

Електрично заряджена електродована тріщина з зоною контакту між двома п'єзоелектричними матеріалами

Аліна Гриневич¹, Алла Шевельова², Володимир Лобода³

¹ Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна, e-mail: ali-grinyu@ua.ru

² к. ф.-м. н., доцент, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна, e-mail: allasheveleva@i.ua

³ д. ф.-м. н., професор, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна, e-mail: loboda@mail.dsu.dp.ua

Пропонується точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного біматеріалу з електродованою електрично зарядженою тріщиною, розташованою на межі поділу його компонент. Вважається, що на нескінченності задано поле нормальних та дотичних напружень та електричне поле, паралельне до берегів тріщини. Допускалося також, що береги тріщини можуть контактувати на деякій ділянці невідомої довжини, що примикає до однієї з вершин тріщини. Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. Із використанням умов контактування берегів тріщини знайдено довжину зони контакту берегів тріщини та відповідні електромеханічні характеристики. Проведено чисельну ілюстрацію одержаних розв'язків. Показано, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту та електромеханічні характеристики в околі тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, п'єзоелектричний матеріал, електродована електрично заряджена тріщина.

Вступ. П'єзоелектричні матеріали використовуються для виготовлення різних електромеханічних перетворювачів. Але наявність мікротріщин може суттєво вплинути на електромеханічні характеристики цих матеріалів, а іноді призвести і до їх руйнування. Основні положення механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів викладені у монографіях [1-3]. Електродована тріщина в однорідному п'єзоелектричному матеріалі вивчалася у праці [4], а тріщина з електропровідними берегами на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів розглядалася в роботі [5]. При цьому слід зазначити, що у праці [4] вивчалася тріщина, вільна від заряду, а у роботі [5] враховувалось електричне навантаження, ортогональне до берегів тріщини, тому проблеми пов'язані з можливим контактом берегів тріщини не розглядалися.

У цій роботі вивчається контактна модель електродованої електрично зарядженої тріщини на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів.

1. Формулювання задачі

Замкнену систему рівнянь п'єзостатики за відсутності в середовищі масових сил і вільних зарядів можна подати у вигляді:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k, \quad (1)$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + d_{ik}E_k, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad (3)$$

$$\gamma_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad (4)$$

де u_i , φ , σ_{ij} , D_i — відповідно поля переміщень, електричного потенціалу, механічних напружень та електричної індукції; c_{ijkl} , e_{ijk} , d_{ij} — відповідно компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць.

Розглянемо плоску деформацію біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, поляризованих по напрямку осі x_3 та зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$. На відрізку $x_1 \in [c, b]$ інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 1), яка вважається електропровідною, тобто на її берегах $E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0$. Окрім того, на тріщині задано сумарний електричний заряд величини D_0 . Припускається також, що відрізок $x_1 \in [c, a] = L_1$ вільний від напруження, а в зоні $x_1 \in (a, b) = L_2$ береги тріщини знаходяться в умовах безфрикційного контакту.

Також задані ненульові електромеханічні граничні умови на нескінченності:

$$\sigma_{13}^\infty = \tau^\infty, \quad \sigma_{33}^\infty = \sigma^\infty, \quad E_1^\infty = e^\infty. \quad (5)$$

Так як задача розглядається з контактною зоною на проміжку (a, b) , то умови на інтерфейсі мають вигляд:

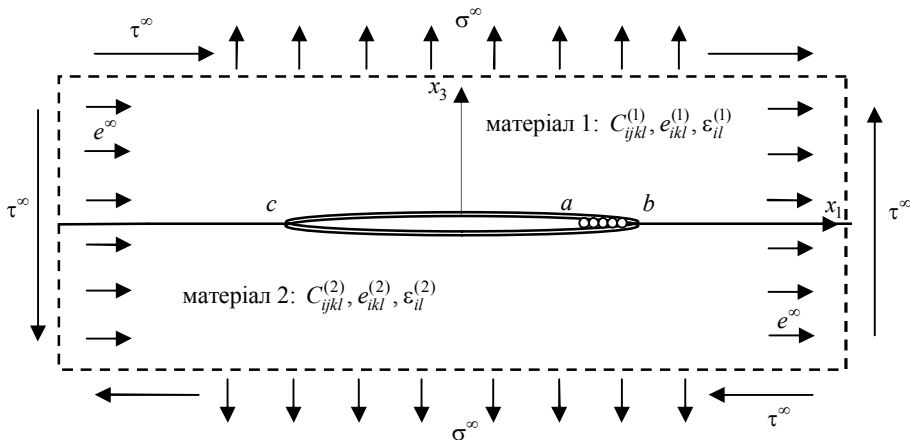


Рис. 1. Електродована тріщина з контактною зоною в біматеріалі

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (6)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (7)$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad E_1^{(m)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad (8)$$

$$\left[[u_3(x_1)] \right] = 0, \quad \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad E_1^{(m)}(x_1, 0) = 0,$$

$$\left[[\sigma_{33}(x_1)] \right] = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad (9)$$

де $m = 1, 2$, $u_i, E_i, \sigma_{ij}, D_i$ — поля переміщень, електричного напруження, механічних напружень та електричної індукції, $i, j = \overline{1, 3}$, $L = (-\infty, \infty) \setminus L_1 \cup L_2$.

Шукаються компоненти $\sigma_{13}, \sigma_{33}, E_1$ уздовж інтерфейсу, стрибок компоненти D_3 на включенні, а також розкриття $\left[[u_3] \right]$ тріщини. Тут і далі $\left[[\bullet] \right]$ означає стрибок відповідної функції у разі переходу через інтерфейс.

2. Розв'язання задачі

Використовуючи результати роботи [6], маємо такі подання

$$ir_{j1}\sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (10)$$

$$t_{j1}\left[[u_1'(x_1)] \right] + it_{j3}\left[[u_3'(x_1)] \right] + t_{j4}\left[[D_3(x_1)] \right] = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (11)$$

де r_{ij} та t_{ij} ($i, j = 1, 3, 4$) — компоненти відомих матриць, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому $r_{13} = r_{33} = r_{44} = 1$ та $r_{43} = 0$, $F_j(z)$ — функції, аналітичні у всій площині за винятком області тріщини.

Задовольняючи за допомогою подань (10), (11) граничним умовам (8), (9), приходимо до такої комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана

$$F_k^+(x_1) + \gamma_k F_k^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad (12)$$

$$\text{Im} F_k^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (13)$$

і задачі Гілберта

$$F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1 \cup L_2, \quad (14)$$

з умовами на нескінченності

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j. \quad (15)$$

Тут $\tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}\sigma^\infty}{\theta_j}$, $\tilde{\tau}_j = -\frac{1}{\theta_j}(r_{j1}\tau^\infty + r_{j4}e^\infty)$ ($j = 1, 3, 4$), $\theta_k = 1 + \gamma_k$ ($k = \overline{1, 3}$), $\theta_4 = 2$.

На основі співвідношення (11) з урахуванням умов однозначності зміщень за обходу контуру тріщини

$$\int_c^b \left[\left[u'_k(x_1) \right] \right] dx_1 = 0, \quad k = \overline{1,3},$$

і теореми Гауса, застосованої для контуру, який співпадає з берегами тріщини [7]

$$\int_c^b \left[\left[D_3(x_1) \right] \right] dx_1 = D_0,$$

отримуємо

$$\int_c^b \left\{ F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) \right\} dx_1 = t_{j4} D_0. \quad (16)$$

Для $k = 1$ та $j = 1$ задача (12), (13) та (15), (16) набуває вигляду

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad \text{Im } F_1^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad (18)$$

$$F_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1, \quad \int_c^b \left\{ F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) \right\} dx_1 = t_{14} D_0. \quad (19)$$

Розв'язок задачі вигляду (18) стосовно штампу було запропоновано в роботі [8], а стосовно міжфазної тріщини — у праці [9]. Використовуючи цей розв'язок, маємо

$$F_1(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \quad (20)$$

де $P(z) = C_1 z + C_2$, $Q(z) = D_1 z + D_2$, C_1, C_2, D_1, D_2 — дійсні коефіцієнти,

$$X_1(z) = ie^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)}, \quad X_2(z) = ie^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)}, \quad \ell = b-c,$$

$$\varphi(z) = 2e \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{\ell(z-a) + \sqrt{(a-c)(z-b)}}}, \quad \varepsilon = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}, \quad \beta = \varepsilon \ln \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{1 + \sqrt{1-\lambda}},$$

$$\beta_1 = \varepsilon \sqrt{(a-c)(b-c)}, \quad \lambda = \frac{b-a}{\ell}. \quad (21)$$

Параметр λ , обчислений за формулою (21), буде важливий у подальшому аналізі, оскільки він визначає відносну довжину контактної зони.

З умов (19) одержуємо, що $F_1(z)$ для $z \rightarrow \infty$ повинно мати таку поведінку

$$F_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1 + \frac{it_{14}D_0}{2\pi z}.$$

Тоді отримуємо такі вирази для коефіцієнтів C_1, C_2, D_1, D_2 :

$$C_1 = -\tilde{\tau}_1 \cos \beta - \tilde{\sigma}_1 \sin \beta, \quad D_1 = \tilde{\sigma}_1 \cos \beta - \tilde{\tau}_1 \sin \beta, \quad (22)$$

$$C_2 = -\frac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1 + \frac{t_{14}D_0}{2\pi} \cos \beta, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2} D_1 + \frac{t_{14}D_0}{2\pi} \sin \beta. \quad (23)$$

Для визначення всіх електромеханічних характеристик розглянемо тепер задачу (14)-(16) для $k = 4$, яка буде такою

$$F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1 \cup L_2, \quad (24)$$

$$F_4(z)|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_4 - i\tilde{\tau}_4, \quad \int_c^b \{F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1)\} dx_1 = t_{44}D_0. \quad (25)$$

Розв'язок цієї задачі за методикою роботи [10] знаходиться в аналітичному вигляді:

$$F_4(z) = \frac{c_0 + c_1 z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \quad (26)$$

де c_0, c_1 визначаються з умов (25)

$$c_0 = -\frac{c+b}{2}c_1 + \frac{it_{44}D_0}{2\pi}, \quad c_1 = \tilde{\sigma}_4 - i\tilde{\tau}_4. \quad (27)$$

Але оскільки $r_{43} = 0$, то $\tilde{\sigma}_4 = 0$, $\tilde{\tau}_4 = -\frac{1}{2}(r_{41}\tau^\infty + r_{44}e^\infty) = -\frac{h_4}{2}$ і одержуємо такий вираз

$$F_4(z) = \frac{ih_4}{2} \left(z - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4} \right) \frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}. \quad (28)$$

3. Знаходження електромеханічних факторів на інтерфейсі

Використовуючи розв'язок (20) разом з формулою (10), отримуємо:

$$\begin{aligned} & ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{14}E_1^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = \left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}} + \frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1-b}} \right] \frac{\vartheta_1 \exp[i\varphi(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1 > b, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\vartheta_1 P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \left[\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \cosh \varphi_0(x_1) + \sinh \varphi_0(x_1) \right] + \\ & + \frac{\vartheta_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \left[\cosh \varphi_0(x_1) + \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \sinh \varphi_0(x_1) \right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{де } \varphi_0(x_1) = 2\varepsilon \tan^{-1} \sqrt{\frac{(b-x_1)(a-c)}{(x_1-a)(b-c)}}.$$

За використання розв'язку (28) разом із формулою (10) і рівняння $r_{43} = 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} ir_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{44}E_1^{(1)}(x_1, 0) &= 2F_4(x_1) = \\ &= ih_4 \left(x_1 - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \quad \text{для } x_1 > b. \end{aligned} \quad (31)$$

Із співвідношення (29) можемо записати вираз для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ на $x_1 > b$ у вигляді:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{1}{r_{13}} \left[\frac{\mathfrak{G}_1 Q(x_1) \cos \varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} - \frac{\mathfrak{G}_1 P(x_1) \sin \varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \right] \quad \text{для } x_1 > b. \quad (32)$$

Із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованої з уявних частин рівнянь (29) і (31) на $x_1 > b$, можна легко визначити вирази для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ та $E_1^{(1)}(x_1, 0)$.

Підстановка розв'язку (20) у формулу (11) призводить до співвідношень:

$$\begin{aligned} t_{11} \left[\left[u'_1(x_1) \right] \right] + it_{13} \left[\left[u'_3(x_1) \right] \right] + t_{14} \left[\left[D_3(x_1) \right] \right] &= \\ = 2\sqrt{\alpha} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} \right] \frac{\exp[i\varphi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1 \in L_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} t_{11} \left[\left[u'_1(x_1) \right] \right] + t_{14} \left[\left[D_3(x_1) \right] \right] &= \\ = \frac{2}{\sqrt{(x_1-c)}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)}} \cosh \varphi_0(x_1) - \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-a)}} \sinh \varphi_0(x_1) \right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{де } \varphi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{\ell(a-x_1) - \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}}, \quad \alpha = \frac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}.$$

Підставляючи рівняння (28) у формулу (11) з $j=4$ та беручи до уваги $t_{43}=0$, отримуємо для $x_1 \in L_1 \cup L_2$:

$$t_{41} \left[\left[u'_1(x_1) \right] \right] + t_{44} \left[\left[D_3(x_1) \right] \right] = \left(x_1 - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4} \right) \frac{h_4}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}. \quad (35)$$

З рівняння (33) похідна розкриття тріщини буде мати вид:

$$\left[\left[u'_3(x_1) \right] \right] = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}} \left[\frac{P(x_1) \sin \varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-c)}} - \frac{Q(x_1) \cos \varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a-x_1)(x_1-c)}} \right], \quad (36)$$

тобто розкриття тріщини на основі виразу (36) для $x_1 \in L_1$ записується у формі

$$\left[\left[u_3(x_1) \right] \right] = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}} \int_c^{x_1} \left[\frac{P(x_1) \sin \varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-c)}} - \frac{Q(x_1) \cos \varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a-x_1)(x_1-c)}} \right] dx_1 \quad \text{для } x_1 \in L_1. \quad (37)$$

Із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованих з дійсних частин рівнянь (33) та (35) на $x_1 \in L_1$ і рівнянь (34) та (35) на $x_1 \in L_2$, можна визначити вирази для $[[u'_3(x_1)]]$ і $[[D_3(x_1)]]$.

Введемо коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного поля так:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-a)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1-b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \\ k_E &= \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1-b)} E_1^{(1)}(x_1, 0). \end{aligned} \quad (38)$$

Використовуючи рівняння (30) для визначення k_1 та беручи до уваги, що $\varphi_0(a) = \ln \sqrt{\gamma_1}$, можемо записати

$$k_1 = \vartheta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha(a-c)}} Q(a). \quad (39)$$

Для визначення k_2 та k_E помножимо ліву та праву частини рівнянь (29) і (31) на $\sqrt{2\pi(x_1-b)}$ та розглянемо для $x_1 \rightarrow b$. Отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$r_{11}k_2 + r_{14}k_E = \theta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} P(b), \quad r_{41}k_2 + r_{44}k_E = h_4 \sqrt{\frac{\ell\pi}{2}} + t_{44}D_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\ell}}, \quad (40)$$

де $P(b) = \ell h_5 / (2\theta_1)$, $h_5 = \left(h_1 - 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}\sigma^\infty + \frac{t_{14}}{\pi\ell} D_0\theta_1 \right) \cos\beta - \left(\sigma^\infty + 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}h_1 \right) \sin\beta$,

$$h_1 = r_{11}\tau^\infty + r_{14}e^\infty.$$

Розв'язок системи (40) подано такими виразами для коефіцієнтів інтенсивності механічного й електричного напруження k_2 та k_E :

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{\frac{\pi\ell}{2}} \frac{r_{44}h_5 - r_{14}h_1}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}} - \sqrt{\frac{2}{\pi\ell}} \frac{r_{14}t_{44}D_0}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}}, \\ k_E &= \sqrt{\frac{\pi\ell}{2}} \frac{r_{11}h_4 - r_{41}h_5}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}} + \sqrt{\frac{2}{\pi\ell}} \frac{r_{11}t_{44}D_0}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}}. \end{aligned} \quad (41)$$

4. Знаходження зони контакту берегів тріщини

Розв'язок задачі для міжфазної тріщини, отриманий у попередньому розділі, математично справедливий для будь-якого значення точки a . Але, щоб зберегти фізичний сенс отриманих результатів, повинні задовольнятися такі нерівності

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad [[u_3(x_1)]] \geq 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1. \quad (42)$$

Позицію точки a (або параметр λ) можна знайти з використанням виразів для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ на $x_1 \in L_2$ та $[[u_3(x_1)]] \geq 0$ для $x_1 \in L_1$, що призводить до такого трансцендентного рівняння щодо λ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma^\infty \sqrt{1-\lambda} + 2\varepsilon h_1}{2\varepsilon \sigma^\infty - h_1 \sqrt{1-\lambda} - s(\lambda)}, \quad (43)$$

$$\text{де } s(\lambda) = \frac{t_{14} D_0 (1 + \gamma_1)}{\pi \sqrt{(a-c)(b-c)}}.$$

Вибір максимального кореня рівняння (43) з інтервалу $(0,1)$ забезпечує виконання обох нерівностей (42) за винятком дуже малої зони осциляції біля лівої вершини тріщини, якою нехтуємо. Розв'язок рівняння (43) знаходиться чисельно, а для малих значень λ — за асимптотичною формулою, яку отримуємо з виразу (43).

5. Візуалізація результатів

За матеріал виберемо PZT-4 (верхній матеріал) і PZT-5H (нижній). Для розрахунків вибиралися $c = -0,01$ м, $b = 0,01$ м, $\sigma^\infty = 10^6$ Па, $\tau^\infty = 0$ Па, а величини D_0 і e^∞ варіювались.

У табл. 1 наведено варіацію відносної довжини контактної зони λ_0 , коефіцієнта інтенсивності дотичного напруження k_2 та коефіцієнта інтенсивності електричного поля k_E від нормального напруження σ^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5H та $e^\infty = -10^7$ В/м.

Таблиця 1

Залежність параметрів λ_0 , k_2 , k_E від нормального напруження σ^∞
для $e^\infty = -10^7$ В/м, $\tau^\infty = 0$ Па, $D_0 = -0,001$ Кл/м

σ^∞ (МПа)	λ_0	k_2 (Н/м ^{3/2})	$-k_E$ (Кл/м ^{3/2})
0,5	0,3800	$-1,43854 \cdot 10^8$	$1,32023 \cdot 10^7$
1,0	0,3334	$-1,43852 \cdot 10^8$	$1,32023 \cdot 10^7$
2,0	0,2481	$-1,43849 \cdot 10^7$	$1,32024 \cdot 10^7$
3,5	0,1484	$-1,43841 \cdot 10^7$	$1,32026 \cdot 10^7$
6,0	0,0561	$-1,43821 \cdot 10^7$	$1,32031 \cdot 10^7$
10,0	0,0106	$-1,43786 \cdot 10^7$	$1,32043 \cdot 10^7$
20,0	0,0002	$-1,43517 \cdot 10^7$	$1,32103 \cdot 10^7$

Таблиця 2

Залежність параметра λ від сумарного заряду тріщини D_0

$10^4 D_0$	2	1	0	-1	-2	-5	-10
λ	0,201	0,211	0,221	0,232	0,243	0,276	0,333

У таблиці 2 показано залежність довжини зони контакту від величини D_0 ($e^\infty = -10^7$ В/м, $\sigma^\infty = 10^6$ Па, $\tau^\infty = 0$ Па). Видно, що навіть за відсутності зсувного поля напружень зона контакту за вибраного електричного поля є досить значна та вона суттєво змінюється залежно від D_0 .

На рис. 2 для різних D_0 і e^∞ наведені графіки зміни нормального напруження в зоні контакту берегів тріщини (I — $e^\infty = -10^7$ В/м, II — $e^\infty = -2 \cdot 10^7$ В/м), а на рис. 3 — відповідні графіки зміни стрибка нормального переміщення в її відкритій частині (I — $e^\infty = -0,5 \cdot 10^7$ В/м, II — $e^\infty = -10^7$ В/м). Вказані графіки підтверджують виконання нерівностей (42) для знайдених значень $\lambda = \lambda_0$.

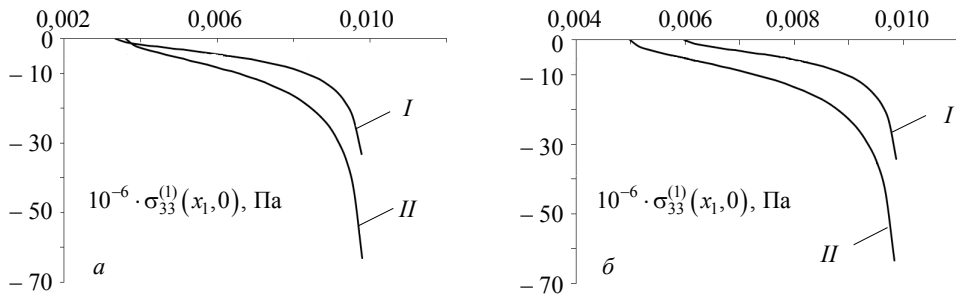


Рис. 2. Розподіл $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ уздовж зони контакту для $\sigma^\infty = 10^6$ Па :
а — для $D_0 = -0,001$ Кл/м; б — для $D_0 = 0,0002$ Кл/м

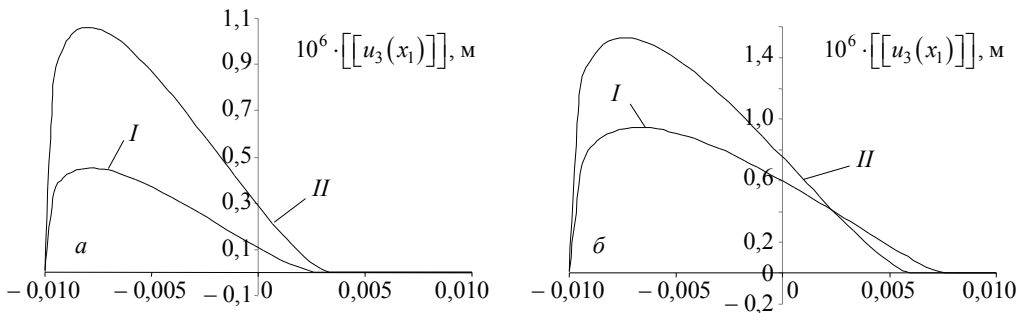


Рис. 3. Розподіл $[[u_3(x_1, 0)]]$ уздовж тріщини для $\sigma^\infty = 10^6$ Па :
а — для $D_0 = -0,001$ Кл/м, б — для $D_0 = 0,0002$ Кл/м

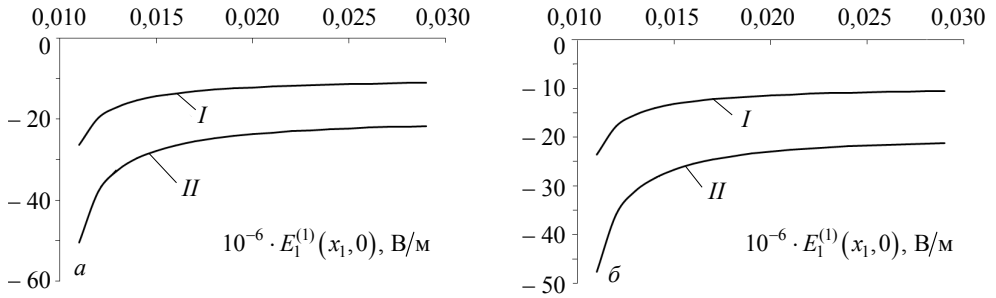


Рис. 4. Розподіл $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини для $\sigma^\infty = 10^6$ Па :
а — для $D_0 = -0,001$ Кл/м; б — для $D_0 = 0,0002$ Кл/м

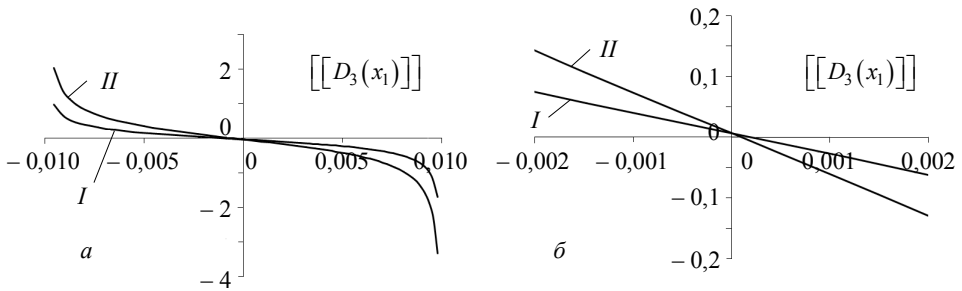


Рис. 5. Розподіл $[[D_3(x_1)]]$ уздовж тріщини для $\sigma^\infty = 10^6$ Па :
а — для $D_0 = -0,001$ Кл/м; б — для $D_0 = 0,0002$ Кл/м

На рис. 4 для різних значень D_0 і e^∞ наведені графіки зміни електричного поля на продовженні тріщини (I — $e^\infty = -10^7$ В/м, II — $e^\infty = -2 \cdot 10^7$ В/м). Видно, що за від'ємного e^∞ це поле стрімко зменшується у разі підходу до вершини тріщини, а потім зростає до своїх номінальних значень за віддалення від неї. Якщо ж e^∞ задавати додатними, то графіки будуть симетричні до наведених на рис. 4 стосовно осі x_1 . Очевидно також, що електричне поле суттєво залежить як від e^∞ , так і від D_0 .

На рис. 5 наведені відповідні графіки зміни стрибка $[[D_3(x_1)]]$ уздовж області тріщини (I — $e^\infty = -10^7$ В/м, II — $e^\infty = -2 \cdot 10^7$ В/м). Оскільки для усього проміжку $(-0,01; 0,01)$ криві на рис. 5б) візуально практично не відрізняються від відповідних кривих на рис. 5а), то графіки на рис. 5б) побудовані для проміжку $(-0,002; 0,002)$. Це дає можливість продемонструвати несиметрію $[[D_3(x_1)]]$, яка пов'язана з наявністю заряду D_0 .

Висновки. З аналітичного аналізу результатів і візуалізації даних видно, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту (a, b) й електромеханічні характеристики в околі тріщини. При цьому вказані фактори можуть призвести до виникнення значних областей контакту берегів тріщини навіть за відсутності полів зовнішніх зсувних напружень.

Література

- [1] Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. — Киев: Наукова думка, 1989. — 280 с.
- [2] Калогеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. — Донецк: Юго-Восток, 2007. — 268 с.
- [3] Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. — Москва: Наука, 1988. — 472 с.
- [4] Кныш П. Ю., Лобода В. В. Аналитическое и численное исследование электродированной трещины в пьезоэлектрическом материале // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». — 2012. — Т. 20, вип. 16(1). — С. 3-15.
- [5] Veot H. G., Atluri S. N. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media // International Journal of Fracture. — 2002. — Vol. 118. — P. 285-301.
- [6] Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial // International Journal of Solids and Structures. — 2014. — Vol. 51. — P. 63-73.
- [7] Смайт В. Электростатика и электродинамика — Москва: Издательство иностранной литературы, 1954. — 606 с.
- [8] Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // Прикладная математика и механика. — 1986. — Т. 50, вып. 4. — С. 663-673.
- [9] Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов // Гидроаэромеханика и теория упругости. — 1991. — С. 78-86.
- [10] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости — Москва: Наука, 1966. — 707 с.

Electrically charged electroded crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial

Alina Grynevych, Alla Sheveleva, Volodymyr Loboda

An exact analytical approach to the analysis of plane deformation of piezoelectric bimaterial with electroded electrically charged crack located at the interface of its components is proposed. It is assumed that the normal and shear stresses are established at infinity and an electric field is acting parallel to the crack faces. It is also allowed for the crack faces can contact along the zone of an unknown length, adjacent to one of the crack tip. The combined Dirichlet-Riemann boundary value problems is formulated and solved analytically. Using the contact conditions, the length of the crack contact zone and corresponding electromechanical characteristics are found. The numerical illustration of the solutions obtained is performed. It is shown that both a remote electric field and a total charge of the crack significantly affect the length of the contact area and the electromechanical characteristics in the vicinity of the crack.

Аліна Гриневич, Алла Шевельова, Володимир Лобода
Електрично заряджена електродована тріщина з зоною контакту

Электрически заряженная электродированная трещина с зоной контакта между двумя пьезоэлектрическими материалами

Алина Гриневич, Алла Шевелёва, Владимир Лобода

Предлагается точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоэлектрического биматериала с электродированной электрически заряженной трещиной, расположенной на границе раздела его компонент. Считается, что на бесконечности задано поле нормальных и касательных напряжений и электрическое поле, параллельное к берегам трещины. Допускалось также, что берега трещины могут контактировать на некотором участке неизвестной длины, примыкающей к одной из вершин трещины. Сформулирована комбинированную краевую задачу Дирихле-Римана, для которой выписано точное аналитическое решение. Найдена длина зоны контакта берегов трещины и соответствующие электромеханические характеристики. Проведена численная иллюстрация полученных решений. Показано, что и удаленное электрическое поле, и суммарный заряд трещины существенно влияют на длину зоны контакта и на электромеханические характеристики в окрестности трещины.

Представлено професором Р. Мусієм

Отримано 26.01.15