

## Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу

Юрій Сачук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, проспект Волі, 13, Луцьк,  
e-mail: sachykyra@gmail.com

*Розв'язок задачі про контактну взаємодію жорсткого штамп із пружною півплощиною з рахуванням зношування матеріалу зводиться до узагальненої проблеми на власні значення та відповідні вектори. Досліджено особливості застосування основних методів для знаходження наближених власних значень та векторів для різних вхідних матриць і при змінних розмірностях матриць. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації математичних моделей контактних задач зі зношуванням із використанням спеціальних функцій та засобів візуального відображення результатів. Визначено оптимальну кількість власних значень для якісного відображення графіків контактного тиску для різних канонічних форм штамп. Зроблено аналіз сучасних прикладних задач, які зводяться до розв'язання узагальненої проблеми на власні значення (моделі для оптимізації й управління ризиками в енергетиці перетворення мереж, задача лінійної бароклінної нестабільності в океанах Землі).*

**Ключові слова:** власні значення, власні вектори, зношування, контактний тиск, інтегральні рівняння, факторизація матриць, Z-матриці, розклад Холецького.

**Вступ.** Фундаментальні та теоретичні дослідження в галузі лінійної алгебри, зокрема в теорії матриць, є практичним інструментом для чисельного дослідження математичних моделей, які отримуються на основі задач із різних галузей науки. Зокрема, механіка деформівного твердого тіла є однією із практичних галузей науки, в якій проблема контактних задач з урахуванням зношування матеріалу зводиться до розв'язування узагальненої задачі на власні значення із подальшим використанням власних значень і відповідних їм векторів [1-3].

Окрім контактних задач узагальнена задача на власні значення широко використовується в інших прикладних галузях досліджень. Зокрема, під час опису моделей для оптимізації й управління ризиками в енергетиці перетворення мереж [4], у задачах лінійної бароклінної нестабільності в океанах Землі [5], а також під час дослідження фотонних кристалів [6].

У роботі розвинуто застосування ортогональних поліномів Чебишева для зведення контактних задач зі зношуванням до узагальненої задачі на власні значення [2]. Розроблено методикау й алгоритми програмної реалізації отриманої

математичної моделі. На основі запропонованої методики було розроблено програмні модулі в системі Matlab R2013a для отримання числових даних з метою їх подальшого аналізу. Проведено порівняльний аналіз числових результатів для різних форм штампів, за допомогою числового експерименту визначено мінімально-достатню кількість власних значень для збіжності процесу обчислень.

### 1. Узагальнена задача на власні значення в контактних задачах зі зношуванням

Основним етапом під час розв'язування контактних задач зі зношуванням є побудова формальної математичної моделі задачі на основі постановки задачі, зокрема, побудова інтегрального рівняння [2].

Під час розв'язування контактної задачі зі зношуванням для реалізації математичної моделі задачі було обрано лінійну модель зношування [7, 8].

Інтегральне рівняння для визначення контактної тиску буде таке [1]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a}^a p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (1)$$

де  $f(x)$  — описує профілі різних штампів,  $k_2$  — коефіцієнт тертя,  $2a(t)$  — область контакту,  $k_1$  — коефіцієнт пропорційності між роботою сил тертя та величиною зношування (так звана абразивна модель зношування),  $V$  — швидкість взаємного проковзування.

Контактний тиск шукаємо у вигляді

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}. \quad (2)$$

Для подальших міркувань і зручності числових розрахунків введемо безрозмірні величини:  $p(x, t) = p'(x', t') \alpha$ ,  $f(x) = f'(x') a$ ,  $x' = \frac{x}{a}$ ,  $t = \frac{t' a}{\alpha k_1 k_2 V}$ , надалі

штрихи опускаємо.

Після підстановки співвідношення (2) у вираз (1) дістаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-1}^1 p(\tau, 0) \frac{d\tau}{\tau - x} = \frac{df(x)}{dx}, \quad (3)$$

$$\alpha_{2k} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{d\varphi_{2k}(x)}{dx} = 0. \quad (4)$$

Розв'язок однорідної системи рівнянь (4) шукаємо у вигляді:

$$\varphi_{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x). \quad (5)$$

Тут  $U_m(x)$  — ортогональні поліноми Чебишева другого роду.

Підставивши вираз (5) у формулу (4), отримуємо:

$$a_{2k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} (2m+1) = 0, \quad (6)$$

де  $T_m(x)$  — ортогональні поліноми Чебишева першого роду.

Помножаючи вираз (6) на  $T_{2i+1}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $n$  — кількість членів ряду (2) й інтегруючи кожен член отриманих сум від  $-1$  до  $1$ , отримаємо узагальнену задачу на власні значення:

$$(A - a_{2k} B) X = 0, \quad X = X(a_0^k, a_1^k, \dots). \quad (7)$$

Тут  $\alpha_{2k}$  — власні значення,  $a_m^k$  — вектори відповідні власним значенням.

Матриці **A** та **B** мають вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 3/2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{2n+1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (b_{ij})_{m,n}, \quad (8)$$

$$\text{де } b_{ij} = \int_{-1}^1 T_{2i+1}(x) T_{2j+1}(x) dx.$$

Отримана задача є узагальненою проблемою на власні значення, так як матриця **B** є неединична і її розв'язок не можна знайти загальновідомими методами. Важливо зазначити, що матриці **A** і **B** у співвідношенні (8) є симетричні та додатно-визначені, що є важливим фактором з точки зору обчислення власних векторів і значень.

## 2. Розв'язування узагальненої задачі на власні значення

У зв'язку з тим, що матриці у співвідношенні (8) є додатно визначені та симетричні, то згідно з працями [9, 10] всі власні значення є дійсні і мають той же знак, що і власні значення задачі  $(A - a_{2k} I) X = 0$ , тобто є додатні.

Існує декілька підходів, які дозволяють розв'язати узагальнену проблему на власні значення. Ці підходи можна умовно поділити на дві групи. До першої групи належать алгоритми, які потребують попередньо спеціального зведення до певної стандартної форми (узагальнений метод Якобі, метод Холецького) [11]; до другої належать алгоритми, що не потребують спеціального зведення, наприклад, QZ-алгоритм факторизації [10].

Узагальнена задача на власні значення (7) зводиться до стандартної задачі на власні значення за допомогою розкладу Холецкого матриці  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , де  $\mathbf{L}$  — нижня трикутна матриця. Елементи матриці  $\mathbf{L}$  можна обчислити, починаючи з верхнього лівого кута матриці за формулами:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad \text{якщо } j < i. \quad (10)$$

Вираз у правій частині (10) під коренем завжди додатний, якщо матриця  $\mathbf{A}$  додатно-визначена.

Якщо для матриці  $\mathbf{B}$  відомий розклад Холецкого, то рівняння (7) буде таке:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{X}, \quad \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{X}. \quad (11)$$

Проведемо заміну змінних  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T \mathbf{X}$  або  $\mathbf{X} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{y}$ . Тоді рівняння (11) матиме вигляд:

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L}^{-T} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}, \quad \text{якщо } \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L}^{-T}, \text{ то } \bar{\mathbf{A}} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}. \quad (12)$$

Таким чином, початкова задача (7) зводиться до стандартної задачі на власні значення із симетричною матрицею  $\bar{\mathbf{A}}$ .

Метод **QZ**-факторизації матриць також полягає у приведенні матриць (8) до спеціальної форми та зведенні узагальненої задачі до стандартної. Особливістю методу є те, що він підходить і для несиметричних матриць, які можуть мати від'ємні елементи.

Нехай  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Матриця  $\mathbf{A}$  є факторизована у формі **QZ**, якщо

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{Z}, \quad (13)$$

де  $\mathbf{Q}$  — ортогональна матриця, тобто  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_{n \times n}$  і  $\mathbf{Z}$  — дійсна матриця, в якій додатними є лише діагональні елементи [12].

Алгоритм факторизації (13) наведено в роботі [10]. Також доведено його теоретичну збіжність і спосіб приведення матриці  $\mathbf{A}$  за допомогою загального алгоритму **QW**.

Розробка алгоритмів згідно **QW**- та **QZ**-факторизації є актуальна [10].

### 3. Програмні засоби, способи обчислення власних векторів і значень у контактних задачах зі зношуванням, числові розрахунки

Для знаходження контактної тиску у вигляді ряду (2) необхідно розв'язати проблему (7). Варто зазначити, що матриця  $\mathbf{A}$  заповнюється тривіально за допомогою формули (8) і є діагональна. Для заповнення матриці  $\mathbf{B}$  необхідно для кожного елемента матриці знайти інтеграл (8). Після заповнення матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  основною задачею було знаходження власних векторів і власних значень.

На основі отриманих числових даних знайдено власні вектори та значення за описаним методом розкладу Холецького. Для підтвердження достовірності отриманих результатів задачу на власні значення (7) було розв'язано методом **QZ**-факторизації. При цьому важливо зазначити, що власні значення за обома методами співпадають, але власні вектори однакові з точністю до постійного множника. Для однозначності визначення компонент власних векторів використано неоднорідне інтегральне рівняння (3). Контактний тиск у вигляді (2) ( $t = 0$ ) підставляємо у рівняння (3) й аналогічно до процедури розв'язування рівняння (4) отримуємо систему  $n$  алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку, знаходимо невідомі множники при власних векторах.

Для програмної реалізації вище описаної схеми було використано систему Matlab R2013a. У цій системі було розглянуто спеціалізовані інтегровані бібліотеки LAPACK для розв'язання основних задач алгебри, зокрема узагальненої задачі на власні значення. Системною функцією для реалізації узагальненої задачі на власні значення є функція *EIG*. Ця функція має такий синтаксис:  $[V,D]=EIG(A,B)$ , де матриці **A**, **B** — відповідні матриці (8), **D** — діагональна матриця із власними значеннями, **V** — матриця власних векторів, відповідних власним значенням. Особливістю системи Matlab R2013a є суміщення числових та аналітичних обчислень, тобто ми маємо можливість звернення до змінної як символічної і використання спеціалізованих функцій до неї, а також обробка результатів за допомогою програмних числових методів. Також важливою особливістю використання функції *EIG* є спосіб розкладу вхідних матриць, зокрема ця функція дозволяє використати відомий метод Холецького або сучасний прогресивний метод **QZ**-факторизації. За замовчуванням програма використовує метод **QZ**-факторизації. Перевагою цього методу перед методом Холецького є те, що для вхідних матриць знімаються обмеження симетричності та додатно-визначеності. У ході числових експериментів було також проаналізовано достовірність отриманих результатів, зокрема, обрано систему Mathcad 15 для отримання власних векторів і власних значень. У ній були використані спеціальні вбудовані функції: *genvals(A,B)* для визначення власних значень, *genvecs(A,B)* для визначення спектру власних векторів [13].

Під час побудови графіків контактного тиску ключовим чинником, який забезпечує точність і якість отриманих числових результатів є кількість власних значень. У табл. 1 наведено власні значення при  $n = 7, 11, 17$  для узагальненої проблеми (7), де  $n$  — кількість членів ряду (2).

У ході числового експерименту було виявлено, що для побудови ряду (2) для  $f(x) = -x^2/(2R)$  (штамп параболічної форми), де  $R$  — радіус кривизни

Таблиця 1

Послідовності власних значень для матриць із формули (8) за їх розмірності  $n = 7, 11, 17$

$n = 7$	0.63	1.63	2.62	3.63	4.84	7.48	23.22				
$n = 11$	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.68	8.11	10.88	17.45	55.49
$n = 17$	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.63	7.63	8.63	9.63	10.72
	12.16	14.38	18	24.8	40.44	129.98					

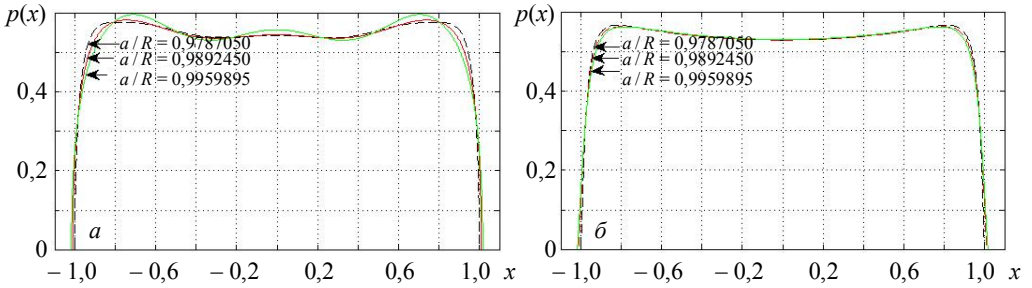


Рис. 1. Контактний тиск для штампа циліндричної форми

у точці  $x=0$  достатньо одинадцяти власних векторів. У разі малих областей контакту така кількість векторів є достатня для гіперболічної, циліндричної, еліптичної форм штампів. У разі штампа циліндричної форми для  $a/R > 0,8$  кількість власних значень має бути не менша сімнадцяти, тобто  $n \geq 17$ . Слід зазначити, що власні значення табл. 1 швидко збільшуються, що впливає на точність і похибку обчислень відповідно до обраної моделі.

На рис. 1 наведено графік контактного тиску для штампа циліндричної форми за змінної області контакту  $a/R = 0,978705; 0,989245; 0,9959895$  у фіксовані моменти безрозмірного часу  $t = 0,05; 0,1; 0,15$ , рис. 1а для  $n = 7$  і рис. 1б для  $n = 17$ .

Із наведених вище графіків випливає, що коли кількість власних значень рівна семи графік контактного тиску не дає якісної оцінки процесу зношування матеріалу. У разі збільшення кількості власних значень результати значно покращуються, однак час процесу обчислень збільшується, що потребує оптимізації числового експерименту. Також під час побудови графіків враховано зміну масштабу в безрозмірному  $\bar{x}$ , яка базується на врахуванні коефіцієнта масштабу, що визначається як відношення поточної області контакту до початкової і є змінним у кожен момент часу.

**Висновки.** У статті розглянуто узагальнену задачу на власні значення, її особливості та відмінності від стандартної задачі. Особливості використання результатів розв'язку узагальненої задачі на власні значення в контактних задачах зі зношуванням матеріалу. Описано підходи чисельного розв'язування узагальненої задачі на власні значення, зокрема метод розкладу Холецького для симетричних і додатно-визначених матриць і метод **QZ**-факторизації довільних матриць. Вказано на широкий спектр прикладних галузей, у яких отримані результати можна успішно використати.

Також розглянуто програмні засоби чисельного розв'язування узагальненої задачі на власні значення. Вивчено особливості застосування різних програмних засобів Matlab R2013a, Mathcad 15 і виявлено недоліки та переваги кожного з них.

Розв'язано контактну задачу зі зношуванням матеріалу для півплощини під дією штампів різної форми. Побудовано графіки розподілу контактного тиску у різні моменти часу.

### Література

- [1] Максимук О. В., Сачук Ю. В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. — Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. — С. 281-283.
- [2] Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук І. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. — Киев: Наук. думка. — 1988. — 280 с.
- [3] Кравцов В. І., Садегіджалал А. М. Контактна задача з урахуванням шорсткості поверхні при нормальному і тангенціальному навантаженні // Проблеми тертя та зношування. — 2013. — № 2. — С. 61-72.
- [4] Kantor J., Mousaw P. Models for the Optimization and Risk Management of Energy Conversion Networks // American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA. — 2009. — P. 671-676.
- [5] Bao G., Cowsar L., Masters W. Mathematical Modeling in Optical Science. — 2001. — 333 p.
- [6] Shafer-Smith K. The Geography of Linear Baroclinic Instability in Earth's Oceans // Journal of Marine Research. — 2007. — Vol. 107 — P. 1-33
- [7] Хрущев М. М. Абразивное изнашивание. — Москва: Наука. — 1970. — 252 с.
- [8] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. — Москва: Наука. — 2001. — 478 с.
- [9] Golpar-Raboky E. A New Approach for Computing WZ Factorization // Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). — 2012. — Vol. 7. — P. 571-584.
- [10] Golpar-Raboky E. WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2014. — Vol. 40. — P. 399-411.
- [11] Горбаченко В. И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 320 с.
- [12] Nabben R. Z-Matrices and Inverse Z-Matrices // Linear Algebra and its Application. — 1997. — Vol. 256. — P. 31-48.
- [13] Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс. — СПб.: Питер. — 2011. — 400 с.

## The generalized problem for eigenvalues in problems of contact interaction with taking into account the material wear

Yuriy Sachuk

*Solving of the problem of contact interaction of stiff punch with elastic half-plane with taking into account the material wear has been reduced to a generalized problem for eigenvalue and corresponding vectors. The peculiarities of the application of the main methods for finding approximate eigenvalues and vectors for various input matrices and matrices with variable dimensions are investigated. An algorithm for computing and software modules to implement the mathematical models of the contact problems with deterioration using special functions and tools of result visualization are constructed. An optimal number of eigenvalues for high-quality display*

**Юрій Сачук**

**Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням ...**

*of graphs of contact pressure for different canonical forms of the punch is determined. The analysis of modern applications, which can be reduced to solving a generalized problem for eigenvalues (models for optimization and risk management in the networks transformation energy, models for linear baroclinic instability in the Earth' oceans) is carried out.*

## **Обобщенная проблема на собственные значения в задачах контактного взаимодействия с учетом износа материала**

**Юрий Сачук**

*Решение задачи о контактном взаимодействии жесткого штампа с упругой полуплоскостью с учетом износа материала сводится к обобщенной проблеме на собственные значения и соответствующие векторы. Исследованы особенности применения основных методов для нахождения приближенных собственных значений и векторов для различных входных матриц и при переменных размерностях матриц. Построены схемы вычислений и программные модули для реализации математических моделей контактных задач с износом с использованием специальных функций и средств визуального отображения результатов. Определено оптимальное количество собственных значений для качественного отображения графиков контактного давления для различных канонических форм штампа. Сделан анализ современных прикладных задач, которые сводятся к решению обобщенной проблемы на собственные значения (модели для оптимизации и управления рисками в энергетике преобразования сетей, задача линейной бароклинных неустойчивости в океанах Земли).*

**Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком**

Отримано 15.01.15