УДК 622.279.23

Числова модель руху газу в трубопроводі з використанням дробових похідних за часом

Назарій Лопух[1], Ярослав П'янило[2]

[1] к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: lopuh.nazar@gmail.com
[2] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005

У роботі запропоновано ітераційний метод розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Побудовано модифікований метод скінченних елементів із використанням схеми Грюнвальда-Летнікова для дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капутто та Рімана-Ліувілля. Проведено числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних. Результатами експерименту підтверджено характер поведінки тиску газу за наявності нетипової фільтрації. Встановлено, що порядок дробової похідної може бути параметром адаптації математичної моделі.

Ключові слова: дискретизація, числовий метод, нестаціонарний процес, математична модель, дробові похідні, лінеаризація, метод скінченних елементів.

Вступ. Рух газу в трубопроводі, в загальному випадку, описується системою взаємозв'язаних диференціальних нелінійних рівнянь у часткових похідних. Для розв'язування таких систем використовують ітераційні, числові, асимптотичні чи інші наближені методи [1]. Очевидно, що кожен із них має певні межі свого застосування та дає можливість отримати значення шуканого розв'язку певного класу прикладних задач із достатньою точністю. Відомо, що багато фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких враховуються похідні дробових порядків [2, 3]. Область застосовності диференціальних рівнянь дробового порядку значно ширша, ніж диференціальних рівнянь із цілочисловим диференціюванням, оскільки останні є їх частковим випадком. Ідею розробки гібридної схеми розв'язку з максимально широкими границями застосовності реалізовано в роботах [3, 4], у яких для отримання шуканого розв'язку запропоновано ітераційний підхід для методу Грюнвальда-Летнікова в поєднанні з модифікованим методом скінченних елементів (МСЕ).

1. Модель руху газу в трубопроводі

У більшості робіт для опису неусталеного ізотермічного руху газу в трубопроводі використовують таку нелінійну систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь у часткових похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \alpha\rho \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right) + \rho g \dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\lambda\rho\upsilon^2}{2d} + \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для замикання цієї системи рівнянь використовують рівняння стану газу, для якого існує багато подань у параметричній формі, зокрема,

$$p = \rho z R T .$$

Тут p, ρ, υ — відповідно тиск, густина та швидкість руху газу, g — прискорення вільного падіння, h — відносна висота залягання трубопроводу, λ — коефіцієнт гідравлічного опору, d — внутрішній діаметр трубопроводу, c — швидкість звуку в газі, α — коефіцієнт Коріоліса, $t > 0$ — час, $x \in [0, l]$ — лінійна координата, l — довжина трубопроводу, R — газова стала, z — коефіцієнт стисливості, для обчислення якого застосовують емпіричну формулу [5]

$$z = \frac{1}{1 + fp}, \quad (2)$$

де p — вимірюється в атмосферах, а $f = \left(24 - 0,21 t^{\circ}\text{C}\right) \cdot 10^{-4}$ [1/атм], $t^{\circ}\text{C}$ — температура газу за Цельсієм. Формула (2) з достатньою для практики точністю описує відмінність реального газу від ідеального. Вона дозволяє враховувати залежність коефіцієнта стискуваності від тиску та температури газу під час розв'язування задач математичної фізики, зокрема в усталеному режимі руху газу.

Відомо, що температура газу змінюється вздовж трубопроводу, а відтак впливає на газодинамічні параметри процесу. Зміна на 5°С середньої температури газу в трубопроводі довжиною у 100 км із внутрішнім діаметром 1,388 м призводить до зміни вихідного тиску від 0,5 до 1 атм. Залежність температури газу вздовж трубопроводу від координати задаємо формулою [5]

$$T(x) = T_{01} + T_{02} e^{-ax} , \quad (3)$$

де

$$T_{01} = T_{гр} - T_{00}, \quad T_{02} = T_0 - T_{гр} + T_{00} ,$$

$$T_{00} = \frac{1}{al}\left[\Delta p\left(D_i - \frac{1}{C_p \rho_0}\right) + \frac{g\Delta h}{C_p}\right], \quad \Delta p = p_0 - p_l , \quad a = \frac{k\pi d}{C_p \omega} ,$$

$T_{гр}$ — температура ґрунту, T_0 — температура газу на вході в трубопровід, D_i — коефіцієнт Джоуля-Томпсона, C_p — теплоємність газу за сталого тиску, ρ_0 — густина газу в стандартних умовах (температура 20°С, тиск 1 атм), p_0 і p_l — значення тисків на вході та виході трубопроводу, k — коефіцієнт теплопередачі від трубопроводу до ґрунту, $\omega = \rho\upsilon$ — конвективна складова потоку маси.

За початкові умови вибрано розподіл тиску у вихідному усталеному режимі, який визначається співвідношенням

$$p(x,o)=\sqrt{p_o^2-\frac{\lambda zRT}{d}\left(\frac{\rho_o q_o}{s}\right)^2 x}\ , \tag{4}$$

де $s=\pi d^2/4$, q_0 — об'ємна витрата газу в стандартних умовах.

Розглядаємо трубопровід, який з'єднує послідовні компресорні станції. Оскільки на компресорних станціях є витратоміри, то природно граничні умови задавати на об'ємні витрати $q_0(t)$ на вході в трубопровід і $q_l(t)$ — на виході. Аналіз наявних експериментальних даних показує, що для їх апроксимації ефективними є функціональні залежності (5) і (6)

$$q_0(t)=q_{0n}+\left(q_0-q_{0n}\right)e^{-\gamma_0 t},\quad q_l(t)=q_{ln}+\left(q_l-q_{ln}\right)e^{-\gamma_l t}. \tag{5}$$

Тут q_0, q_{0n} — об'ємні витрати газу у вихідному та новому стаціонарному станах руху газу, γ_0 — параметр, який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу, а q_l, q_{ln}, γ_l — аналогічні параметри в кінці трубопроводу. Граничні умови записуємо так

$$\omega(0,t)=\frac{\rho_{st}}{s}q_0(t),\quad \omega\left(l,t\right)=\frac{\rho_{st}}{s}q_l(t). \tag{6}$$

2. Числова реалізація

Числова модель базується на методі скінченних елементів у поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому підінтервалі [4,6,7]. Однією з переваг МСЕ є те, що він дозволяє досліджувати фізичні процеси, які описуються диференціальними рівняннями з розподіленими параметрами. Для спрощення записів і більшої ілюстративності розв'язування задач математичної фізики часто використовують векторні та матричні подання величин. У випадку, що розглядається, шукані функції ω та p зручно подати як вектор $\mathbf{W}=(\omega, p)$. Тоді в матрично-векторній формі систему (1) запишемо так

$$\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial x}=\mathbf{VW}+\mathbf{M}\ , \tag{7}$$

де

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1\\c^2&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}=\begin{pmatrix}-m_2&-m_3\\0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}-m_4\\0\end{pmatrix},$$

$$m_2=\frac{\alpha b_\upsilon}{2d},\quad m_3=\frac{\rho_0 T_0}{p_0 T}b_p\left(g\frac{dh}{dx}+\frac{\lambda a_\upsilon}{2d}\right),\quad m_4=\frac{\rho_0 T_0}{p_0 T}a_p\left(g\frac{dh}{dx}+\frac{\lambda a_\upsilon}{2d}\right),$$

$$b_\upsilon=-\upsilon_1\upsilon_2-\frac{1}{8}\left(\upsilon_2-\upsilon_1\right)^2,\quad a_p=p_1\left(1+fp_1\right)-b_p p_1,$$

$$b_p = \frac{1}{p_1 - p_2}\left[p_1\left(1+fp_1\right) - p_2\left(1+fp_2\right)\right], \quad a_\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2, \quad p \in \left[p_1, p_2\right],$$

p_1, p_2 — межі зміни тиску, а υ_1, υ_2 — межі зміни швидкості руху газу в трубопроводі.

Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [4]:

$$ {}^c D_\tau^\alpha = \frac{{}^c\partial^\alpha \varphi(\tau)}{\partial\tau^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_0^\tau \frac{\partial^{m+1}\varphi(\xi)\big/\partial\xi^{m+1}}{\left(\tau-\xi\right)^{\alpha-m}} d\xi, \tag{8}$$

де $m=[\alpha]$, $[\cdot]$ — ціла частина дійсного числа. Дробову похідну $\partial^\alpha p\big/\partial t^\alpha$ розкладемо за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$$ {}^{GL}D_\tau^\alpha p := \lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta t\right)^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}(-1)^j \binom{\alpha}{j} p\left(\tau - j\Delta t\right). \tag{9}$$

Оператор Грюнвальда-Летнікова (8) апроксимується на проміжку $[0,\tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$$ {}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p\left(\tau - j\Delta t\right). \tag{10}$$

Тут $c_j^{(\alpha)}$ — коефіцієнти Грюнвальда-Летнікова, які визначаються як

$$c_j^{(\alpha)} = \left(\Delta t\right)^{-\alpha}(-1)^j\binom{\alpha}{j}. \tag{11}$$

На базі рекурентного співвідношення [1]

$$c_j^{(\alpha)} = \left(\Delta t\right)^{-\alpha}, \qquad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right)c_{j-1}^{(\alpha)} \tag{12}$$

ми можемо обчислити коефіцієнти $c_j^{(\alpha)}$. Для $j=1$ маємо $c_1^{(\alpha)} = -\alpha\left(\Delta t\right)^{-\alpha}$.

Використавши лінеаризацію (7) і дискретизаційну схему для дробової похідної (9)-(11) перетворимо систему (1) до форми:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + m_2\omega + m_3 p = -m_4, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}p(t) = \sum_{j=0}^{f} c_j^{(\alpha)} p\left(t_{f-j}\right) - \sum_{k=0}^{m}\dfrac{\left(t_f\right)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}p\left(t_k\right)$.

3. Обчислювальний експеримент

Пропоновану схему розв'язування системи диференціальних рівнянь апробовано в ході обчислювального експерименту на основі таких даних: $l = 100$ км, $d = 1,388$ м, $\lambda = 0,009$, $\rho_0 = 0,682$ кг/м^3, $T_0 = 313$°K, $R = 506,7$ Дж/кг K, $z = 0,87$. Граничні умови задавали на поступлення та відбір газу, які змінювалися з часом від 900 до 1200 м^3/с за експоненціальним законом. Крок за часом $dt = 20$ с, кількість елементів розбиття за координатою $n = 30$.

У табл. 1 наведені значення тисків уздовж трубопроводу упродовж повного нестаціонарного періоду часу ($T = 2000$ с) для випадку $\alpha = 1$.

На рис. 1-3 подані графіки значень тиску газу на окремих ділянках трубопроводу для різних значень степеня дробової похідної α.

Аналіз результатів обчислювального експерименту показує, що залежно від вибору параметра порядку похідної за часом α динаміка середньопластових тисків суттєво змінюється. Зі зменшенням порядку дробової похідної значення тисків падають. Тривалість падіння тісно зв'язана із граничними умовами задачі (рис. 1-3). Якщо параметр $\alpha = 1$, то значення розрахованих середньопластових тисків співпадають з експериментальними даними. Значення тисків залежні від степеня дробової похідної на всій ділянці трубопроводу окрім границь (рис. 4).

Таблиця 1

$t \setminus x$	0	12.5	25.0	37.5	50.0	62.5	75.0	87.5	100.0
0	60.00	57.93	55.90	53.89	51.93	49.99	48.09	46.22	44.38
100	60.28	57.20	55.51	53.78	51.94	50.04	48.11	46.16	44.16
200	60.56	57.35	55.47	53.62	51.78	49.91	47.99	45.99	43.92
300	60.84	57.53	55.56	53.63	51.70	49.77	47.79	45.77	43.68
400	61.12	57.73	55.67	53.66	51.67	49.67	47.64	45.57	43.44
500	61.40	57.93	55.80	53.72	51.66	49.59	47.51	45.39	43.20
600	61.68	58.13	55.94	53.78	51.66	49.53	47.39	45.20	42.96
700	61.96	58.34	56.08	53.86	51.67	49.48	47.27	45.03	42.72
800	62.24	58.56	56.22	53.94	51.68	49.43	47.16	44.85	42.48
900	62.52	58.77	56.37	54.02	51.69	49.38	47.05	44.67	42.24
1000	62.80	58.98	56.51	54.10	51.71	49.33	46.93	44.50	42.00
1200	62.80	59.08	56.63	54.19	51.74	49.30	46.86	44.43	42.00
1400	62.80	59.08	56.64	54.20	51.75	49.31	46.88	44.44	42.00
1600	62.80	59.08	56.64	54.20	51.76	49.32	46.88	44.44	42.00
1800	62.80	59.08	56.64	54.20	51.76	49.32	46.88	44.44	42.00
2000	62.80	59.08	56.64	54.20	51.76	49.32	46.88	44.44	42.00

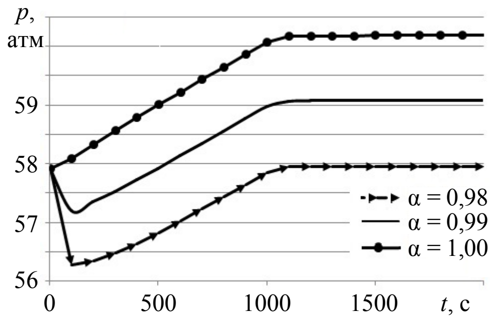

Рис. 1. Поведінка тиску газу в точці x = 12 км для різних значень степеня дробової похідної α

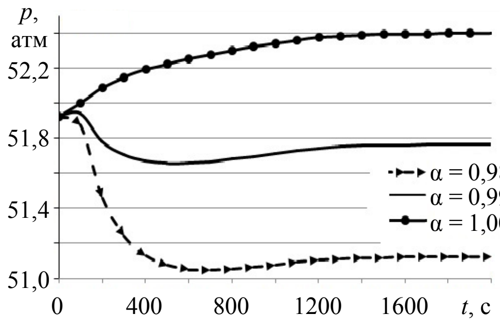

Рис. 2. Поведінка тиску газу в точці x = 50 км для різних значень степеня дробової похідної α

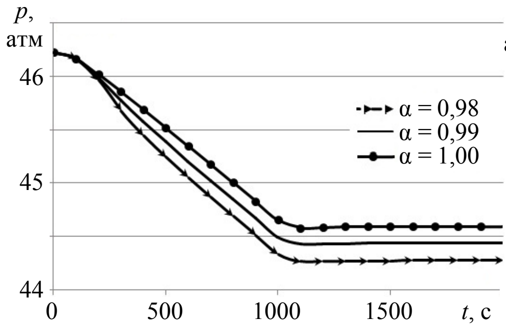

Рис. 3. Поведінка тиску газу в точці x = 85 км для різних значень степеня дробової похідної α

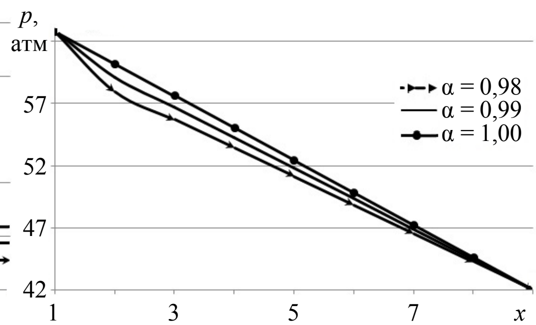

Рис. 4. Тиск газу вздовж труби на зрізі t = 500 с для різних значень степеня дробової похідної α

Висновки. У статті описано схему побудови та застосування методу скінченних елементів із використанням алгоритму Грюнвальда-Летнікова. Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної Капутто за часом на процес руху газу в трубопроводі. Встановлено, що порядок дробової похідної може бути додатковим параметром адаптації математичної моделі.

Література

[1] *Александров А. В., Яковлев Е. И.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. — Москва: Недра, 1974. — 432 с.

[2] *Лопух Н. Б., П'янило Я. Д.* Числова модель фільтрації газу в пористих середовищах із використанням дробових похідних за часом // Математичні методи в хімії і біології. — 2014. — Т. 2, № 1. — С. 98-104.

[3] Models of mass transfer in gas transmission systems / *Ya. D. Pyanylo, M. G. Prytula, N. M. Prytula, N. B. Lopuh* // Mathematical modeling and computing. — 2014. — Vol. 1, No 1. — P. 84-96.

[4] *Lopuh N. B., Pyanylo Ya. D.* Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. — 2014. — Vol. 2 (1). — P. 15-19.

[5] *Черникин А. В., Галиуллин З. Т.* Формула для расчета коэффициента гидравлического сопротивления газопроводов // Газовая промышленность. — 1998. — № 1. — С. 32-33.

[6] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П’янило, Я. Савула* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.

[7] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (2) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П’янило, Я. Савула* // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології. — 2008. — № 616. — С. 159-165.

Numerical model of gas flow in pipeline using fractional time derivatives

Nazariy Lopuh, Yaroslav P'yanylo

The paper presents a method for solving systems of nonlinear differential equations in partial derivatives. A modified finite element method using the Grünwald-Letnikov algorithm for fractional time derivatives is constructed. Fractional derivatives of Caputo and Riemann-Liouville are considered. A numerical analysis using experimental data input is carried out. The results of the experiment confirm the behavior of the gas pressure in the presence of atypical filtering. It is established that the order of fractional derivative can serve as an adaptation parameter of the mathematical model.

Числовая модель движения газа в трубопроводе с использованием дробных производных по времени

Назарий Лопух, Ярослав Пьянило

В работе предложен итерационный метод решения нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Построен модифицированный метод конечных элементов с использованием схемы Грюнвальда-Летникова для дробных производных по времени. Рассмотрены дробные производные Капутто и Риммана-Лиувилля. Проведен численный анализ с использованием экспериментальных входных данных. Результатами эксперимента подтверждено характер поведения давления газа при наличии нетипичной фильтрации. Установлено, что порядок дробной производной может служить параметром адаптации математической модели.

Отримано 02.11.15