

## Коливання необмеженого середовища із пружним волокном і тонкою міжфазною неоднорідністю малої жорсткості

Ярослав Кунець<sup>1</sup>, Валерій Матус<sup>2</sup>, Василь Пороховський<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: matus@iapmm.lviv.ua, porvas@iapmm.lviv.ua

*Досліджено амплітудно-частотні характеристики SH-хвиль, розсіяних пружним волокном неканонічної форми у дальню хвильову зону при усталених коливання необмеженого пружного тіла. Проаналізовано вплив на динамічні характеристики механічних і геометричних параметрів тонкого включення змінної товщини та малої жорсткості, розташованого на поверхні контакту волокна та матриці. Аналітико-числовий метод дослідження базується на модифікованому методі нульового поля.*

**Ключові слова:** хвилі поздовжнього зсуву, пружне волокно неканонічної форми, міжфазне тонке включення малої жорсткості, метод нульового поля.

**Вступ.** Механічні властивості волокнисто-армованих тіл суттєво залежать від якості міжфазного контакту матриці з підкріпленням. У процесі експлуатації конструкцій, елементами яких є такі структури, на їх міжфазних поверхнях утворюються різного роду відшарування, тонкостінні тріщиноподібні дефекти (пружні неоднорідності малої жорсткості), що може призвести до швидкого руйнування всієї конструкції. Часткова втрата ідеального механічного контакту між структурними частинами тіла може мати суттєвий вплив на поля розсіяних хвиль. Цю обставину необхідно враховувати при неруйнівному контролі армуючих елементів пружних середовищ методами ультразвукового сканування.

При вивченні впливу міжфазних недосконалостей на хвильові явища здебільшого вважають, що волокно повністю оточене тонким пружним прошарком постійної товщини (див. огляд у праці [1]). Вплив часткового відшарування волокна від матриці на спектральні характеристики розсіяних SH-хвиль досліджено, наприклад, у роботах [2, 3]. При цьому розглядалися розсіювачі канонічної форми. Вплив міжфазної тріщини на формування полів SH-хвиль у пружному середовищі із локальним пружним розсіювачем неканонічної форми вивчався у працях [4, 5] за допомогою модифікованого методу нульового поля (методу Т-матриць). У цій роботі цю методику поширено на випадок задачі поздовжнього зсуву, коли на частині поверхні контакту волокна неканонічної форми та матриці знаходиться тонка пружна неоднорідність змінної товщини і малої жорсткості.

## 1. Формулювання задачі розсіювання

Нехай у необмеженій ізотропній пружній матриці  $W_1$  із модулем зсуву  $\mu_1$  і густиною  $\rho_1$  міститься пружне циліндричне волокно неканонічного поперечного перерізу  $W_2 = R^2 \setminus W_1$  з відповідними параметрами  $\mu_2$  та  $\rho_2$ . На частині  $S_0$  міжфазної поверхні  $\partial W_2$  розміщене тонке пружне включення  $W_0$  з параметрами  $\mu_0$  і  $\rho_0$ . Його товщина  $h(\mathbf{x})$  характеризується малим безрозмірним параметром ( $l$  — довжина включення)

$$\varepsilon = l^{-1} \max_{\mathbf{x} \in S_0} h(\mathbf{x}) \ll 1, \quad (1)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  — декартові координати. На решті поверхні розділу  $S_1 = \partial W_2 \setminus S_0$  волокно ідеально контактує з матрицею.

За позовжнього зсуву й усталених коливань переміщення в пружному тілі задовольняють рівняння Гельмгольца [6]:

$$(\Delta + k_j^2) u_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j, \quad j = 1, 2; \quad u_1(\mathbf{x}) = u^{sc}(\mathbf{x}) + u^{in}(\mathbf{x}); \quad (2)$$

$$(\Delta + k_0^2) u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_0. \quad (3)$$

Тут  $u_j(\mathbf{x})$  і  $k_j$  ( $j = \overline{0, 2}$ ) — переміщення і хвильові числа у включенні, матриці та волокні відповідно;  $u^{in}(\mathbf{x})$  та  $u^{sc}(\mathbf{x})$  — набігаюча на волокно та розсіяна ним SH-хвилі.

Умови ідеального механічного контакту між структурними елементами тіла запишемо у вигляді:

$$u_j(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mu_j \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_0, \quad j = 1, 2; \quad (4)$$

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mu_1 \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_1. \quad (5)$$

Розсіяне поле  $u^{sc}(\mathbf{x})$  задовольняє умові випромінювання Зоммерфельда [6]

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_1 r + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1 r}} f(\theta) + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

де  $f(\theta)$  — комплексна амплітуда розсіювання SH-хвилі;  $(r, \theta)$  — полярні координати.

У випадку міжфазного тонкого включення малої жорсткості ( $\mu_0 / \mu_j \ll 1$ ,  $j = 1, 2$ ) умови його механічного контакту із оточуючим середовищем (4) можна замінити наближеними співвідношеннями, записаними на  $S_0$  [7, 8]:

$$\gamma_1 [u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})] = h(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \gamma \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_0; \quad (7)$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Отже, розв'язок поставленої задачі (1)-(6) можна наближено моделювати розв'язком задачі (2), (5)-(7).

## 2. Аналітико-числовий метод розв'язку задачі

Для знаходження числового розв'язку змішаної задачі (2), (5)-(7) у дальній зоні розсіювача (волокна) використовуємо модифікований метод нульового поля [4, 9].

Вважаємо, що на неоднорідність набігає плоска гармонічна горизонтально поляризована поперечна хвиля

$$u^{in}(\mathbf{x}) = u_0 \exp[-ik_1(x_1 \cos \theta_{in} + x_2 \sin \theta_{in})] = u_0 \sum_{\sigma, m} \varepsilon_m b_{\sigma m}^{in} \operatorname{Re} \psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}),$$

$$\psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}) = H_m^{(1)}(k_j r) C_{\sigma m}(\theta), \quad j = 1, 2$$

$$C_{\sigma m}(\theta) = \begin{cases} \cos(m\theta), & \sigma = 1, m = 0, 1, \dots, \\ \sin(m\theta), & \sigma = 2, m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad b_{\sigma m}^{in} = (-i)^m C_{\sigma m}(\theta_{in}). \quad (8)$$

Тут  $H_m^{(1)}(x)$  — функція Ганкеля першого роду порядку  $m$ ;  $u_0$  та  $\theta_{in}$  — амплітуда та кут падіння хвилі;  $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0}$  ( $\delta_{m0}$  — символ Кронекера).

Виходячи із гранично-інтегрального подання розв'язку задачі та враховуючи крайові умови (5), рівняння нульового поля подамо у вигляді

$$\int_{\partial W_2} \left[ u_2 \frac{\partial}{\partial n} \psi_{1\sigma m} - \psi_{1\sigma m} \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS + \int_{S_0} (u_1 - u_2) \frac{\partial}{\partial n} \psi_{1\sigma m} dS = 4iu_0 b_{\sigma m}^{in},$$

$$\int_{\partial W_2} \left[ u_2 \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \psi_{2\sigma m} - \gamma (\operatorname{Re} \psi_{2\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS = 0,$$

$$\int_{\partial W_2} \left[ u_2 \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \psi_{1\sigma m} - (\operatorname{Re} \psi_{1\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS + \int_{S_0} (u_1 - u_2) \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \psi_{1\sigma m} dS = -4if_{\sigma m}, \quad (9)$$

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma, m} f_{\sigma m} \psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| > r_1, \quad (10)$$

$$m = \overline{0, \infty}, \quad \sigma = 1, 2,$$

де  $r_1$  — радіус кола, описаного навколо розсіювача.

Невідомі переміщення та напруження на контурі волокна шукаємо у вигляді рядів за системою тригонометричних функцій з ваговими множниками, що відображають характер поведінки шуканих функцій в околі країв міжфазного

включення  $\mathbf{x}_\pm$ , які є точками зміни граничних умов. Розглянемо включення, для яких асимптотика функції  $h(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\pm$  має вигляд

$$h(\mathbf{x}) \sim h_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\pm|^\delta, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\pm, \quad h_0 = \text{const} \neq 0, \quad 0 \leq \delta < 1;$$

$$\mathbf{x}_\pm = (r_*(\theta_\pm), \theta_\pm),$$

де функція  $r_*(\theta)$  описує контур волокна в полярній системі координат.

Використовуючи метод послідовного розчеплення асимптотичних розкладів [7, 10], встановлюємо структуру розв'язків в околі країв міжфазної неоднорідності

$$u_1(\mathbf{x}) = a_\pm + \rho_\pm^{1/2} b_\pm \sin(\varphi_\pm/2) + o(\rho_\pm), \quad \rho_\pm \rightarrow 0, \quad 0 \leq \varphi_\pm \leq \pi,$$

$$u_2(\mathbf{x}) = a_\pm + \rho_\pm^{1/2} b_\pm \gamma \sin(\varphi_\pm/2) + o(\rho_\pm), \quad \rho_\pm \rightarrow 0, \quad -\pi \leq \varphi_\pm \leq 0. \quad (11)$$

Тут  $(\rho_\pm, \varphi_\pm)$  — локальні полярні системи координат поблизу кінців включення при  $\rho_\pm \rightarrow 0$  (неоднорідність розміщена на лінії  $\varphi_\pm = \pi$ ).

Беручи до уваги співвідношення (11), невідомі функції  $u^l$  та  $\partial u^l / \partial n$ ,  $l=1,2$  на контурі волокна подамо у вигляді розкладів

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = Z_1(\theta) a^{-1} \sum_{\sigma, m} x_{1\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in S_1,$$

$$u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = Z_0(\theta) \sum_{\sigma, m} x_{1\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in S_0,$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma, m} x_{2\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in \partial W_2; \quad (12)$$

$$Z_0(\theta) = (1 + \gamma) \left[ \tau(\theta) \frac{(\theta - \theta_-)(\theta_+ - \theta)}{\theta_+ - \theta_-} \right]^{1/2},$$

$$Z_1(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \tau(\theta) \frac{(2\pi + \theta_- - \theta)(\theta - \theta_+)}{2\pi + \theta_- - \theta_+} \right]^{-1/2}, \quad \tau(\theta) = a^{-1} \sqrt{r_*'^2(\theta) + r_*^2(\theta)},$$

де  $a$  — характерний розмір розсіювача.

Підставивши вираз (12) у рівняння нульового поля (9), з урахуванням крайових умов (7) і співвідношень (8), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів  $x_{1\sigma m}, x_{2\sigma m}$ :

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 4iu_0 b_{\sigma m}^{in},$$

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 0, \quad m, m' = \overline{0, \infty}; \quad \sigma, \sigma' = 1, 2; \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} &= \int_{S_0} \left( \frac{\partial \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} - \frac{\gamma_1}{h(\theta)} \Psi_{1\sigma m} \right) Z_0(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS - \\
 &- a^{-1} \int_{S_1} \Psi_{1\sigma m} Z_1(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS, \\
 a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} &= -\gamma_1 \int_{S_0} \frac{1}{h(\theta)} \operatorname{Re}(\Psi_{2\sigma m}) Z_0(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS - \\
 &- a^{-1} \gamma \int_{S_1} \operatorname{Re}(\Psi_{2\sigma m}) Z_1(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS, \\
 a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} &= \int_{\partial W_2} \frac{\partial \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS, \quad a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} = \int_{\partial W_2} \frac{\partial \operatorname{Re}(\Psi_{2\sigma m})}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS.
 \end{aligned}$$

Систему (13) розв'язуємо методом редукції. Для комплексної амплітуди розсіяння  $f(\theta_{sc})$  із співвідношень (10), (12) отримуємо

$$\begin{aligned}
 f(\theta_{sc}) &= \sum_{\sigma, m} \varepsilon_m i^{-m} A_{\sigma m} C_{\sigma m}(\theta_{sc}), \\
 A_{\sigma m} &= \sum_{\sigma', m'} (x_{1\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} + x_{2\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 2\sigma' m'}),
 \end{aligned}$$

де  $\theta_{sc}$  — кут спостереження SH-хвиль, розсіяних у дальню зону.

### 3. Числовий аналіз спектрів амплітуд розсіяння

Надалі припускаємо, що в епоксидній матриці ( $\mu_1 = 1,28 \text{ ГПа}$ ,  $\rho_1 = 1250 \text{ кг/м}^3$ ) знаходиться скляне волокно ( $\mu_2 = 29,9 \text{ ГПа}$ ,  $\rho_2 = 2550 \text{ кг/м}^3$ ), контур поперечного перерізу якого задається параметричним рівнянням

$$r(\alpha) = a \sqrt{\frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos[(N+1)\alpha]}{1 - \beta^2 N}}, \quad \theta(\alpha) = \arctg \frac{\sin \alpha + \beta \sin(N\alpha)}{\cos \alpha - \beta \cos(N\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (14)$$

Товщину включення приймаємо у вигляді

$$h(\mathbf{x}) = 4^\delta \varepsilon a (\theta - \theta_-)^\delta (\theta_+ - \theta)^\delta / (\theta_+ - \theta_-)^{2\delta}, \quad \theta_- \leq \theta \leq \theta_+, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (15)$$

На рис. 1 зображено спектральні залежності нормованих амплітуд розсіяння  $f_0 = u_0^{-1} |f(\theta_{sc})|$  при моностатичному зондуванні розсіювача ( $\theta_{sc} = \theta_{in}$ ) для різних параметрів контрастності  $\gamma_2 = \mu_0 / (\varepsilon \mu_1)$  та кутів зондування (на рис. 1а  $\theta_{in} = 0^\circ$ , на рис. 1б  $\theta_{in} = 90^\circ$ ). Припускається, що у співвідношеннях (14), (15)  $\beta = 0$ ;  $\delta = 0,5$ ;  $\theta_+ = -\theta_- = 90^\circ$ .

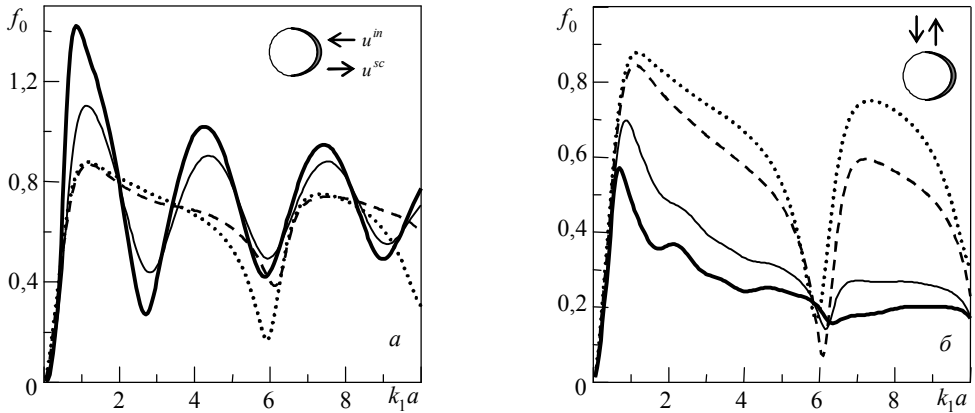


Рис. 1. Частотні залежності нормованих амплітуд розсіяння за моностатичного зондування кругового волокна із міжфазним включенням (суцільні тонкі та штрихові криві відповідають значенням  $\gamma_2 = 0,5$  і  $\gamma_2 = 5$ ; суцільні жирні та точкові криві відповідають випадкам міжфазної тріщини ( $\gamma_2 = 0$ ) та ідеального контакту між волокном і матрицею)

Бачимо, що за нормального падіння хвилі на міжфазне включення (рис. 1а) при малій його контрастності спектральні залежності мають періодично розташовані максимуми та мінімуми. Вони спричинені інтерференцією відбитої хвилі, сформованої в околі центральної точки міжфазної неоднорідності  $\theta = 0^\circ$ , і хвилями, дифрагованими її краями. За падіння хвилі на край включення  $\theta = \theta_+$  (рис. 1б), зворотно розсіяна хвиля формується, в основному, в околі цього краю. Подібний механізм формування дифрагованих хвиль має місце і у випадку міжфазної тріщини [4]. При збільшенні контрастності міжфазного включення це призводить до пониження рівня  $f_0$  у випадку  $\theta_{in} = 0^\circ$ , та її зростання у випадку  $\theta_{in} = 90^\circ$ . Така поведінка спектральних залежностей характерна для всього наведеного діапазону частот за винятком області низьких частот та околу  $k_1 a \approx 6$  резонансного збудження волокна за умов його ідеального контакту із матрицею. Видно також, що за зростання жорсткості міжфазної неоднорідності нормовані амплітуди розсіяння прямують до рівня  $f_0$  у випадку ідеального контакту матриці та волокна.

На рис. 2 зображено спектри нормованих амплітуд моностатичного розсіяння  $f_0$  плоскої хвилі (8) круговим скляним волокном в епоксидній матриці за різних параметрів  $\delta$  загострення країв міжфазної неоднорідності, що характеризують їх кривину. Розрахунки проведено за  $\theta_{in} = 0^\circ$  та  $\theta_+ = -\theta_- = 90^\circ$ . Суцільні криві відповідають значенням параметра контрастності  $\gamma_2 = 0,5$ , а штрихові —  $\gamma_2 = 5$ . Із рис. 1а та рис. 2 бачимо, що в області низьких частот вплив форми міжфазної неоднорідності на  $f_0$  несуттєвий за різних жорсткостей включення. Із збільшенням хвильового розміру розсіювача за невеликих значень

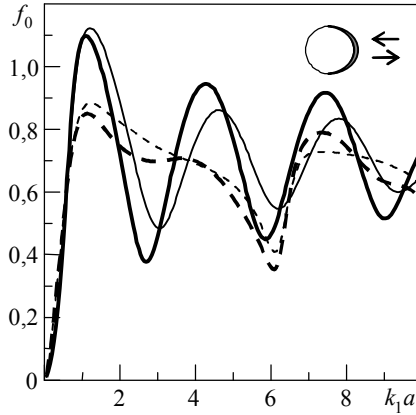


Рис. 2. Частотні залежності нормованих амплітуд розсіяння для різних форм міжфазних неоднорідностей (жирні суцільна та штрихова криві відповідають значенню  $\delta = 0$ ; тонкі суцільна та штрихова криві відповідають випадку  $\delta = 0,95$ )

параметра  $\gamma_2$  рівень нормованих амплітуд розсіяння зменшується із зростанням параметра  $\delta$ . Зростання контрастності міжфазної неоднорідності нівелює вплив її форми на величину  $f_0$ .

На рис. 3 проілюстровано реакцію композиту із квадратним (рис. 3а; у співвідношенні (14)  $N=3$ ,  $\beta=1/9$ ) і трикутним (рис. 3б;  $N=2$ ,  $\beta=1/4$ ) волокнами (з однаковою площею поперечних перерізів  $\pi a^2$ ) на проходження в ньому плоскої хвилі (8). Фронт її паралельний стороні волокна ( $\theta_{in} = 0^\circ$ ),

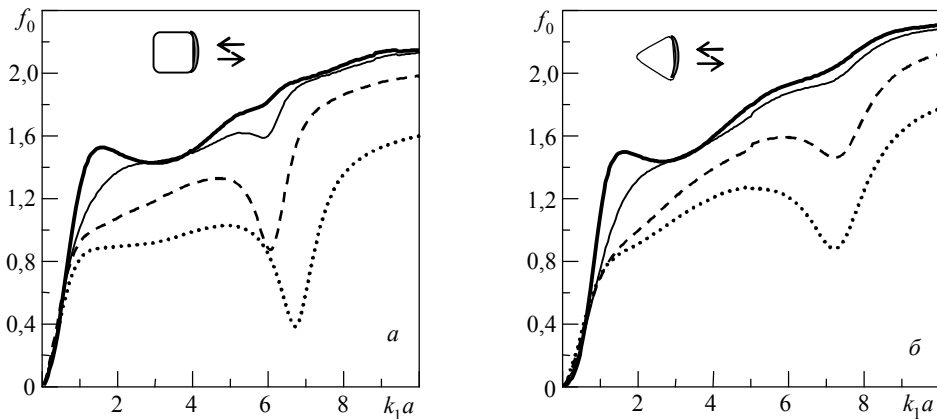


Рис. 3. Частотні залежності нормованих амплітуд розсіяння для різних форм волокон за моностатичного їх зондування (суцільні тонкі та штрихові криві відповідають значенням  $\gamma_2 = 0,5$  і  $\gamma_2 = 5$ ; суцільні жирні та точкові криві відповідають випадкам тріщини між волокном і матрицею та їх ідеального контакту)

на якій розташоване включення із гладкими формами кінців при  $\delta = 0,5$  у співвідношенні (15). В обох випадках форм волокна, за винятком низькочастотного діапазону  $k_1 a < 1$ , зростання жорсткості міжфазного включення призводить до зменшення рівнів нормованих амплітуд розсіяних хвиль. При цьому ці рівні більші ніж значення  $f_0$  у випадках ідеального механічного контакту волокна із зовнішнім середовищем та менші ніж  $f_0$  за міжфазної тріщини, розташованої по  $S_0$ . Бачимо також, що у діапазоні низьких частот значення амплітуд хвиль, розсіяних трикутними волокнами менші за відповідні значення для квадратних волокон, а у резонансному та високочастотному діапазонах — навпаки.

**Висновки.** Запропоновано методика дослідження хвильових явищ у пружному середовищі, що містить пружне волокно неканонічної форми із тонким міжфазним включенням змінної товщини та малої жорсткості. Тіло перебуває в умовах поздовжнього зсуву й усталеного режиму збурення. Методика базується на асимптотично точній моделі динамічної взаємодії тонкої пружної неоднорідності із пружним середовищем та модифікованому методі нульового поля. Отримані в роботі результати та висновки числового аналізу частотних залежностей амплітуд розсіяння можна використати під час неруйнівного контролю волокнистих композитів із міжфазними тонкими неоднорідностями.

### Література

- [1] Кунець Я., Матус В. Розсіяння SH-хвилі пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 132-139.
- [2] Yang Y., Norris A. N. Shear wave scattering from a debonded fiber // J. Mech. Phys. Solids. — 1991. — Vol. 39. — P. 273-294.
- [3] Kim J.-Y. Attenuation and speed of antiplane shear wave in fiber-reinforced composites with random interfacial cracks // Int. J. Solids and Structures. — 2001. — Vol. 38. — P. 7121-7137.
- [4] Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack / Y. I. Kunets, V. V. Matus, V. V. Mykhas'kiv et al. // Mech. Composite Materials. — 2008. — Vol. 44. — P. 165-172.
- [5] Кунець Я. І., Матус В. В. Ефективні динамічні параметри матричного композиту з частково відшарованими волокнами неканонічної форми // Акустичний вісник. — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 39-45.
- [6] Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. — 425 p.
- [7] Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. — 1999. — Vol. 37. — P. 331-345.
- [8] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [9] Mishchenko M. I., Martin P. A. Peter Waterman and T-matrix methods // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. — 2013. — Vol. 123. — P. 2-7.
- [10] On the stiffness of spring model for closed crack / S. Ueda, S. Biwa, K. Watanabe et al. // Int. J. Eng. Sci. — 2006. — Vol. 44. — P. 874-888.



## **Oscillation of unbounded elastic solid with elastic fiber and thin interphase inhomogeneity of low rigidity**

Jaroslav Kunets, Valerij Matus, and Vasyl Porochovs'kyj

*Amplitude-frequency characteristics of SH-waves scattered by elastic fiber of non-canonical form in the far wave zone at stationary oscillations of unbounded elastic solid are investigated. The effects of mechanical and geometric parameters of the thin inclusion of variable thickness and low rigidity, which is located on the contact surface of the fiber and matrix, on the dynamic characteristics are analyzed. The modified null field method is exploited for obtaining the numerical results.*

## **Колебания неограниченной среды с упругим волокном и тонкой межфазной неоднородностью малой жесткости**

Ярослав Кунец, Валерий Матус, Василий Пороховский

*Исследовано амплитудно-частотные характеристики SH-волн, рассеянных упругим волокном неканонической формы в дальнюю волновую зону при установившихся колебаниях неограниченного упругого тела. Проанализировано влияние на динамические характеристики механических и геометрических параметров тонкого включения переменной толщины и малой жесткости, расположенного на поверхности контакта волокна та матрицы. Аналитико-численный метод исследования базируется на модифицированном методе нулевого поля.*

**Представлено професором Т. Нагірним**

Отримано 05.10.15