

Вплив гармонічної хвилі на концентрацію напружень у безмежному тілі з податливими дисковими включеннями

Іванна Бутрак

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: butrak@iapmm.lviv.ua

Досліджено поширення гармонічних пружних хвиль у безмежному тілі з системою дискових включень малої жорсткості. Задачу у частотній області зведено до системи граничних інтегральних рівнянь щодо функцій стрибків переміщень на включенні. За допомогою числового методу проаналізовано розподіл коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень відриву в околі включень від хвильового числа за різної відстані між дефектами та співвідношення між пружними модулями матричного середовища та кругових включень.

Ключові слова: безмежне пружне тіло, гармонічна хвиля, дискове включення, коефіцієнти інтенсивності динамічних напружень, метод граничних інтегральних рівнянь.

Вступ. Поряд із тріщинами, тонкостінні або дискові включення є об'єктами зосередження напружень і каталізаторами процесів руйнування. Вони заслуговують особливої уваги, оскільки такі наповнювачі характерні для сучасних нанокомпозитних структур [1, 2]. Включення можуть утворюватися цілеспрямованим заліковуванням існуючих тріщин шляхом їхнього наповнення зв'язуючим матеріалом [3]. Достатньо повно досліджено прямі й обернені задачі розсіяння пружних хвиль на ізольованих тріщинах, включеннях різної форми та жорсткості [4-7]. У працях [8-11] проаналізовано динамічну взаємодію тріщина-включення для різних конфігурацій форми, контрастності пружних параметрів складників композиту та зовнішнього навантаження. Нижче метод граничних інтегральних рівнянь застосовано для вивчення взаємодії системи дискових включень малої жорсткості за падіння на них плоскої поздовжньої хвилі.

1. Формулювання задачі

Нехай у безмежному пружному тілі з модулем зсуву G та коефіцієнтом Пуассона ν у площині $x_3 = 0$ розташовано N податливих кругових включень S_n ($n = \overline{1, N}$) з товщинами h_n і радіусами a_n (рис. 1). Модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона n -ого включення позначимо відповідно G_n і ν_n . Припускаємо, що включення перебувають в умовах ідеального механічного контакту з матрицею, тобто забезпечується неперервність переміщень і напружень при перетині міжфазних поверхонь.

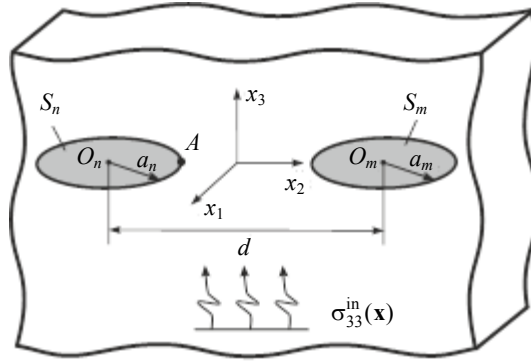


Рис. 1. Схема задачі

У середовищі поширюється гармонічна пружна плоска поздовжня хвиля з перпендикулярним до площини розташування неоднорідностей вектором переміщень $\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ та циклічною частотою коливань ω . Тоді задана хвиля викликає у площині дефектів тільки нормальні напруження $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$, де $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — радіус-вектор точки простору в декартовій системі координат O_{x_1, x_2, x_3} , t — час. Внаслідок усталеного характеру хвильового процесу часову координату вилучаємо з аналізу шляхом введення у розв'язок відповідного експоненціального множника $\exp(-i\omega t)$, де $i = \sqrt{-1}$. У результаті переходимо до відшукування амплітудних значень шуканих величин.

Наявність у матриці множини неоднорідностей призводить до виникнення додаткових переміщень і напружень. Тому загальне хвильове поле переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ у матриці подається у вигляді суми

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де \mathbf{u}_n — невідомі переміщення в розсіяних включеннях хвилях. Всі складові у співвідношеннях (1) повинні задовільняти дифракційні рівняння руху у випадку стаціонарних коливань [12]

$$k_1^{-2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - k_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Тут ∇ — тривимірний набла-оператор, $k_j = \omega/c_j$ ($j=1, 2$) — хвильові числа, c_1, c_2 — швидкості поширення у тілі поздовжніх і поперечних хвиль. Для забезпечення єдиності розв'язку поставленої задачі необхідне виконання обмежень на компоненти падаючого та розсіяного полів, тобто їх прямування до нуля на безмежності [12].

Граничні умови в області S_n n -ого включення моделюємо лінійною залежністю між нормальними напруженнями σ_{33n} і стрибками нормальних переміщень

Δu_{3n} у цій області. Внаслідок симетрії задачі відповідні тангенціальні величини дорівнюють нулю. Адекватність моделі забезпечується малістю товщини включень стосовно його діаметру, якщо $h_n = 2\delta_1 a_n$ ($\delta_1 \ll 1$), і стосовно довжини збуджувальної хвилі $k_2 h_n \ll 1$, а також умовою податливості матеріалу включень щодо матричного матеріалу, якщо $G_n = \delta_2 G$ ($\delta_2 \ll 1$), де величини δ_1 і δ_2 мають однаковий порядок. Звідси маємо

$$\sigma_{33n}(\mathbf{x}_n) = f_n \Delta u_{3n}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де коефіцієнт жорсткості f_n задається співвідношенням параметрів включення

$$f_n = \frac{2(1-\nu_n)G_n}{(1-2\nu_n)h_n}.$$

Компоненти динамічних переміщень u_{jn} ($j = \overline{1, 3}, n = \overline{1, N}$) запишемо в інтегральній формі за допомогою подань Сомільяно, згідно якого

$$\begin{aligned} u_{jn}(\mathbf{x}_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \iint_{S_m} \Delta u_{3m}(\xi_m) \left[\frac{\exp(ik_1 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(1-\delta_{j3}) \exp(ik_2 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} \right] dS_{\xi_m} + \right. \\ \left. + \frac{2}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{3n}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2n}^2} \right) \iint_{S_m} \Delta u_{3m}(\xi_m) \left[\frac{\exp(ik_1 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\exp(ik_2 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} \right] dS_{\xi_m} \right\}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (4) \end{aligned}$$

Тут δ_{jk} — символ Кронекера, $|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|$ — відстань між точкою $\mathbf{x}_{mn}(x_{1mn}, x_{2mn}, x_{3mn})$ поля та точкою $\xi_m(\xi_{1m}, \xi_{2m}, 0)$ інтегрування.

За законом Гука, після підстановки співвідношень (4) у вирази для переміщень (1), обчислено відповідні напруження. Подальшим застосуванням граничних умов (3) задачу зведено до розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР) другого роду щодо функцій розкриття Δu_{3n} ($n = \overline{1, N}$)

$$\begin{aligned} f_n \Delta u_{3n}(\mathbf{x}_n) - \frac{4G}{k_2^2} \sum_{m=1}^N \iint_{S_m} \Delta u_{3m}(\xi_m) R(|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|) dS_{\xi_m} = \\ = -\sigma_{33n}^{\text{in}}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N}. \quad (5) \end{aligned}$$

Тут R — гіперсингулярне в точці $\mathbf{x}_{mn} = \xi_m$ ядро з порядком особливості r^{-3} , а саме:

$$R(r) = \left\{ \left(9 - 9ik_2 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m| - 4k_2^2 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^2 + ik_2^3 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^3 \right) \exp(ik_2 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|) - \right. \\ \left. - \left[9 - 9ik_1 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m| + (k_2^2 - 5k_1^2) |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^2 + ik_1 (2k_1^2 - k_2^2) |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (2k_1^2 - k_2^2) |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^4 \right] \exp(ik_1 |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|) \right\} |\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^{-5}.$$

У частковому випадку при $G_n = 0 (n = \overline{1, N})$ система ГІР (5) відповідає задачі динамічної взаємодії N тріщин, а за граничного переходу $\omega \rightarrow 0$ зводиться до системи ГІР статичної задачі про взаємодію тріщин у безмежному тілі.

2. Регулярне подання ГІР та їх числове розв'язання

Систему рівнянь (5) за допомогою інтегралів типу ньютонівського потенціалу можна перетворити до регулярного відповідника

$$(1 - \nu) \bar{f} \Delta u_{3n}(\mathbf{x}_n) - \sum_{m=1}^N \left\{ \iint_{S_m} \frac{\Delta u_{3m}(\xi_m)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^3} dS_{\xi_m} + qk_2^2 \iint_{S_m} \frac{\Delta u_{3m}(\xi_m)}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} dS_{\xi_m} - \right. \\ \left. - \iint_{S_m} \Delta u_{3m}(\xi_m) \left[\frac{8(1-\nu)}{k_2^2} R(|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|) + \frac{1}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|^3} + \frac{qk_2^2}{|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|} \right] dS_{\xi_m} \right\} = \\ = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{33n}^{\text{in}}, \quad \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де $\bar{f} = [2(1-\nu_n)(1-\nu)\bar{G}] / [(1-2\nu_n)h_n]$, $\bar{G} = G_n/G$, $q = (7-12\nu+8\nu^2) / [8(1-\nu)]$.

Шукані функції подамо у вигляді добутків

$$\Delta u_{3n}(\mathbf{x}_n) = \sqrt{a_n^2 - (x_{1n} - b_n)^2 - (x_{2n} - c_n)^2} \alpha_n(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (7)$$

де $\alpha_n (n = \overline{1, N})$ — нові невідомі функції; $b_n, c_n (n = \overline{1, N})$ — координати центрів включень.

Згідно з поданнями (7) особливі інтеграли у рівняннях (6) можна записати таким чином

$$\iint_{S_n} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|^3} \alpha_n(\xi_n) dS_{\xi_n} = I_{00}^n(\mathbf{x}_n) \alpha_n(\mathbf{x}_n) + I_{01}^n(\mathbf{x}_n) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}} + \\ + I_{10}^n(\mathbf{x}_n) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}} + \frac{1}{2} I_{02}^n(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}^2} + I_{11}^n(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n} \partial x_{2n}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} I_{20}^n(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}^2} + \iint_{S_n} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|^3} \left[\alpha_n(\xi_n) - \alpha_n(\mathbf{x}_n) - \right. \\
& - (\xi_{1n} - x_{1n}) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}} - (\xi_{2n} - x_{2n}) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}} - \frac{1}{2} (\xi_{1n} - x_{1n})^2 \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}^2} - \\
& \left. - (\xi_{1n} - x_{1n})(\xi_{2n} - x_{2n}) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n} \partial x_{2n}} - \frac{1}{2} (\xi_{2n} - x_{2n})^2 \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}^2} \right] dS_{\xi_n}, \\
& \iint_{S_n} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|} \alpha_n(\xi_n) dS_{\xi_n} = I^n(\mathbf{x}_n) \alpha_n(\mathbf{x}_n) + \iint_{S_n} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|} [\alpha_n(\xi_n) - \alpha_n(\mathbf{x}_n)] dS_{\xi_n}, \\
& \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Тут

$$\begin{aligned}
I_{jk}^n(\mathbf{x}_n) &= \iint_{S_n} Q \frac{(\xi_{1n} - x_{1n})^j (\xi_{2n} - x_{2n})^k}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|^3} dS_{\xi_n}, \\
I^n(\mathbf{x}_n) &= \iint_{S_n} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \xi_n|} dS_{\xi_n}, \\
Q &= \sqrt{a_n^2 - (\xi_{1n} - b_n)^2 - (\xi_{2n} - c_n)^2}, \quad n = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Підінтегральні вирази у правих частинах рівностей (8) обмежені в точці $\mathbf{x}_n = \xi_n$, тому їх числове інтегрування виконувалося вздовж області S_n^ε , яка з S_n утворюється вилученням малого околу цієї точки. Інтеграли (9) існують у сенсі головного значення та беруться аналітично шляхом інтегрування частинами.

Підставляючи співвідношення (8) у ГІР (6), отримаємо їх регулярний аналог

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{f}_n(\mathbf{x}_n) - g_{00n}(\mathbf{x}_n) - qk_2^2 g_n(\mathbf{x}_n) \right] \alpha_n(\mathbf{x}_n) - g_{01n}(\mathbf{x}_n) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}} - \\
& - g_{10n}(\mathbf{x}_n) \frac{\partial \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}} - \frac{1}{2} g_{02n}(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n}^2} - g_{11n}(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{1n} \partial x_{2n}} - \\
& - \frac{1}{2} g_{20n}(\mathbf{x}_n) \frac{\partial^2 \alpha_n(\mathbf{x}_n)}{\partial x_{2n}^2} + \frac{8(1-\nu)}{k_2^2} \sum_{m=1}^N \iint_{S_m^\varepsilon} Q \alpha_m(\xi_m) R(|\mathbf{x}_{mn} - \xi_m|) dS_{\xi_m} = \\
& = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{33n}^{\text{in}}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in S_n, \quad n = \overline{1, N},
\end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\bar{f}_n(\mathbf{x}_n) = \frac{2(1-\nu_n)(1-\nu)\bar{G}}{(1-2\nu_n)h_n} Q,$$

$$g_{jkn}(\mathbf{x}_n) = I_{jkn}(\mathbf{x}_n) - \iint_{S_n^e} \frac{Q(\xi_{1n} - x_{1n})^j (\xi_{2n} - x_{2n})^k}{|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\xi}_n|^3} dS_{\boldsymbol{\xi}_n},$$

$$g_n(\mathbf{x}_n) = I_n(\mathbf{x}_n) - \iint_{S_n^e} \frac{Q}{|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\xi}_n|} dS_{\boldsymbol{\xi}_n}.$$

Система рівнянь (10) розв'язується числово. Для цього області S_n рівномірно покриваються сіткою радіально-кутових елементів із подальшим задоволенням рівнянь в усіх вузлових точках всередині граничних елементів.

3. Розподіл коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень

Безпосередньо через функції $\alpha_n(\mathbf{x}_n) (n = \overline{1, N})$ визначаються коефіцієнти інтенсивності динамічних напружень (КІДН) від кутової координати φ_n контуру дефекту

$$K_I^n(\varphi_n) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a_n}}{1-\nu} \alpha_n(a_n), \quad (11)$$

$$K_{II}^n(\varphi_n) = K_{III}^n(\varphi_n) = 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

Числові результати отримано для двох компланарних включень з однаковими радіусами $a_1 = a_2 = a$. Відстань між центрами розсіювачів визначається довжиною d . У тілі поширюється плоска поздовжня гармонічна хвиля з напрямним вектором, перпендикулярним до площини розташування розсіювачів і сталою амплітудою напружень U_0 , тоді $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = U_0 \exp(-ik_1 x_3)$. Розрахунки виконувалися для коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці та включень рівними між собою: $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0,3$, та товщини включень $h_1 = h_2 = 0,01a$. Наведені числові результати описують поведінку амплітуд КІДН у найближчих точках контурів включень (точка A на рис. 1), де їх взаємодія найбільш виразна. Для нормування амплітуд КІДН відриву в околі включень використовувалося значення $K_I^{\text{st}} = 2U_0\sqrt{a/\pi}$ коефіцієнта інтенсивності статичних напружень відриву для ізольованої кругової тріщини в матриці за одноосьового розтягу зусиллями U_0 , а саме $\bar{K}_I^n = |K_I^n|/K_I^{\text{st}}$. Внаслідок симетричності задачі щодо розташування включень $\bar{K}_I = \bar{K}_I^1 = \bar{K}_I^2$. Параметричний аналіз здійснювався як варіюванням жорсткості включень \bar{G} , так і відстанню d між ними. Необхідна точність розв'язку забезпечувалася згущенням сітки граничних елементів. Відносна похибка в межах одного процента досягалася розбиттям кожної з областей включення на 736 елементів.

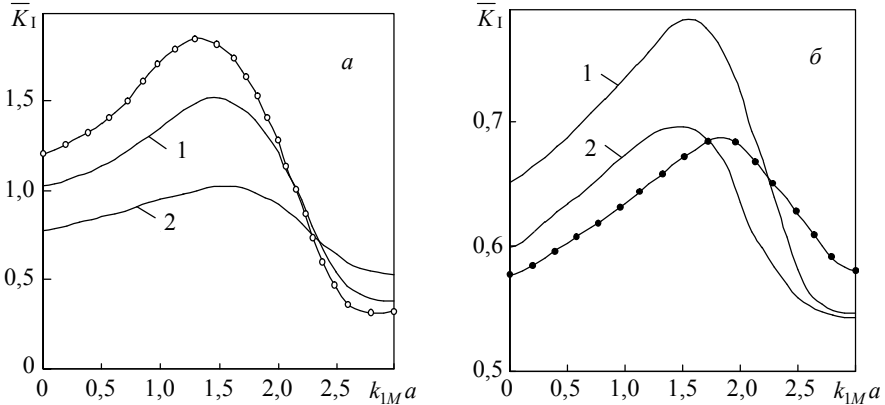


Рис. 2. Залежності відносних амплітуд коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень відриву \bar{K}_1 від нормалізованого хвильового числа $k_{1M}a$ за фіксованих відстані d (а) та жорсткості \bar{G} (б)

На рис. 2а наведено залежності відносних амплітуд КІДН відриву \bar{K}_1 від нормалізованого хвильового числа $k_{1M}a$ за фіксованої відстані $d = 2,15a$. Цифрами позначено криві, що відповідають різній податливості включень щодо матричного середовища: 1 — $\bar{G} = 0,001$; 2 — $\bar{G} = 0,005$. Рис. 2б ілюструє аналогічну зміну \bar{K}_1 за жорсткості $\bar{G} = 0,005$ для різних відстаней між центрами неоднорідностей: 1 — $d = 2,2a$; 2 — $d = 2,5a$. Маркована порожніми (заповненими) кружечками крива описує відповідну поведінку амплітуд КІДН у випадку наявності у тілі двох однакових кругових тріщин (ізолюваного включення) за тих самих зовнішніх факторів. Розрахунки виконано для діапазону хвильових розмірів неоднорідностей $k_{1M}a$ від статичних значень до 3.

З рисунків видно, що зі збільшенням частоти коливань амплітуди КІДН зростають від статичних значень, коли хвильове число рівне нулю, до максимуму з подальшим монотонним спаданням. Пікові значення амплітуд КІДН відриву спостерігаються в частотному діапазоні $1,3 \leq k_{1M}a \leq 1,8$ залежно від розглянутих геометричних і жорсткісних характеристик взаємодіючих об'єктів.

В області низьких частот (рис. 2а) амплітуди КІДН в околі включень менші, ніж у випадку двох взаємодіючих тріщин, окрім того відповідна різниця зростає зі збільшенням жорсткості включень. Цю закономірність можна використати для зменшення рівня динамічних напружень у пошкодженому тріщинами пружному тілі шляхом наповнення дефектів зв'язуючим кристалізуючим матеріалом. Діапазон вищих хвильових чисел характеризується протилежними ефектами, за яких взаємодія податливіших включень призводить до зниження амплітуд КІДН відриву порівняно із взаємодією менш податливих неоднорідностей.

З віддаленням об'єктів (рис. 2б) амплітуди КІДН в їх околі наближаються до аналогів для одиничного включення. На відстані $d > 2,5a$ взаємодією об'єктів можна знехтувати.

Висновки. Викладено результати досліджень впливу гармонічної пружної хвилі на систему дискових включень малої жорсткості у безмежному тілі. Встановлено, що падаюча хвиля в низькочастотній області спричиняє зміну динамічних напружень поблизу країв неоднорідностей. Знайдено пікові значення амплітуд КІДН відриву, які досягаються у певному частотному діапазоні залежно від геометричних і жорсткісних характеристик дефектів. Наявність у тілі двох компланарних включень зменшує амплітуду КІДН відриву порівняно з випадком двох взаємодіючих тріщин. Це означає, що заповнення дефектів типу тріщин кристалізуючим матеріалом дасть змогу зменшити рівень динамічних напружень у пошкодженому тілі та забезпечить блокування процесу руйнування тіла.

Література

- [1] Панин В. Е., Дерюгин Е. Е., Кульков С. Н. Мезомеханика упрочнения материалов нанодисперсными включениями // Прикладная механика и техническая физика. — 2010. — Т. 51, № 4. — С. 127-142.
- [2] Kanaun S. K., Levin V. M. Self-Consistent Methods for Composites. Volume 2. Wave Propagation in Heterogeneous Materials. — Heidelberg: Springer. — 2008. — 294 p.
- [3] Маруха В. И., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Инъекционные технологии возобновления работоспособности поврежденных сооружений длительной эксплуатации. — Львов: Сполом, 2009. — 262 с.
- [4] Бутрак І. О., Кільницька Т. І., Хай О. М. Динамічний контакт сферичного включення з матрицею за падіння пружної хвилі // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 3. — С. 99-104.
- [5] Шифрин Е. И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. — Москва: Физматлит, 2002. — 368 с.
- [6] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // Прикладная математика и механика. — 2007. — Т. 71, вып. 4. — С. 702-715.
- [7] Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В. Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 461-472.
- [8] Boundary integral equation approach to the time-harmonic crack-inclusion interaction in 3D elastic matrix / I. O. Butrak, O. M. Khay, V. V. Mykhas'kiv, Ch. Zhang // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — Vol. 200. — P. 3270-3279.
- [9] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [10] Selvadurai A. P. S. On the axisymmetric loading of an annular crack by a disk inclusion // Journal of Engineering Mathematics. — 2003. — Vol. 46, No 3-4. — P. 377-393.
- [11] Xiao Z. M., Luo J. On the dynamic interaction between a penny-shaped crack and an expanding spherical inclusion in 3-D solid // Engineering Fracture Mechanics. — 2004. — Vol. 71, No 12. — P. 1635-1649.
- [12] Купрадзе В. А. Методы потенциала в теории упругости. — Москва: Физматгиз, 1963. — 472 с.

The influence of harmonic wave on the concentration of stresses in the infinite solid with pliable disk-shaped inclusions

Ivanna Butrak

The propagation of harmonic elastic waves in infinite solid with the system of disc-shaped inclusions of low rigidity is investigated. The problem in the frequency domain is reduced to the system of boundary integral equations by the functions of displacement jumps on the inclusion. Using

Іванна Бутрак

Вплив гармонічної хвилі на концентрацію напружень у безмежному тілі...

numerical method, the analysis of the distribution of dynamic stress intensity factors of separation in the vicinity of the inclusions depending on the wave number of inclusions at various distances between defects and the various ratio between the elasticity moduli of the matrix environment and disc-shaped inclusion is carried out.

Влияние гармонической волны на концентрацию напряжений в бесконечном теле с податливыми дисковыми включениями

Иванна Бутрак

Исследовано распространение гармонических упругих волн в бесконечном теле с системой дисковых включений малой жесткости. Задача в частотной области сведена к системе граничных интегральных уравнений относительно функций скачков перемещений на включениях. С помощью численного метода проанализировано распределение коэффициентов интенсивности динамических напряжений отрыва в окрестности включений от волнового числа для различных расстояний между дефектами и соотношениями между упругими модулями матричной среды и круговых включений.

Представлено професором Р. Мусієм

Отримано 03.04.15