

## Контакт пружного півпростору та жорсткої основи за дії розподілених по колу стоків тепла

Мар'яна Микитин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

*Розглянуто безфрикційний контакт пружного півпростору з жорсткою термоізолюваною основою під дією прикладеного на нескінченності однорідного тиску та стоків тепла, рівномірно розподілених по колу, розташованому у півпросторі на деякій відстані від його поверхні. Побудовано аналітичний розв'язок задачі теплопровідності та термопружності для півпростору і проаналізовані контактні напруження. Виявлено, що у разі перевищення інтенсивності стоків тепла певного значення відбуватиметься відшарування поверхонь спряжених тіл по круговій або кільцевій області.*

**Ключові слова:** пружний півпростір, безфрикційний контакт, жорстка термоізолювана основа, розподілені по колу стоки тепла, відшарування.

**Вступ.** Під час взаємодії тіл з узгодженими поверхнями локалізовані об'ємні навантаження вносять збурення у контактні напруження та можуть зумовити виникнення міжповерхневих зазорів. Огляд праць, у яких вивчається явище порушення прямого контакту тіл під дією механічних навантажень, наведено у статті [1]. У праці [2] розв'язано плоску контактну задачу про розшарування двох пружних півпросторів, зумовлене зосередженим стоком тепла. Досліджено виникнення під дією зосередженого стоку тепла кругового зазору між пружним півпростором і жорсткою основою у випадку ізотермічної [3] та теплоізолюваної [1, 4] основи. Утворення зазору між двома півпросторами під дією зосередженої сили проаналізовано у праці [5]. Вивчено [6] порушення контакту двох півплощин, одна з яких містить кругове включення, що відрізняється від матриці коефіцієнтом лінійного теплового розширення, за нагрівання спряжених тіл до сталої температури. Виявлено, що локальні ділянки неідеального теплового контакту можуть викликати термомеханічне розшарування тіл за однорідного теплового потоку через спряжені поверхні [7-10].

У цій статті досліджено термомеханічний контакт пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за дії у півпросторі стоків тепла, рівномірно розподілених по колу на деякій відстані від поверхні спряження. Вивчено, що такі стоки тепла за збільшення їх загальної інтенсивності можуть зумовити виникнення кругових або кільцевих розшарувань між півпростором і основою.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо безфрикційний контакт пружного ізотропного півпростору  $z > 0$  з термоізолюваною жорсткою основою. Півпростір перебуває під дією прикладеного на нескінченності тиску  $p$ , що притискає його до основи, та рівномірно розподіленого по колу радіуса  $R$  стаціонарного стоку тепла інтенсивності  $\omega$ , що лежить у площині, паралельній до межі, та розташований на відстані  $d$  від неї (рис. 1). Дослідимо термонапружений стан півпростору, контактний тиск на поверхні  $z = 0$  і можливість виникнення відшарування півпростору від жорсткої основи, зумовленого джерелом охолодження.

Осесиметричне температурне поле  $T(r, z)$ , що виникає у пружному тілі, в циліндричній системі координат задовольняє рівняння теплопровідності [11, 12]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{(-\omega)}{2\pi kr} \delta(z-d)\delta(r-R),$$

а компоненти вектора переміщень  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  — рівняння рівноваги

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Компоненти тензора напружень  $\sigma_{rz}(r, z)$ ,  $\sigma_{zz}(r, z)$ ,  $\sigma_{\phi\phi}(r, z)$ ,  $\sigma_{rz}(r, z)$  виражаються через компоненти вектора переміщень співвідношеннями Дюгамеля-Неймана

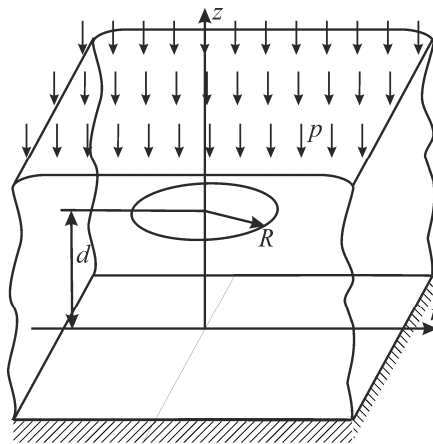


Рис. 1

$$\sigma_{rr} = 2\mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_t T \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_t T \right),$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_t T \right), \quad \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Тут  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона;  $\mu$  — модуль зсуву;  $\alpha_t$  — коефіцієнт лінійного теплового розширення,  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака,  $k$  — коефіцієнт теплопровідності,  $e = \partial u_r / \partial r + u_r / r + \partial u_z / \partial z$  — об'ємне розширення.

Крайові умови задачі теплопровідності та термопружності мають вигляд: на поверхні контакту з основою ( $z = 0, 0 \leq r < \infty$ ):

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad u_z = 0; \quad \sigma_{rz} = 0;$$

на нескінченності ( $z = \infty, 0 \leq r < \infty$ ):

$$T = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad \sigma_{zz} = -p.$$

За відсутності зчеплення між пружним півпростором і жорсткою основою їхні поверхні перебувають у повному контакті, якщо нормальні контактні напруження є скрізь недодатними:

$$\sigma_{zz}(r, 0) \leq 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (1)$$

Якщо ж умова (1) порушується в деякій області ділянки контакту, то це означатиме, що під дією джерела охолодження відбуватиметься відшарування між тілами та виникатиме міжповерхневий зазор.

## 2. Побудова розв'язку задачі

Для розв'язання задачі про повний контакт півпростору з основою за дії стоків тепла, розподілених по колу радіуса  $R$  на відстані  $d$  від поверхні, використаємо розв'язок задачі теплопровідності та термопружності про зосереджений стік тепла у півпросторі з термоізолюваною основою [4, 12]. Вважаючи, що стоки розподілені вздовж кола рівномірно, інтегруємо цей розв'язок по колу й отримуємо температуру, переміщення та напруження у півпросторі за дії у ньому колового джерела охолодження:

$$T(r, z) = -\frac{\Omega}{2\pi^2 k} \left[ \frac{1}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{1}{D_+} K(4rR/D_+^2) \right], \quad (2)$$

$$u_r(r, z) = \frac{\nu p r}{2(1+\nu)\mu} - \frac{(1+\nu)\Omega\alpha_t}{16\pi^2 k(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{r^2 + R^2 + (z-d)^2 - 2Rr \cos \varphi}} d\varphi -$$

$$- \frac{(1+\nu)\Omega\alpha_t}{16\pi^2 k(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{r^2 + R^2 + (z+d)^2 - 2Rr \cos \varphi}} d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
 u_z(r, z) &= -\frac{pz}{2(1+\nu)\mu} + \frac{(1+\nu)\Omega\alpha_t}{4\pi^2k(1-\nu)} \left[ \frac{(z-d)}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{(z+d)}{D_+} K(4rR/D_+^2) \right], \\
 \sigma_{rr}(r, z) &= \frac{\mu(1+\nu)\Omega\alpha_t}{2\pi^2k(1-\nu)} \left[ \frac{2}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{2}{D_+} K(4rR/D_+^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(z-d)^2}{[(r-R)^2 + (z-d)^2] D_-} E(4rR/D_-^2) - \frac{(z+d)^2}{[(r-R)^2 + (z+d)^2] D_+} E(4rR/D_+^2) \right], \\
 \sigma_{\varphi\varphi}(r, z) &= \frac{\mu(1+\nu)\Omega\alpha_t}{2\pi^2k(1-\nu)} \left[ \frac{1}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{1}{D_+} K(4rR/D_+^2) \right], \\
 \sigma_{rz}(r, z) &= \frac{\mu(1+\nu)\Omega\alpha_t}{16\pi^2k(1-\nu)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(z-d)\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{[r^2 + R^2 + (z-d)^2 - 2Rr \cos \varphi]^3}} d\varphi d\varphi + \right. \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{(z-d)\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{r^2 + R^2 + (z-d)^2 - 2Rr \cos \varphi}} d\varphi d\varphi + \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{(z+d)\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{[r^2 + R^2 + (z+d)^2 - 2Rr \cos \varphi]^3}} d\varphi + \\
 &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \frac{(z+d)\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi}}{\sqrt{r^2 + R^2 + (z+d)^2 - 2Rr \cos \varphi}} d\varphi \right\}, \\
 \sigma_{zz}(r, z) &= -p + \mu \frac{\Omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi^2k(1-\nu)} \left[ \frac{1}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{1}{D_+} K(4rR/D_+^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(z-d)^2}{[(r-R)^2 + (z-d)^2] D_-} E(4rR/D_-^2) - \frac{(z+d)^2}{[(r-R)^2 + (z+d)^2] D_+} E(4rR/D_+^2) \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

де  $D_- = \sqrt{(r+R)^2 + (z-d)^2}$ ,  $D_+ = \sqrt{(r+R)^2 + (z+d)^2}$ ,  $\Omega = 2\pi R\omega$  — загальна потужність стоків тепла,  $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-m(\cos x)^2}}$ ,  $E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m(\sin x)^2} dx$  — повні еліптичні інтеграли I і II роду відповідно.

### 3. Аналіз результатів

Для числових розрахунків введемо безрозмірні змінні:  $\bar{r} = r/R$ ,  $\bar{d} = d/R$ ,  $\bar{p} = p/\mu$ ,  $\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\mu$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega\alpha_t(1+\nu)/[2\pi^2kR(1-\nu)]$  і проаналізуємо розподіл контактних нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}$  для різних значень загальної потужності стоків тепла  $\bar{\Omega}$  та їх відстані  $\bar{d}$  до межі за фіксованого значення зовнішнього тиску  $\bar{p} = 0,001$ . Зауважимо, що за відсутності зчеплення тіл виникнення додатних (розтягувальних) нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}$  на деякій ділянці контакту за певного термічного навантаження означає, що в цьому разі порушується умова (1) і відбуватиметься локальне розшарування спряжених поверхонь. Тому для побудови коректного розв'язку контактної задачі за таких навантажень необхідно враховувати утворення міжповерхневого зазору.

Виявилося, що характер розподілу нормального контактного напруження змінюється, коли відстань  $\bar{d}$  від джерела охолодження до межі півпростору переходить через критичне значення  $\bar{d}_{cr} \approx 1,1$ . Якщо  $\bar{d} < \bar{d}_{cr}$ , то нормальні контактні напруження мають максимум на деякому колі радіуса  $\bar{r}_{cr}$  і локальний мінімум при  $\bar{r} = 0$ . Розподіл нормальних контактних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}$  в цьому випадку за різних значень загальної потужності стоків тепла  $\bar{\Omega}$  зображено на рис. 2 для відстані  $\bar{d} = 0,4 < \bar{d}_{cr}$ . При  $\bar{\Omega} = 0,0002$  контактні напруження  $\bar{\sigma}_{zz}$  скрізь від'ємні; при  $\bar{\Omega} = 0,00028$  вони стають додатними на кільцевій ділянці, що означає порушення контакту тіл по кільцю; при  $\bar{\Omega} = 0,0004$  вони стають додатними на круговій ділянці, що означає виникнення кругового відшарування.

Якщо відстань від стоків тепла до межі півпростору  $\bar{d} > \bar{d}_{cr}$ , то нормальні контактні напруження мають максимум при  $\bar{r} = 0$ . Тому за зміни загальної

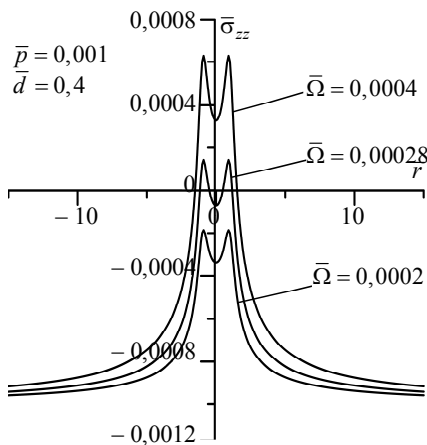


Рис. 2

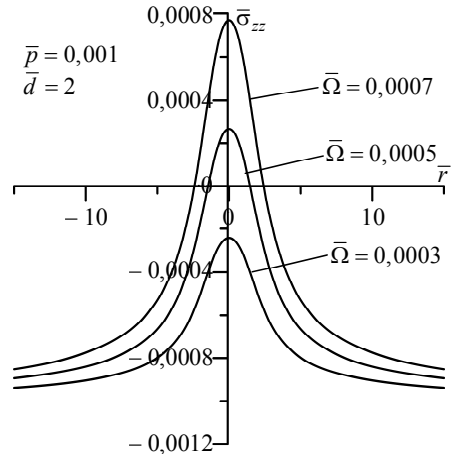


Рис. 3

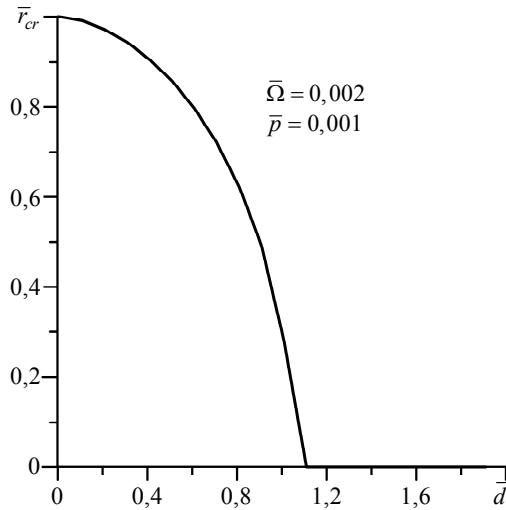


Рис. 4

потужності стоків тепла  $\bar{\Omega}$  може бути лише два характерні випадки, які для  $\bar{d} = 2 > \bar{d}_{cr}$  зображені на рис. 3: 1) якщо нормальні контактні напруження від'ємні скрізь (крива, що відповідає  $\bar{\Omega} = 0,0003$ ) і відбувається повний контакт поверхонь; 2) якщо ці напруження додатні на деякій круглій ділянці (криві, які відповідають  $\bar{\Omega} = 0,0005$  і  $\bar{\Omega} = 0,0007$ ), що означає виникнення кругового розшарування поверхонь.

На рис. 4 зображено залежність радіуса  $\bar{r}_{cr}$  кола, по якому починається відшарування, від глибини залягання стоку тепла в півпросторі  $\bar{d}$ . Бачимо, що максимум  $\bar{r}_{cr}$  досягається тоді, коли джерело розташоване на поверхні півпростору (тобто  $\bar{d} = 0$ ). У цьому разі відшарування починатиметься по колу, радіус якого рівний радіусу кола, по якому відбувається охолодження ( $\bar{r}_{cr} = 1$ ). При віддаленні джерела від поверхні радіус кола, по якому почнеться відшарування, зменшується і при  $\bar{d} = \bar{d}_{cr} \approx 1,1$  стає рівним нулеві. Це означає, що при  $\bar{d} > \bar{d}_{cr}$  відшарування починається в точці  $\bar{r} = 0$ .

Дослідження взаємодії розглянутих тіл за порушення їх контакту під дією розподіленого по колу стоку тепла вимагає формулювання та побудови розв'язку нової контактної задачі термопружності з урахуванням виникнення між ними кругового або кільцевого зазору, розміри якого визначатимуться з умов плавного змикання його берегів. У цьому разі на контактну поведінку тіл істотний вплив може мати теплопровідність заповнювача зазору [13-15].

**Висновки.** Розв'язано задачу про повний безфрикційний контакт пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за дії у півпросторі на деякій відстані від його поверхні рівномірно розподілених по колу стоків тепла. Отримано

вирази для температури, компонент тензора напружень і вектора переміщень у півпросторі. Проаналізовано контактні нормальні напруження для різних значень загальної потужності стоків тепла та глибини їх залягання у півпросторі. Виявлено, що характер розподілу нормальних контактних напружень якісно різний для двох випадків — коли відстань  $d$  від стоків тепла до межі півпростору меча за певну критичну величину  $d_{cr}$ , і коли ця відстань більша за  $d_{cr}$ . У першому випадку максимум нормальних контактних напружень досягається на колі, радіус якого рівний радіусу кола охолодження  $R$ , якщо воно розташоване на межі простору, і монотонно зменшується до нуля при прямуванні  $d$  до  $d_{cr}$ . У другому випадку максимум цих напружень досягається у точці, що є проекцією на межу півпростору центра кола, по якому розподілені стоки тепла. Показано, що зі збільшенням загальної потужності стоків тепла нормальні контактні напруження стають додатними на деякій ділянці, яка залежно від глибини розташування стоків може бути кільцевою або круговою. Це означає, що в цьому разі термічне навантаження зумовлюватиме порушення прямого механічного контакту півпростору з жорсткою основою та коректний розв'язок такої контактної задачі термопружності повинен будуватися з урахуванням виникнення міжповерхневого зазору.

## Література

- [1] *Монастирський Б. Є., Микитин М. М.* Осесиметрична задача про відшарування пружного півпростору від жорсткої основи за дії точкового джерела охолодження // Математичні методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 2. — С. 84-93.
- [2] *Мартиняк Р., Криштафович А., Мачишин І.* Односторонній контакт тіл з узгодженими поверхнями за дії джерел і стоків тепла // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1999. — Вип. 55. — С. 169-173.
- [3] *Kit H. S., Monastyrskyi B. Ye.* Thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies under condition of local contact absence // Therm. Stresses'99: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13-17, 1999. — Cracow: Cracow. Univ. of Techn., 1999. — P. 123-126.
- [4] *Монастырский Б. С., Мыкытын М. М.* Контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения. // Теор. и прикладная механика. — 2009. — Вып. 46. — С. 36-41.
- [5] *Martynyak R. M.* Interaction of elastic half planes in the case of incomplete mechanical contact // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. — 1985. — No 22. — P. 89-92.
- [6] *Мартиняк Р. М.* Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії під поверхневого включення // Доп. НАН України. — 1998. — № 12. — С. 71-77.
- [7] *Comninou M., Dundurs J.* On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact // Trans. ASME: J. Heat Transfer. — 1980. — Vol. 102, No 2. — P. 156-162.
- [8] *Krishtafovich A. A., Martynyak R. M.* Thermoelastic contact of anisotropic half-spaces with thermal resistance // International Applied Mechanics. — 1998. — Vol. 34, No 7. — P. 629-634.
- [9] *Krishtafovich A. A., Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // International Applied Mechanics. — 1999. — Vol. 35, No 2. — P. 159-164.
- [10] *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // Materials Science. — 2009. — Vol. 45, No 4. — P. 513-522.
- [11] *Грицький Д. В., Шелестовський Б. Г.* Осесиметричні контактні задачі термопружності. — Львів: Вища шк., 1974. — 112 с.
- [12] *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. — Москва: Изд-во АН СССР, 1962. — 364 с.

**Мар'яна Микитин**

**Контакт пружного півпростору та жорсткої основи за дії розподілених по колу стоків тепла**

- [13] *Shvets R. N., Martynyak R. M.* Integral-equations of the contact thermoelasticity problem for rough bodies // *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainiskoi RSR. Seriya A-Fiziko-Matematichni ta Technichni Nauki* — 1985. — No 11. — P. 37-40.
- [14] *Martynyak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Materials Science*. — 2000. — Vol. 36, No 2. — P. 300-304.
- [15] *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer*. — 2012. — Vol. 55, No 4. — P. 1170-1178.

## **The contact between an elastic half-space and a rigid base under the action of heat sinks distributed along a circle**

Maryana Mykytyn

The frictionless contact between an elastic half-space and a rigid base under the action of a uniformly distributed far-field pressure and heat sinks distributed uniformly along a circle and located in the half-space in a distance from its surface is considered. The analytical solution of the heat conduction and thermoelastic problem for the half-space is constructed and the contact stresses are analyzed. It is established that delamination of the surfaces of the contacting bodies occurs along a circular domain or a ring domain if the intensity of the heat sinks exceeds a certain critical value.

## **Контакт упругого полупространства и жесткого основания при действии распределенных по окружности стоков тепла**

Марьяна Мыкытын

*Рассмотрен безфрикционный контакт упругого полупространства с жестким термоизолированным основанием под действием приложенного на бесконечности однородного давления и стоков тепла, равномерно распределенных по окружности, расположенной в полупространстве на некотором расстоянии от его поверхности. Построено аналитическое решение задачи теплопроводности и термоупругости для полупространства и проанализированы контактные напряжения. Обнаружено, что при превышении интенсивностью стоков тепла некоторого значения происходит отслоение поверхностей сопряженных тел по круговой или кольцевой области.*

**Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком**

Отримано 05.10.15