

## Ітераційний підхід до розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі

Василь Чекурін<sup>1</sup>, Юрій Бойчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: yuronchuk@gmail.com

*Розроблено ітераційний підхід для розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі, що поглинає, емітує та розсіює ІЧ-випромінювання, як в об'ємі, так і на межі розділу із зовнішнім середовищем, а також обмінюється з ним теплом за конвективним механізмом. Із застосуванням скінченно-елементної апроксимації створено алгоритм для чисельної реалізації методу. Проведено чисельне дослідження збіжності розробленого алгоритму.*

**Ключові слова:** ІЧ-випромінювання, кондуктивно-променевий теплообмін, ітераційний метод, збіжність.

**Вступ.** У різних теоретичних і прикладних дисциплінах часто виникають задачі теплообміну в середовищах, які поглинають, випромінюють і розсіюють ІЧ-радіацію [1, 2, 3]. Процес кондуктивно-променевого теплообміну описує істотно нелінійна система інтегро-диференціальних рівнянь, яка містить взаємозв'язані рівняння теплопровідності та перенесення випромінювання. За урахування радіаційних властивостей поверхонь шару ці рівняння слід підпорядковувати взаємозв'язаним нелінійним і нелокальним крайовим умовам.

У літературі відомі наближені аналітичні, аналітико-числові та числові методи таких задач. Це, зокрема, наближення оптично тонкого шару [4], дифузійне [1] та P<sub>n</sub>-наближення [4, 5, 6], метод натуральних елементів [7], гомотопічних збурень [8], скінченних різниць тощо. Проте, відомі методи є неефективні, якщо розглядаються задачі кондуктивно-променевого теплообміну в середовищах, які випромінюють, поглинають і розсіюються ІЧ-радіацію як в об'ємі, так і на поверхнях розривів суцільності.

У цій статті розглядається ітераційний підхід для розв'язування прямої одновимірної задачі стаціонарного кондуктивно-радіаційного теплообміну в плоскому шарі, що випромінює, поглинає та розсіює ІЧ-радіацію в об'ємі та на поверхні й обмінюється теплом із зовнішнім середовищем через поверхню за променевим і радіаційним механізмами. Із застосуванням апроксимації скінченними елементами розроблено алгоритм чисельної реалізації ітераційного методу та проведено кількісні дослідження його збіжності. Для оцінки його ефективності проведені кількісні дослідження розподілів температури й інтенсивності випромінювання у шарі.

### 1. Формулювання задачі

Розглядається плоский теплопровідний ізотропний шар  $\mathcal{S}$ , що займає область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-\infty < z < \infty$ . Середовище шару здатне випромінювати, поглинати та розсіювати ІЧ-радіацію. Стаціонарний тепловий стан будь-якої точки тіла визначає його температура  $T$ , залежна від координати  $y$ :  $T = T(y)$ . Внаслідок теплового випромінювання неоднорідно нагрітого середовища в області шару  $\mathcal{S}$  і поза його межами виникає потік випромінювання, інтенсивність  $I$  якого залежить лише від координати  $y$  і напрямку поширення, що визначається його кутом  $\alpha$  стосовно осі  $Oy$ :  $I = I(y, \alpha)$ .

Кондуктивно-променевий теплообмін у шарі за стаціонарних умов описує система рівнянь [4], яка в безрозмірній формі матиме вигляд

$$\frac{d^2 \bar{T}(\bar{y})}{d\bar{y}^2} = \frac{2\bar{\kappa}}{\bar{\lambda}} \left[ 2(\bar{T}(\bar{y}))^4 - \int_{-1}^1 J(\bar{y}, \mu) d\mu \right], \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial J(\bar{y}, \mu)}{\partial \bar{y}} + J(\bar{y}, \mu) = \frac{1}{2}(1 - \bar{\kappa}) \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') J(\bar{y}, \mu') d\mu' + \bar{\kappa}(\bar{T}(\bar{y}))^4. \quad (2)$$

Тут введені позначення:  $\bar{y} = \beta y$  — просторова координата, нормована на оптичну товщину  $l_0 = 1/\beta$ , де  $\beta \equiv \kappa + \sigma$ ,  $\kappa$  та  $\sigma$  — об'ємні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання;  $\bar{\lambda} = \lambda\beta / (\sigma_{SB} n^2 T_0^3)$ , де  $\lambda$  — коефіцієнт теплопровідності середовища шару,  $\sigma_{SB} \equiv 5,6704 \times 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$  — стала Стефана-Больцмана,  $n$  — показник заломлення середовища шару;  $\bar{\kappa} = \kappa/\beta$  — нормований коефіцієнт поглинання випромінювання;  $\bar{T} \equiv T/T_0 = \bar{T}(\bar{y})$  — нормована температура, де  $T_0$  — деяка характерна температура;  $J \equiv I/I_B(T_0) = J(\bar{y}, \mu)$  — нормована інтенсивність випромінювання,  $I_B(\dots) = \sigma_{SB} n^2 (\dots)^4 / \pi$ ;  $\mu \equiv \cos \alpha$ ;  $p(\mu, \mu')$  — індикатриса розсіювання, яка визначає ймовірність розсіювання в напрямку  $\alpha = \arccos \mu$  випромінювання, яке поширюється в напрямку  $\alpha' = \arccos \mu'$ .

Нехай  $T_1, T_2$  — температура зовнішнього середовища біля поверхонь  $y = b$  та  $y = -b$ ,  $h_1, h_2$  — коефіцієнти конвективного теплообміну на них, а  $J_1 = J_1(\mu)$ ,  $\mu \in [-1, 0)$  і  $J_2 = J_2(\mu)$ ,  $\mu \in (0, 1]$  інтенсивності випромінювання середовища біля цих поверхонь, нормовані на інтенсивність  $I_B(T_0)$ . Вважатимемо, що ці поверхні є сірі поверхні з коефіцієнтами чорноти  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$  і розсіювання  $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1)$ . Тоді крайові умови для температури  $\bar{T}$  та густини випромінювання  $J$  на цих поверхнях матимуть вигляд:

$$\bar{\lambda} \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + \bar{h}_1 \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_1 \right) + \varepsilon_1 \left[ \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right)^4 - 2(1 - \rho_1) \int_0^1 J^+ \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\varepsilon_1(1-\rho_1) \int_{-1}^0 J_1 \mu d\mu, \\
 &\bar{\lambda} \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} + \bar{h}_2 \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_2 \right) + \varepsilon_2 \left[ \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} \right)^4 - 2(1-\rho_2) \int_{-1}^0 J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} \mu d\mu \right] = \\
 &= 2\varepsilon_2(1-\rho_2) \int_0^1 J_2 \mu d\mu, \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J^- \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} &= \varepsilon_1 \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right)^4 + 2\rho_1 \int_0^1 J^+ \mu d\mu + 2(1-\varepsilon_1)(1-\rho_1) \int_{-1}^0 J_1 \mu d\mu, \\
 J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} &= \varepsilon_2 \left( \bar{T} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} \right)^4 + 2\rho_2 \int_{-1}^0 J^- \mu d\mu + 2(1-\varepsilon_2)(1-\rho_2) \int_0^1 J_2 \mu d\mu. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Тут використані позначення:  $\bar{b} \equiv b/l_0$ ,  $\bar{h}_{1,2} \equiv h_{1,2}/\sigma_{SB} n^2 T_0^3$ ,  $J^+(\bar{y}, \mu) \equiv J(\bar{y}, \mu)$ ,  $\forall \mu \in (0, 1]$ ,  $J^-(\bar{y}, \mu) \equiv J(\bar{y}, \mu)$ ,  $\forall \mu \in [-1, 0)$ .

Замість мішаних умов (3) можна розглядати також крайові умови першого роду на температуру. Зокрема, далі зупинимося на випадкові, коли на поверхні  $\bar{y} = \bar{b}$  діють умови (3), (4), в яких  $J_1 \equiv 0$ , а поверхня  $\bar{y} = -\bar{b}$  є абсолютно чорна та на ній задано сталу температуру. Тоді, вибираючи за  $T_0$  задану температуру поверхні  $\bar{y} = -\bar{b}$ , запишемо крайові умови на цій поверхні у вигляді

$$\bar{T} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1, \quad J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1. \tag{5}$$

Крайова задача (1), (2), (3)<sub>1</sub>, (4)<sub>1</sub>, (5) залежить від шести безрозмірних параметрів  $\bar{\lambda} > 0$ ,  $\bar{h} \equiv \bar{h}_1 > 0$ ,  $\bar{b} > 0$ ,  $\bar{\kappa} \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\rho_1 \equiv \rho \in [0, 1]$ .

## 2. Ітераційний метод

Нелінійну задачу (1)-(4) розв'язуватимемо ітераційним методом, позначивши  $k \geq 0$  як номер ітерації. Для цього подамо її у вигляді:

$$\frac{d^2 \bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}^2} = \theta \left( T^{(k)}, J^{(k)} \right), \tag{6}$$

$$\mu \frac{\partial J^{(k+1)}}{\partial \bar{y}} + J^{(k+1)} = f \left( T^{(k)}, J^{(k)} \right), \tag{7}$$

$$\frac{d\bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = Q^{(k)}, \quad \bar{T}^{(k+1)} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1, \tag{8}$$

$$J^{-(k+1)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon J_B(\bar{T}^{(k)})\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho \int_0^1 \rho J^{+(k)} \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}, \quad J^{+(k+1)}\Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1. \quad (9)$$

Тут для зручності використали позначення:  $J_B(\bar{T}^{(k)}) \equiv (\bar{T}^{(k)})^4$ ,  $\theta(T^{(k)}, J^{(k)}) \equiv \frac{2\bar{\kappa}}{\lambda} \left( 2J_B(\bar{T}^{(k)}) - \int_{-1}^1 J^{(k)} d\mu \right)$ ,  $f(T^{(k)}, J^{(k)}) \equiv \frac{1}{2} \bar{\sigma} \int_{-1}^1 \rho J^{(k)} d\mu' + \bar{\kappa} J_B(\bar{T})$ ,  $Q^{(k)} \equiv \frac{\varepsilon(1-\rho)}{\lambda} \times \left( 2q^{+(k)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - J_B(\bar{T}^{(k)})\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right) - \frac{\bar{h}}{\lambda} \left( \bar{T}^{(k)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_c \right)$ ,  $q^{+(k)} = q^+(J^{+(k)}) \equiv \int_0^1 J^{+(k)} \mu d\mu$ .

Інтегруючи рівняння (6), (7) і підпорядковуючи їх крайовим умовам (8), (9), з урахування позначень  $\theta^{(k)} \equiv \theta(T^{(k)}, J^{(k)})$ ,  $f^{(k)} \equiv f(T^{(k)}, J^{(k)})$  отримуємо:

$$\bar{T}^{(k+1)}(\bar{y}) = \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \int_{-\bar{b}}^z \theta^{(k)}(\zeta) d\zeta dz + \left( Q^{(k)} - \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \theta^{(k)}(\bar{y}) d\bar{y} \right) (\bar{y} + \bar{b}) + 1, \quad (10)$$

$$J^{+(k+1)} = \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{f^{(k)}(z) e^{-\frac{\bar{y}-z}{\mu}}}{\mu} dz + e^{-\frac{\bar{y}+\bar{b}}{\mu}},$$

$$J^{-(k+1)} = \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{f^{(k)}(z) e^{-\frac{\bar{y}-z}{\mu}}}{\mu} dz + e^{-\frac{\bar{y}-\bar{b}}{\mu}} \left( \varepsilon J_B(\bar{T}^{(k)})\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho \int_0^1 \rho J^{+(k)} \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right). \quad (11)$$

### 3. Розв'язок для нульової ітерації

Для реалізації ітераційного процесу (10), (11) необхідно вибрати початкове наближення. За нульове наближення виберемо розв'язок задачі (1), (2), (3)<sub>1</sub>, (4)<sub>1</sub>, (5) для випадку радіаційної рівноваги й ізотропного розсіювання в об'ємі. У такому наближенні вона матиме вигляд

$$\frac{d^2 \bar{T}^{(0)}}{d\bar{y}^2} = 0, \quad (13)$$

$$\mu \frac{\partial J^{\pm(0)}}{\partial \bar{y}} + J^{\pm(0)} = J_B(\bar{T}^{(0)}), \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{T}^{(0)}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \frac{\varepsilon(1-\rho)}{\lambda} \left[ 2q^{+(0)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - J_B(\bar{T}^{(0)})\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right] - \frac{\bar{h}}{\lambda} \left( \bar{T}^{(0)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_c \right), \quad \bar{T}^{(0)}\Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1, \quad (15)$$

$$J^{-(0)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon J_B(\bar{T}^{(0)})\Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho q^{+(0)}\Big|_{\bar{y}=\bar{b}}, \quad J^{+(0)}\Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = 1. \quad (16)$$

Інтегруючи рівняння (13) і підпорядковуючи його розв'язок крайовій умові (15)<sub>2</sub>, отримуємо:

$$\bar{T}^{(0)} = C(\bar{y} + \bar{b}) + 1. \quad (17)$$

Інтегруючи рівняння (14) із врахуванням умов (16), одержимо:

$$J^{+(0)} = \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{J_B(T^{(0)}(z)) e^{-\frac{\bar{y}-z}{\mu}}}{\mu} dz + e^{-\frac{\bar{y}+\bar{b}}{\mu}},$$

$$J^{-(0)} = \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{J_B(T^{(0)}(z)) e^{-\frac{\bar{y}-z}{\mu}}}{\mu} dz + e^{-\frac{\bar{y}-\bar{b}}{\mu}} \left[ \varepsilon J_B(\bar{T}^{(0)}) \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho q^{+(0)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right]. \quad (18)$$

Помножимо обидві частини рівності (18)<sub>1</sub> на  $\mu$  та проінтегруємо їх за змінною  $\mu$  у межах  $[0; 1]$ . В результаті отримаємо вираз для густини потоку  $q^{+(0)}$  і обчислимо його значення на поверхні  $\bar{y} = \bar{b}$ . Підставляючи його в крайову умову (15)<sub>1</sub>, з урахуванням формули (17) отримуємо рівняння четвертого степеня стосовно невідомої сталої інтегрування  $C$ :

$$\frac{\varepsilon(1-\rho)}{15\bar{\lambda}} (A_0 C^4 + A_1 C^3 + A_2 C^2) + A_3 C + \frac{\bar{h}(1-\bar{T}_1)}{\bar{\lambda}} = 0, \quad (19)$$

коефіцієнти якого визначаються як

$$A_0 = 8 \left[ (-4\bar{b}^5 + 2\bar{b}^4 - 2\bar{b}^3 + 3\bar{b}^2 - 6\bar{b} + 15) e^{-2\bar{b}} + 8Ei(-2\bar{b})\bar{b}^6 + 40\bar{b}^3 - 45\bar{b}^2 + 36\bar{b} - 15 \right],$$

$$A_1 = 24 \left[ (-4\bar{b}^4 + 2\bar{b}^3 - 2\bar{b}^2 + 3\bar{b} - 6) e^{-2\bar{b}} + 8Ei(-2\bar{b})\bar{b}^5 + 20\bar{b}^2 - 15\bar{b} + 6 \right],$$

$$A_2 = 30 \left[ (-4\bar{b}^3 + 2\bar{b}^2 - 2\bar{b} + 3) e^{-2\bar{b}} + 8Ei(-2\bar{b})\bar{b}^4 + 8\bar{b} - 3 \right],$$

$$A_3 = \frac{8\varepsilon(1-\rho)}{3\bar{\lambda}} \left[ (-2\bar{b}^2 + \bar{b} - 1) e^{-2\bar{b}} + 4Ei(-2\bar{b})\bar{b}^3 - 3\bar{b} + 1 \right] + \frac{2\bar{b}[\bar{h} + 4\varepsilon(1-\rho)]}{\bar{\lambda}} + 1. \quad (20)$$

Тут  $Ei(\dots)$  — інтегральна експонента.

Таким чином, розв'язуючи чисельно рівняння (19), за формулами (17), (18) обчислимо розв'язок задачі на нульовій ітерації.

Якщо поверхня  $\bar{y} = \bar{b}$  не поглинає ( $\varepsilon = 0$ ) або повністю розсіює випромінювання ( $\rho = 1$ ), то рівняння (19) стає лінійним, розв'язком якого є

$$C = -\bar{h}(1 - \bar{T}_1) / (2\bar{b}\bar{h} + \bar{\lambda}). \quad (21)$$

#### 4. Апроксимація розв'язку скінченними елементами

Аналітичні обчислення розв'язку за формулами (10), (11) є неефективні, оскільки потребують багаторазового інтегрування громіздких виразів, що містять спеціальні функції. Тому розробимо алгоритм чисельної реалізації ітераційного процесу (17), (18), (10), (11), який базується на апроксимації розв'язку задачі скінченними елементами [9].

З цією метою розіб'ємо відрізок  $[-\bar{b}, \bar{b}]$  на  $N$  інтервалів точками  $\bar{y}_i (i = \overline{0, N})$ , введемо на кожному інтервалі локальні координати  $\xi = (2y - y_i - y_{i+1}) / (y_{i+1} - y_i)$ ,  $\xi \in [-1, 1]$  та апроксимуємо на цих інтервалах функції розв'язку на кожній ітерації лінійними функціями

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(k)}(\xi) &= \bar{T}_i^{(k)}\varphi_1(\xi) + \bar{T}_{i+1}^{(k)}\varphi_2(\xi), \\ J^{(k)}(\xi, \mu) &= J_i^{(k)}(\mu)\varphi_1(\xi) + J_{i+1}^{(k)}(\mu)\varphi_2(\xi), \end{aligned} \quad (22)$$

де  $\bar{T}_i^{(k)} \equiv \bar{T}^{(k)}(\bar{y}_i)$ ,  $J_i^{(k)}(\mu) \equiv J^{(k)}(\bar{y}_i, \mu)$ ,  $\varphi_1(\xi) = 1/2(1 + \xi)$ ,  $\varphi_2(\xi) = 1/2(1 - \xi)$ .

За формулами (17), (18) обчислимо значення температури  $\bar{T}_i^{(0)}$  та інтенсивності випромінювання  $J_i^{+(0)}$ ,  $J_i^{-(0)}$  у вузлах сітки. Відтак, підставляючи подання (22) у формули (10), (11), зведемо інтеграли у правих частинах цих формул до суми інтегралів за скінченними елементами. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{T}_i^{(k+1)} &= \frac{\Delta^2}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \left[ 2 \sum_{m=0}^j (\theta_m^{(k)} + \theta_{m+1}^{(k)}) - \theta_j^{(k)} - \theta_{j+1}^{(k)} \right] + \\ &+ \left[ Q_i^{(k)} - \frac{\Delta}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (\theta_j^{(k)} + \theta_{j+1}^{(k)}) \right] (\bar{y}_i + \bar{b}) + 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J_i^{+(k+1)}(\mu) &= \frac{e^{-\bar{y}_i/\mu}}{\mu} \left[ f_0^{(k)} v_0(\mu) + \sum_{j=1}^{i-1} f_j^{(k)} (v_j(\mu) + w_{j-1}(\mu)) + f_i^{(k)} w_{i-1}(\mu) + \mu e^{-\bar{b}/\mu} \right], \\ J_i^{-(k+1)}(\mu) &= \frac{e^{-\bar{y}_i/\mu}}{\mu} \left\{ -f_i^{(k)} v_i(\mu) - \sum_{j=i+1}^{N-1} f_j^{(k)} (v_j(\mu) + w_{j-1}(\mu)) - f_N^{(k)} w_{N-1}(\mu) + \right. \\ &+ \left. \mu e^{\bar{b}/\mu} \left[ \varepsilon J_B \left( \bar{T}_i^{(k)} \Big|_{\bar{y}_i=\bar{b}} \right) + 2\rho \int_0^1 p(\mu, \mu') J_i^{+(k)}(\mu) \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}_i=\bar{b}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тут  $\Delta = 2\bar{b}/N$ ,

$$v_j(\mu) = -\frac{\mu}{\Delta} \left[ (\Delta + \mu) e^{\bar{y}_j/\mu} - \mu e^{\bar{y}_{j+1}/\mu} \right], w_j(\mu) = \frac{\mu}{\Delta} \left[ (\Delta - \mu) e^{\bar{y}_{j+1}/\mu} + \mu e^{\bar{y}_j/\mu} \right]. \quad (25)$$

### 5. Числове дослідження розв'язку

Для оцінки розробленого ітераційного підходу провели серію числових експериментів. Із отриманих результатів випливає, що його збіжність залежить, в основному, від співвідношення між безрозмірними коефіцієнтом теплопровідності  $\bar{\lambda}$  та товщиною  $2\bar{b}$  — що більше  $\bar{\lambda}$ , тим швидше за фіксованого  $\bar{b}$  збігається ітераційний процес (23), (24). Тому для кожного  $\bar{b}$  означимо  $\bar{\lambda}^*$  таке, що для всіх  $\bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}^*$  ітераційний процес (23), (24) є збіжний. Залежність  $\bar{\lambda}^*(\bar{b})$  в логарифмічній шкалі, яка отримана в результаті проведення числових експериментів, наведено на рис. 1. Заштрихована область на цьому рисунку відповідає області збіжності. На вертикальній шкалі подано кількість ітерацій, необхідних для розв'язування задачі за  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$ .

Під час обчислень ітераційний процес завершували за виконання умови

$$\max \left( \max \left| \bar{T}_i^{(k+1)} - \bar{T}_i^{(k)} \right| + \max \left| \int_{-1}^1 J_i^{(k+1)}(\mu) d\mu - \int_{-1}^1 J_i^{(k)}(\mu) d\mu \right| \right) \leq 10^{-3}. \quad (26)$$

Із проведених числових досліджень випливає також, що решта параметрів задачі  $(\bar{h}, \bar{\kappa}, \varepsilon, \rho)$  мало впливають на збіжність ітераційного процесу. Проте ці параметри істотно впливають на температурне поле в шарі та розподіл інтенсивності випромінювання.

На рис. 2, для прикладу, подані залежності інтенсивності випромінювання  $J^+(\bar{y}, \mu)$  (суцільні лінії) та  $J^-(\bar{y}, \mu)$  (штрихові лінії) від координати  $\bar{y}$  за різних значень кута  $\alpha = \arccos \mu$  між напрямом його поширення та віссю  $Oy$ .

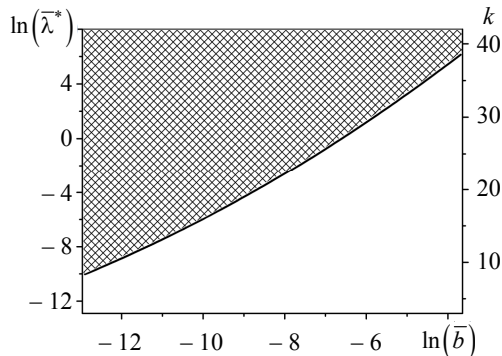


Рис. 1. Область збіжності ітераційного процесу

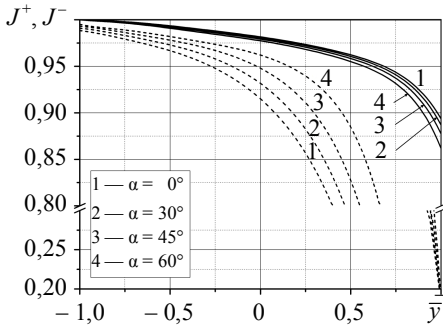


Рис. 2. Розподіл інтенсивності випромінювання в шарі для різних кутів поширення  $\alpha$

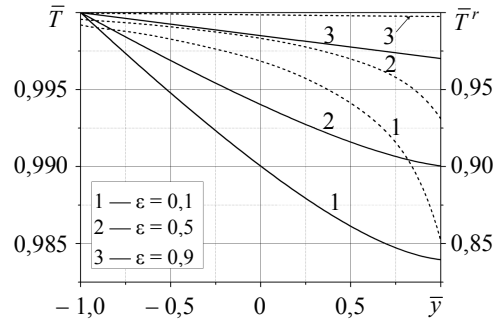


Рис. 3. Розподіли температури та радіаційної температури в шарі за різних  $\epsilon$

Рис. 3 ілюструє вплив коефіцієнта чорноти  $\epsilon$  поверхні  $\bar{y} = \bar{b}$  на розподіли температури  $\bar{T}(\bar{y})$  (суцільні лінії) та радіаційної температури, обчисленої як

$$\bar{T}^r(\bar{y}) = \left( \int_{-1}^1 J(\bar{y}, \mu) d\mu / 2 \right)^{1/4} \quad (\text{штрихові лінії}).$$

**Висновки.** Розроблено ітераційний підхід та алгоритм його чисельної реалізації для нелінійної задачі кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі, який поглинає, розсіює й емітує ІЧ-випромінювання, як в об'ємі, так і на межі розділу із зовнішнім середовищем і обмінюється з ним теплом за конвективним механізмом. Проведені числові експерименти дозволили визначити його область збіжності. Встановлено, що збіжність запропонованого ітераційного процесу в основному залежить від співвідношення між безрозмірними параметрами  $\bar{\lambda}$  та  $\bar{b}$ . Це співвідношення визначається теплопровідністю  $\lambda$  середовища шару, його товщиною  $2b$ , об'ємними коефіцієнтами поглинання  $\kappa$  та розсіювання  $\sigma$ . Так для матеріалів із низькою теплопровідністю, наприклад для  $\lambda \approx 1 \text{ Вт/мК}$  (скло) максимальна товщина шару  $2b$ , для якого ітераційний процес збігається, не перевищує значення  $0,02 \text{ м}$ . Зі збільшенням  $\lambda$  це значення зростає.

Необхідно також провести теоретичні дослідження збіжності запропонованого ітераційного процесу й отримати апріорні оцінки точності.

Застосування скінченно-елементної апроксимації дозволило істотно підвищити швидкість чисельної реалізації методу. Висока швидкодія розробленого алгоритму забезпечує можливість його використання для створення методів розв'язування обернених задач складного теплообміну в плоских шарах.

Обмеження області збіжності зумовлене тим, що зі зростанням товщини  $2b$  в околі поверхні  $y = b$  виникає граничний шар — область різкої зміни температури й інтенсивності випромінювання. Внаслідок цього задача стає сингулярно збуреною. Тому у подальших дослідженнях слід застосувати методи регуляризації до цієї задачі, і в такий спосіб розширити область збіжності ітераційного процесу.



## Література

- [1] *Daryabeigi K.* Combined Heat Transfer in High-Porosity High Temperature Fibrous Insulations: Theory and Experimental Validation // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer.* — 2011. — Vol. 25, No 4. — P 536-546.
- [2] Three dimensional heat transfer analysis of combined conduction and radiation in honeycomb transparent insulation / *H. Kessentini, R. Capdevila, J. Castro et al.* // *Solar Energy.* — 2014. — Vol. 105. — P. 58-70.
- [3] Simultaneous radiation and conduction heat transfer in a graded index semitransparent slab with gray boundaries / *X. Xia, Y. Huang, H. Tan, X. Zhang* // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* — 2002. — Vol. 45. — P 2673-2688.
- [4] *Оцирик М. Н.* Сложный теплообмен. — Москва: Мир. — 1976. — 605 с.
- [5] *Чекурин В. Ф., Бойчук Ю. В.* Моделювання стаціонарного кондуктивно-променевого теплообміну в кусково-однорідному плоскому шарі // Відбір і обробка інформації. — 2013. — Вип. 38. — С. 32-39.
- [6] Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive–convective–radiative heat transfer / *A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, N. Botkin, K. Hoffmann* // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2014. — Vol. 412. — P. 520-528.
- [7] *Zhang Y., Yi H. L., Tan H. P.* Natural element method analysis for coupled radiative and conductive heat transfer in semitransparent medium with irregular geometries // *International Journal of Thermal Sciences.* — 2014. — Vol. 76. — P. 30-42.
- [8] Convection–radiation heat transfer in solar heat exchangers filled with a porous medium: Homotopy perturbation method versus numerical analysis / *D. Maziar, R. Yousef, D. Davood et al.* // *Renewable Energy.* — 2015. — Vol. 74. — P. 448-455.
- [9] *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — Москва: Мир. — 1984. — 428 с.

## An iterative approach for solving of non-linear problems for conductive-radiative heat transfer in a plane layer

Vasyl Chekurin, Yuri Boychuk

*Non-linear problems for conductive-radiative heat transfer in a plane layer which emits, absorbs and scatters IR-radiation in its volume and on the surface are considered in the paper. The convective heat exchange of the layer with environment is also taken into consideration in the problem. An iterative method for these problems solving has been developed. An algorithm for numerical realization of the method has been created with the use of finite-element approximation. Numerical studies of iterative method's convergence have been carried out.*

## Итерационный подход решения нелинейных задач кондуктивно-лучевого теплообмена в плоском слое

Василь Чекурин, Юрий Бойчук

*Разработан итерационный метод решения нелинейных задач кондуктивно-лучевого теплообмена в плоском слое, который поглощает, эмитирует и рассеивает ИК-излучение, как в объеме, так и на поверхностях раздела с внешней средой, а также обменивается с ней теплом конвекцией. С использованием конечно-элементной аппроксимации создан алгоритм для численной реализации метода. Проведено численное исследование сходимости разработанного метода.*

Отримано 09.04.2015