/2$ ) і внутрішній ( $\xi_3 = -h/2$ ) поверхнях оболонки;  $m_1$  — момент зовнішнього поверхневого навантаження.

$$\text{Зазначимо, що для ізотропного тіла } G' = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)}, \quad k' = \frac{5}{6}.$$

Запишемо такі крайові умови на межі  $\xi_1 = \xi_{1e}$ :

$$v_1 = 0, \quad T_{13} = 0, \quad \gamma_1 = 0. \quad (11)$$

На спільній межі основного тіла й оболонки задамо умови спряження (ідеальний механічний контакт):

$$u_n = v_1 + \xi_3 \gamma_1, \quad u_\tau = w; \quad (12)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn} d\xi_3 = T_{11}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n\tau} d\xi_3 = T_{13}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn} \xi_3 d\xi_3 = M_{11}; \quad (13)$$

де  $u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2$ ,  $u_\tau = u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2$ , а  $\tau_1, \tau_2$  — компоненти одиничного вектора дотичної до межі  $\Gamma$ .

## 2. Лінеаризація моделі теорії оболонок Тимошенка

Проведемо лінеаризацію моделі (5)-(7) за методом Ньютона. Подамо  $v_1, w, \gamma_1$  у вигляді  $v_1 = \tilde{v}_1 + \Delta \tilde{v}_1$ ,  $w = \tilde{w} + \Delta \tilde{w}$ ,  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1 + \Delta \tilde{\gamma}_1$ , де  $\tilde{v}_1, \tilde{w}, \tilde{\gamma}_1$  — розв'язки лінійної задачі теорії оболонок Тимошенка,  $\Delta \tilde{v}_1, \Delta \tilde{w}, \Delta \tilde{\gamma}_1$  — деякі прирости. Аналогічно можна подати і  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \chi_{11}$ . Тоді одержимо такі вирази для  $\Delta \tilde{\varepsilon}_{11}, \Delta \tilde{\varepsilon}_{13}, \Delta \tilde{\chi}_{11}$  (відкидаючи квадратичні доданки щодо приростів)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{d \Delta \tilde{v}_1}{d \xi_1} + k_1 \Delta \tilde{w} + \frac{1}{8} Z, & \Delta \tilde{\varepsilon}_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{d \Delta \tilde{w}}{d \xi_1} + \Delta \tilde{\gamma}_1 - k_1 \Delta \tilde{v}_1, \\ \Delta \tilde{\chi}_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{d \Delta \tilde{\gamma}_1}{d \xi_1} + \frac{1}{2} k_1 Y - \frac{1}{8} k_1 Z, & Y &= \tilde{\gamma}_1 \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d \tilde{w}}{d \xi_1} + \tilde{\gamma}_1 + k_1 \tilde{v}_1 \right) + \\ &+ \tilde{\gamma}_1 \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d \Delta \tilde{w}}{d \xi_1} + \Delta \tilde{\gamma}_1 + k_1 \Delta \tilde{v}_1 \right) + \Delta \tilde{\gamma}_1 \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d \tilde{w}}{d \xi_1} + \tilde{\gamma}_1 + k_1 \tilde{v}_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z = & \tilde{\gamma}_1^2 + \left( \frac{1}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} \right)^2 + k_1 \tilde{v}_1^2 - \frac{2}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} \tilde{\gamma}_1 - \frac{2}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} k_1 \tilde{v}_1 + \\
 & + 2k_1 \tilde{v}_1 \tilde{\gamma}_1 - \frac{2}{A_1} \frac{d\Delta\tilde{w}}{d\xi_1} \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} + \tilde{\gamma}_1 + k_1 \tilde{v}_1 \right) + \\
 & + 2k_1 \Delta\tilde{v}_1 \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} + \tilde{\gamma}_1 + k_1 \tilde{v}_1 \right) + 2\Delta\tilde{\gamma}_1 \left( -\frac{1}{A_1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi_1} + \tilde{\gamma}_1 + k_1 \tilde{v}_1 \right).
 \end{aligned}$$

На основі лінеаризованої моделі теорії оболонки Тимошенка можна побудувати ітераційний алгоритм.

### 3. Алгоритм декомпозиції області (послідовна схема Діріхле-Неймана)

Опишемо ітераційний алгоритм декомпозиції області (послідовну схему Діріхле-Неймана) [5], який використаємо для знаходження напружено-деформованого стану конструкції. Позначимо шуканий розв'язок задачі через  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Ітераційний алгоритм декомпозиції області сформулюємо у такому вигляді.

*Крок 1.* Вибрати початкове наближення  $\lambda^0$  для невідомих переміщень на спільній межі  $\Gamma_I$ , задати точність  $\varepsilon > 0$  і параметр релаксації  $\theta > 0$ .

*Крок 2.* Для  $k = 0, 1, \dots$  розв'язати крайову задачу теорії пружності в тілі  $\Omega_2$  із заданими переміщеннями  $\lambda^k$  на спільній межі  $\Gamma_I$  й отримати наближення для сил  $T_{11}, T_{13}$  і моменту  $M_{11}$  у включенні  $\Omega_2$ .

*Крок 3.* Розв'язати крайову задачу теорії оболонки в  $\Omega_1$ , задавши на межі  $\Gamma_I$  відповідні зусилля, визначені за допомогою умов спряження (12), (13) на *кромці 2*, і знайти переміщення  $u_n^{2k}$  та  $u_\tau^{2k}$  на межі  $\Gamma_I$ .

*Крок 4.* Розрахувати нові переміщення на  $\Gamma_I$  за формулами

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^{k+1} &= (1 - \theta)\lambda_1^k + \theta v_1^k \Big|_{\xi_1 = \xi_{1b}}, \quad \lambda_2^{k+1} = (1 - \theta)\lambda_2^k + \theta w^k \Big|_{\xi_1 = \xi_{1b}}, \\
 \lambda_3^{k+1} &= (1 - \theta)\lambda_3^k + \theta \gamma_1^k \Big|_{\xi_1 = \xi_{1b}}.
 \end{aligned}$$

*Крок 5.* Якщо  $\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| / \|\lambda^{k+1}\| \geq \varepsilon$ , то перейти на *крок 2*, інакше — кінець алгоритму (*крок 6*).

*Крок 6.* Кінець.

### 4. Числові результати

Нехай  $\Omega_1$  — область з  $A = (0; 0)$ ,  $B = (0; 1)$ ,  $C = (1; 1)$ ,  $D = (1; 0)$ ,  $E = (1,02; 0,01)$ . До масивної бетонної частини  $\Omega_1$  прикріплено сталеве тіло в  $\Omega_2$  товщиною  $h = 0,01$  (рис. 2). Позначимо  $F = (2,02; 0,01)$ ,  $G = (2,02; 0)$ . Зауважимо, що геометричні розміри віднесено до одиниць розмірностей.

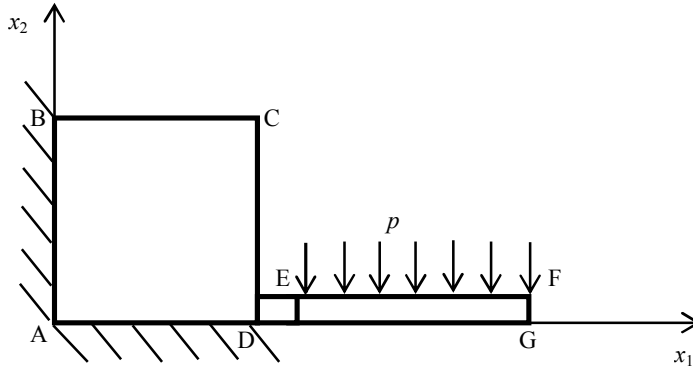


Рис. 2. Числовий приклад

Для тіла в  $\Omega_1$  виберемо такі фізичні параметри:  $\nu = 0,33$ ;  $E = 25\,000$  МПа; для тіла в  $\Omega_2$  задамо  $\nu = 0,33$ ;  $E = 200\,000$  МПа.

Конструкція є закріплена на границях АВ та AD. На частині границі EF задане рівномірне навантаження  $p = 0,001$  МПа, на границі FG задано умову симетрії, інші частини границі є вільні.

Для побудови наближеного розв'язку в масивній частині використаємо прямий метод граничних елементів [1] із 202 квадратичними елементами. Для побудови наближеного розв'язку в області  $\Omega_2$  використаємо метод скінченних елементів з базисними функціями бульбашками четвертого порядку.

У табл. 1 подано порівняння переміщень  $w$  на серединній лінії тіла в  $\Omega_2$  у випадку різної кількості скінченних елементів (32, 48 і 64). Бачимо, що у разі згущення сітки наближений розв'язок суттєво не змінюється.

Таблиця 1

Порівняння переміщення  $w$  на різних сітках

$x_1$	$w, n = 32$	$w, n = 48$	$w, n = 64$
1,020	$-6,92 \cdot 10^{-5}$	$-6,91E-05$	$-6,97E-05$
1,145	$-8,18E-04$	$-8,17E-04$	$-8,20E-04$
1,270	$-1,66E-03$	$-1,66E-03$	$-1,67E-03$
1,395	$-2,52E-03$	$-2,52E-03$	$-2,53E-03$
1,520	$-3,33E-03$	$-3,33E-03$	$-3,33E-03$
1,645	$-4,01E-03$	$-4,01E-03$	$-4,02E-03$
1,770	$-4,53E-03$	$-4,53E-03$	$-4,54E-03$
1,895	$-4,86E-03$	$-4,86E-03$	$-4,87E-03$
2,020	$-4,97E-03$	$-4,97E-03$	$-4,98E-03$

**Висновки.** Запропонований підхід можна ефективно використовувати для числового аналізу напружено-деформованого стану гетерогенних тіл. Використання алгоритму декомпозиції областей дозволяє розв'язувати задачі в двох частинах конструкції незалежно, виділивши нелінійність. За допомогою застосування функцій-бульбашок для знаходження розв'язку МСЕ у тонкій частині конструкції

можна уникнути явища «locking effect» [7], тобто досягати високої точності наближеного розв'язку без згущення сітки. Отже, запропонований алгоритм можна застосовувати й у випадку оболонки із ненульовою кривизною.

### Література

- [1] Banerjee P. K. *Butterfield R.* Boundary element methods in engineering science // McGraw-Hill, 1981. — 494 p.
- [2] Dyyak I. Savula Ya., Styahar A. Numerical investigation of a plain strain state of a body with thin cover using domain decomposition // Journal of numerical and applied mathematics, 2012. — Vol 3(109). — P. 23-33.
- [3] Finite element analysis of the Girkmann problem using the modern hp-version and the classical h-version / A.H. Niemi, I. Babuska, J. Pitkranta, L. Demkowicz // ICES Report. — 2010.
- [4] Муха І. С. Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. — 1997. — Вип. 46. — С. 35-42.
- [5] Quarteroni, A., Valli A. Domain decomposition methods for partial differential equations // Oxford, 1999. — 360 p.
- [6] Coupled boundary and finite element analysis of a special class of two-dimensional problems of the theory of elasticity / Ya. Savula, H. Mang, I. Dyyak, N. Pauk // Computers and structures. — 2000. — Vol. 75 (2). — P. 157-165.
- [7] Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. — 221 с.

## Numerical analysis of two-dimensional inhomogeneous elasticity problem with geometric nonlinearity

Yarema Savula, Andriy Styahar

*The problem of two-dimensional inhomogeneous elastic deformation of an object, consisting of massive and thin parts, is considered. We propose an algorithm for the approximate solution of this problem, which is based on the coupling of direct boundary element method in the massive part and finite element method in the thin part. Coupling of both solutions is done using domain decomposition, that allows us to solve the problems in each part independently. The results of numerical experiments are shown for the illustration of the proposed algorithm.*

## Численный анализ двумерной задачи о напряженном состоянии неоднородного тела с учетом геометрической нелинейности

Ярема Савула, Андрій Стягар

*Рассмотрена нелинейная задача деформирования двумерного упругого неоднородного тела, содержащего массивную и тонкую части. Предложено алгоритм построения приближенного решения задачи, основанного на сочетании прямого метода граничных элементов в массивной части и метода конечных элементов в тонкой части. Сочетание решений производится с помощью декомпозиции областей, что позволяет решать задачу в обеих частях независимо. Для иллюстрации предложенного алгоритма приведены численные результаты.*

Отримано 14.05.15